

ملخصات شوم
نظريات ومسائل
في

الإحصاء

تأليف
الدكتور موراي ر. شبيجل
أستاذ الرياضيات
معهد رنلر للفنون التطبيقية المتعددة

نسق نسخة النظام المترى
ر. و. بوكسر
بكالوريوس العلوم
كلية فارتبور والفنسية

ترجمة
الدكتور شعبان عبد الحميد شعبان
قسم الإحصاء الرياضي - معهد الدراسات والبحوث الإحصائية
جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

مراجعة
الأستاذ الدكتور أحمد حسن المسوازي
دكتور في الرياضيات والبحوث الإحصائية
جامعة القاهرة - جمهورية مصر العربية

دار مانتجروهيل للنشر
الدار الدولية للنشر والتوزيع

حقوق النشر

- الطبعة الاجنبية : حقوق التأليف ١٩٧٢ ، دار ماكجروهيل للنشر - انك •
جميع الحقوق محفوظة •
- الطبعة العربية الأولى : حقوق التأليف ، ١٩٨١ ، دار ماكجروهيل للنشر •
جميع الحقوق محفوظة •
- الطبعة العربية الثانية : حقوق الطبع و النشر ١٩٨٨ - جميع الحقوق محفوظة للناشر •
الدار الدولية للنشر و التوزيع
ص"ب" ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب
القاهرة - ج ٤٠٠٠
ت : ٢٤٣٤٩٠٨

لا يجوز نشر أى جزء من هذا الكتاب أو اختزان مادته بطريقة الاسترجاع أو نقله على أى نحو أو بأى طريقة ، سواء كانت اليكترونية أو ميكانيكية أو بالتصوير أو بالتسجيل أو خلاف ذلك الا بموافقة الناشر على ذلك كتابة و مقدما •

مقدمة الناشر

المعرفة هي أصل الحضارة
والكلمة هي مصدر المعرفة ،
و الكلمة المطبوعة هي أهم مكون في هذا المصدر .
وقد كانت الكلمة المطبوعة ولا تزال أهم وسائل الثقافة و الاعلام و أوسعها انتشارا
و أبقاها أثرا ، حيث حملت إلينا حضارات الأمم عبر آلاف السنين لتتولى الأجيال المتلاحقة
صياغة حضاراتها و إصااة الطريق بنور العلم و المعرفة .
و الكلمة تبقى مجرد فكرة لدى صاحبها حتى تتاح لها فرصة نشرها و ترجمتها الى
لغات الآخرين ثم توزيعها ، و ذلك وحده هو الذي يكفل لها آداء رسالتها .
و عالم الكتب العلمية عالم رحب ممتد الآفاق ، متسع الجنبات ، و العلم لا وطن
له و لا حدود ، و يوم يحظى القارئ العربي بأحدث الكتب العلمية باللغة العربية
لهو اليوم الذي تتطلع له الأمة العربية جمعا ، .
و الدار الدولية للنشر و التوزيع تشعر بالرضى عن مساهمتها في هذا المجال
بتقديم الطبعات العربية للكتب العلمية الصادرة عن دار ماكجروهيل للنشر بموجب
الاتفاق المبرم معها ، مستهدفة توفير احتياجات القارئ العربي استاذا و باحثا و ممارسا .
و من جانب آخر فنحن نمد يدنا الى الجامعات العربية و المراكز العلمية و المؤسسات
و الهيئات الثقافية للتعاون معنا في اصدار طبقات عربية حديثة من الكتب و المراجع
العلمية تخدم التقدم العلمى و الحضارى للقارئ العربى .
و الله ولى التوفيق

محمد وفائى كامل
مدير عام
الدار الدولية للنشر

و التوزيع

المحتويات

صفحة

الفصل الأول : المتغيرات والأشكال البيانية

الإحصاء . المجتمع والعينة . الإحصاء الوصفي والاستقرائي . المتغيرات المتقطعة والمتصلة . تقريب البيانات .
الرموز العلمية . العمليات الحسابية . الدوال . الإحداثيات المتعامدة . الأشكال البيانية . الممسادات .
المتباينات . اللوغاريتمات . الأعداد المقابلة للوغاريتمات ٤٤- ١

الفصل الثاني : التوزيعات التكرارية

البيانات الخام . المفردات المنظومة . التوزيعات التكرارية . فترة الفئات . حدود الفئات . الحدود الحقيقية
لفئات . حجم أو طول الفئة . مركز الفئة . قواعد عامة لتكوين توزيع تكرارى . المدرجات التكرارية
والمضلعات التكرارية . التوزيع التكرارى النسبى . التوزيع التكرارى المتجمع . المنحنى التكرارى
المتجمع . التوزيع التكرارى المتجمع النسبى . المنحنى التكرارى المتجمع النسبى . المنحنيات التكرارية .
أشكال المنحنيات التكرارية ٧١- ٤٥

الفصل الثالث : الوسط والوسيط والنوال والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل . رمز التجميع . المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية . الوسط
الحسابى . الوسط الحسابى المرجح . خصائص الوسط الحسابى . حساب الوسط الحسابى من بيانات مبوبة .
الوسيط . النوال . علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والنوال . الوسط الهندسى . الوسط التوافقى .
علاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى والوسط التوافقى . جذر متوسط الريجمات . الريجمات والعشيرات
والمتينيات ٧٧- ١١١

الفصل الرابع : الانحراف المعيارى والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت أو التغير . المدى . الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات . نصف المدى الربيعى أو الانحراف
الربيعى . مدى المتينيات ١٠ - ٩٠ . الانحراف المعيارى . التباين . الطريقة المختصرة لحساب الانحراف
المعيارى . خصائص الانحراف المعيارى . طريقة شارلير للمراجعة . معامل شبرد لتصحيح التباين . علاقة
اعتبارية بين مقاييس التشتت . التشتت المطلق والتشتت النسبى . معامل الاختلاف . المتغير المعيارى
والدرجات المعيارية ١١٢- ١٣٨

الفصل الخامس : العزوم والالتواء والتفرطح

العزوم . العزوم من البيانات المبوبة . العلاقة بين العزوم . حساب العزوم من بيانات مبوبة . طريقة شارلير
لمراجعة ومعامل شبرد لتصحيح العزوم فى شكل غير مميز . الالتواء . التفرطح . العزوم والالتواء
والتفرطح للمجتمع ١٣٩- ١٥٥

الفصل السادس : أساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدي للاحتمال . تعريف الاحتمال كتكرار نسبي . الاحتمال الشرطي . الأحداث المستقلة والتابعة . الأحداث المتنافية . التوزيعات الاحتمالية المتقطعة . التوزيعات الاحتمالية المتصلة . التوزيع الرياضي . العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع وتباين العينة . التحليل التوافقي . المبادئ الأساسية . مضروب n . التباديل . التوافيق . تقريب ستيرنج $1/n$. العلاقة بين نظرية الاحتمال ونظرية الفئات ... ١٩٤-١٥٦

الفصل السابع : توزيعات ذي الحدين ، الطبيعي وبواسون

توزيع ذي الحدين . بعض خصائص توزيع ذي الحدين . التوزيع الطبيعي . بعض خصائص التوزيع الطبيعي . العلاقة بين توزيع ذي الحدين والتوزيع الطبيعي . توزيع بواسون . بعض خصائص توزيع بواسون . العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون . توزيع كثيرات الحدود . توفيق توزيع نظري للتوزيع التكراري لعينة ... ٢٢٥-١٩٥

الفصل الثامن : مبادئ نظرية العينات

نظرية العينات . المعاينة العشوائية . الأرقام العشوائية . المعاينة بإرجاع وبدون إرجاع . توزيعات المعاينة . توزيع المعاينة للأوساط . توزيع المعاينة للنسب . توزيع المعاينة للفروق والمجموع . الخطأ المعياري ... ٢٤٨-٢٢٦

الفصل التاسع : نظرية التقدير الإحصائية

تقدير المعالم . التقديرات غير المتحيزة . التقدير الكفؤ . التقدير بنقطة والتقدير بفترة . تقدير فترة الثقة لمعالم المجتمع . تقدير فترة الثقة للأوساط . فترات الثقة للنسب . فترات الثقة للفروق والمجموع . فترة الثقة للانحرافات المعيارية . الخطأ المحتمل ... ٢٦٦-٢٤٩

الفصل العاشر : نظرية القرارات الإحصائية واختبارات الفروض والمعنوية

القرارات الإحصائية . الفروض الإحصائية . فرض العدم . اختبارات الفروض والمعنوية . الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني . مستوى المعنوية . اختبارات تتضمن التوزيع الطبيعي . اختبار من طرف واحد واختبار من طرفين . اختبارات خاصة . منحى توصيف العمليات . قوة الاختبار . خرائط الرقابة . اختبارات المعنوية التي تتضمن الفروق بين العينات . اختبارات تتضمن توزيع ذي الحدين ... ٣٠٢-٢٦٧

الفصل الحادي عشر : نظرية العينات الصغيرة

العينات الصغيرة . توزيع « أستودينت » t . حدود الثقة . اختبارات الفروض والمعنوية . توزيع كا - مربع χ^2 . حدود الثقة $1/\alpha$. درجات الحرية ... ٣٠٣-٢٢٢

مقدمة

يلعب علم الإحصاء أو ما يسمى أحياناً بالأساليب الإحصائية دوراً متزايداً في جميع نواحي النشاط البشرى تقريباً . كبداية إذا أخذنا دنيا الأعمال فقط وحددنا أوجهها فإننا نجد أن أثر الإحصاء انتشر الآن إلى الزراعة والأحياء ، إدارة الأعمال ، الكيمياء ، الاتصالات ، الاقتصاد ، التربية ، الالكترونيات ، الطب ، الفيزياء ، العلوم السياسية ، علم النفس ، علم الاجتماع وعديد من المجالات الأخرى في العلوم والهندسة .

والهدف من هذا الكتاب هو تقديم الأسس العامة للإحصاء والتي تفيد كل فرد بصرف النظر عن مجال تخصصه . وقد روعي في تأليف الكتاب أنه يمكن استخدامه ككتاب مساعد لجميع الكتب المتداولة في الإحصاء . « أو كمنهج مقرر في الإحصاء » وهو كذلك ذو قيمة كمرجع للباحثين في بداية استخدامهم للإحصاء في مشاكل البحوث الخاصة بهم .

يبدأ كل فصل بعرض واضح للتعاريف والنظريات والأسس وكذلك توضيح الموضوعات الأخرى المتعلقة بهذا الفصل - إلى ذلك مجموعات متدرجة من المسائل المحلولة ومسائل إضافية وهي في أغلب الأحيان تستخدم بيانات مأخوذة من مشاكل إحصائية حقيقية . وتساعد المسائل المحلولة في شرح وتبسيط النظرية والتركيز على النقاط الدقيقة والتي بدون مراعاتها يشعر الطالب أنه على أرض غير صلبة كما تعطى تكرار للمبادئ الأساسية والتي تؤثر تأثيراً حيوياً في عملية التدريس . وتتضمن المسائل المحلولة عديداً من إثباتات الصيغ أما العدد الكبير من المسائل الإضافية بإجاباتها فتساعد على المراجعة الشاملة على الموضوعات الموجودة بكل فصل . والأساس الرياضي الوحيد المطلوب لفهم الكتاب كله هو الحساب ومبادئ الجبر ويقدم الفصل الأول من الكتاب مراجعة لأهم المفاهيم الرياضية المستخدمة به ويمكن قراءته إما مع بداية المقرر أو الرجوع إليه كلما ظهرت حاجة إلى ذلك خلال الدراسة . تعالج الأجزاء الأولى من الكتاب تحليل التوزيعات التكرارية وما يرتبط بها من مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح . . وهذا بالطبع يؤدي إلى مناقشة مبادئ الاحتمالات وتطبيقاتها وهذا يشكل مقدمة لدراسة نظرية المعاينة . وتعالج أولاً أساليب نظرية العينات ذات الحجم الكبير والتي تتضمن التوزيع الطبيعي وتطبيقاته في التقديرات الإحصائية واختبارات الفروض والمعنوية . أما نظرية العينات ذات الحجم الصغير وتتضمن توزيع ت - أستيدنت وتوزيع كا تربيع (χ^2) مع تطبيقاتهما فتعالج في الفصول التالية . وقد خصص فصل في توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى والتي تعد ذات أهمية في حد ذاتها وتؤدي منطقياً إلى دراسة الموضوعات الخاصة بالارتباط والانحدار في حالة متغيرين . الارتباط الجزئي والمتعدد الذي يتضمن أكثر من متغيرين عولج في فصل مستقل . وفي ختام الكتاب خصص فصلان لتحليل السلاسل الزمنية والأرقام القياسية على التوالي . وتعد الموضوعات المتضمنة في الكتاب أكثر مما يمكن دراسته كقرر في المستوى الأول . والدافع لذلك هو إعطاء الكتاب مرونة أكثر في وضعه كمرجع مفيد وكذلك إثارة الاهتمام في الموضوعات المدرجة به . عند استخدام الكتاب من الممكن تغيير ترتيب كثير من الفصول المتأخرة أو حذف بعض من هذه الفصول بدون صعوبة . وعلى سبيل المثال فإن الفصول من ١٣ إلى ١٧ يمكن تقديمها مباشرة بعد الفصل الخامس إذا كان من المطلوب دراسة الارتباط والانحدار والسلاسل الزمنية والأرقام القياسية قبل نظرية المعاينة . وكذلك فإن أغلبية الفصل السادس يمكن حذفه إذا كان الدارس لا يرغب في تخصيص وقت كبير لدراسة الاحتمالات . وفي مقرر في المستوى الأول فإنه يمكن حذف الفصل الخامس عشر . والمبرر لترتيب الحال للكتاب أن الاتجاه الحديث في الدراسة هو تدريس نظرية المعاينة والاستدلال الإحصائي في بداية المقرر بقدر الإمكان .

إنني أشكر عديداً من الوكالات الخاصة والحكومية لتعاونهم في إمدادي بالبيانات الخاصة بالجدول . وقد ذكر المرجع الخاص بكل جدول في مكانه المناسب خلال الكتاب وعلى وجه الخصوص فإنني مدين إلى الأستاذ « السير » رونالد أ . فيشر (زميل الجمعية الملكية ، كامبردج) . والدكتور فرانك بيتس (زميل الجمعية الملكية ، روشامستود) وكذلك إلى السادة أصحاب شركة أوليفروبويد وأدنبرة لسماحهم باستخدام الجدول رقم (٣) من كتبهم « جداول إحصائية للبحوث البيولوجية والزراعية والطبية » .

كذلك أعبر عن شكري وامتناني إلى العاملين بدار شوم للنشر لروحهم الطيبة وتعاونهم لتحقيق الرغبة الشديدة لمحاولة المؤلف الوصول إلى السكال .

مقدمة الطبعة العربية

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدن بازدهارها أساساً للحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحدياً بأن تطوع لفتحها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذي تخلفت عنه زمناً طويلاً .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيراً إلى الكتب العلمية في مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة في جامعاتنا العربية ما زالت في أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية في تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير في إعداد الأجيال التي نريد لها أن تبني صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع في إصدار الطبعة العربية من سلسلة شوم Schaum Series التي لقيت في طبعها الأصلية نجاحاً لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكن وراء سلسلة ملخصات شوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديداً جيداً ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية . يقدم عرضاً تمهيدياً للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب شوم تصلح ككتب مدرسية ، أو مذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

الفصل الثاني عشر : اختبار كا^٢ (كا - تربيع)

التكرارات المشاهدة والنظرية . تعريف كا^٢ . اختبارات المعنوية . اختبار كا^٢ لجودة التوفيق .
جداول الاقتران . تصحيح بيتس للمتغير المتصل . صيغة مبسطة لحساب كا^٢ . معامل الاقتران . ارتباط
الصفات . خاصية الانجماع في كا^٢ ٣٤٨-٣٢٣

الفصل الثالث عشر : توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى

العلاقة بين المتغيرات . توفيق المنحنيات . معادلة المنحنى التقريبي . طريقة التمهيد باليد في توفيق المنحنى .
الخط المستقيم . طريقة المربعات الصغرى خط المربعات الصغرى . العلاقات غير الخطية . المربعات
الصغرى للقطع المكافئ . تطبيقات على السلاسل الزمنية . مسائل تتضمن أكثر من متغيرين ٣٨٧-٣٤٩

الفصل الرابع عشر : نظرية الارتباط

الارتباط والانحدار . الارتباط الخطي . مقاييس الارتباط . معادلة الانحدار باستخدام المربعات الصغرى .
الخطأ المعياري للتقديرات . الانحراف المفسر والانحراف غير المفسر . معامل الارتباط . ملاحظات
على معامل الارتباط . صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطي . صيغة مختصرة للعمليات الحسابية .
خطوط الانحدار ومعامل الارتباط الخطي . ارتباط الرتب . ارتباط السلاسل الزمنية . ارتباط الصفات .
نظرية المعاينة للارتباط . نظرية المعاينة للانحدار ٤٢٩-٣٨٨

الفصل الخامس عشر : معامل الارتباط الجزئي والمتعدد

الارتباط المتعدد . رمز الدليل . معادلة الانحدار . مستوى الانحدار . المعادلات الاعتدالية لمستوى انحدار
المربعات الصغرى . مستويات الانحدار ومعاملات الارتباط . الخطأ المعياري للتقدير . معامل الارتباط
المتعدد . تبديل المتغير التابع . التعميم في حالة أكثر من ثلاثة متغيرات . الارتباط الجزئي . العلاقة بين
معاملات الارتباط المتعددة والجزئية . معامل الارتباط المتعدد غير الخطي ٤٥١-٤٣٠

الفصل السادس عشر : تحليل السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية . الرسم البياني للسلاسل الزمنية . التحركات المميزة في السلاسل الزمنية . تصنيف
التحركات في السلاسل الزمنية . تحليل السلاسل الزمنية . المتوسطات المتحركة . تمهيد السلاسل الزمنية .
تقدير الاتجاه العام . تقدير التغيرات الموسمية . الدليل الموسمي . تحليل البيانات من تأثير الموسم .
تقدير التغيرات الدورية . تقدير التغيرات الطارئة أو العشوائية . قابلية البيانات للمقارنة . التنبؤ .
تلخيص الخطوات الأساسية في تحليل السلاسل الزمنية ٤٩٦-٤٥٢

الفصل السابع عشر : الأرقام القياسية

الرقم القياسي . تطبيقات الأرقام القياسية . مناسب الأسعار . خواص مناسب الأسعار . مناسب الكمية
أو الحجم . مناسب القيمة . سلسلة المناسب ووصلة المناسب . المشاكل المتعلقة بحساب الأرقام القياسية .
استخدام المتوسطات . الاختبارات النظرية للأرقام القياسية . رموز . الطريقة التجميعية البسيطة . الوسط
البسيط للمناسب . الطريقة التجميعية المرجحة . رقم فيشر المثالي . رقم مارشال . أدجورث القياسي .
الوسط المرجح للمناسب . الأرقام القياسية للكمية أو الحجم . الرقم القياسي للقيمة . تغيير فترة الأساس
للأرقام القياسية . الانكماش في السلاسل الزمنية ٥٣١-٤٩٧

ملحق

٥٣٢	I. إحداثيات المنحنى الطبيعي المياري
٥٣٣	II. المساحة تحت المنحنى الطبيعي المياري من 0 إلى z
٣٣٤	III. المئينات لتوزيع ت - « أستيوذنت »
٥٣٥	IV. المئينات لتوزيع χ^2
٥٣٧-٥٣٦	V. اللوغاريتمات المعتادة لأربع أرقام عشرية
٥٣٨	VI. قيمة λ -ج
٥٣٩	VII. أرقام عشوائية
٥٤٠	VIII. خطوات الحصول على المعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى
٥٥٢-٥٤١	المصطلحات
٥٦٤-٥٥٣	الفهرس الابعلى

الفصل الأول

المتغيرات والأشكال البيانية

الإحصاء :

يختص الإحصاء بالطرق العملية لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل البيانات وكذلك الوصول إلى نتائج مقبولة وقرارات سليمة على ضوء هذا التحليل .

ويستخدم الاصطلاح في معناه الضيق للتعبير عن البيانات نفسها أو الأرقام المستخرجة من هذه البيانات مثل المتوسطات . وعلى هذا نتحدث عن إحصاءات المألة وإحصاءات الحوادث وغيرها .

المجتمع والعينة - الإحصاء الوصفي والاستقرائي :

عند جميع بيانات تخص خاصية من خصائص مجموعة من الأفراد أو الأشياء ، مثل أطوال أو أوزان طلبة جامعيين أو عدد الوحدات المعبية أو غير المعبية في إنتاج مصنع للمسابير في يوم معين ، فإنه قد يكون من المستحيل أو من غير العمل ملاحظة المجموعة بأكملها وخاصة إذا كانت كبيرة . وبدلاً من اختبار المجموعة كلها ، والتي تسمى بالمجتمع الإحصائي أو المجموعة الكلية فإنه يمكن اختبار جزء صغير من المجموعة يسمى بالعينة .

والمجتمع يمكن أن يكون محدوداً أو غير محدود . وعلى سبيل المثال فإن المجتمع المكون من إنتاج مصنع لإنتاج المسابير في يوم معين هو مجتمع محدود ، بينما المجتمع المكون من جميع النتائج الممكنة (صورة ، كتابة) في قذفات متتالية للعملة هو مجتمع غير محدود .

وإذا كانت العينة ممثلة للمجتمع فإنه يمكن الحصول على نتائج مهمة عن المجتمع بتحليل بيانات هذه العينة . وفرع الإحصاء الذي يهتم بالشروط التي يجب نوافرها حتى يكون هذا الاستدلال سليماً يسمى بالإحصاء الاستقرائي أو الاستدلال الإحصائي .

وبما أن هذا النوع من الاستدلال لا يمكن أن يكون مؤكداً فإن لغة الاحتمال تستخدم عند عرض النتائج .

أما فرع الإحصاء الذي يهدف فقط إلى وصف وتحليل مجموعة معينة وذلك دون الوصول إلى نتائج أو استدلال خاصة بالمجموعات الأكبر حجماً فإنه يسمى بالإحصاء الوصفي أو الإحصاء الاستنتاجي .

قبل المضي في استكمال دراسة الإحصاء فإننا ستقوم بمراجعة بعض المفاهيم الرياضية المهمة .

المتغيرات المتقطعة والمتصلة :

المتغير هو رمز مثل X, Y, H, x, B والذي يمكن أن يأخذ أى قيمة سبق تحديدها تسمى مجال هذا المتغير . إذا كان متغير لا يأخذ سوى قيمة وحيدة فإنه يسمى ثابتاً .

المتغير الذى يمكن أن يأخذ أى قيمة بين قيمتين معينتين فيسمى متغيراً متصلاً ، خلاف ذلك يسمى متغيراً متقطعاً .

مثال ١ — الرقم N لعدد الأطفال في عائلة والذي يأخذ فقط القيم $0, 1, 2, 3, \dots$ ولا يمكن أن يأخذ القيم 2.5 أو 3.842 ، هو متغير متقطع .

مثال ٢ — العمر A لشخص من الممكن أن يكون 62 سنة ، 63.8 سنة أو 65.8341 سنة وذلك حسب درجة الدقة في القياس ، هو متغير متصل .

البيانات التى يمكن التعبير عنها بمتغير متقطع أو متصل تسمى بيانات متقطعة أو بيانات متصلة على التوالي . ومثال للبيانات المتقطعة عدد الأطفال في 1000 أسرة بينما أطوال 100 طالب جامعي يمكن اعتبارها كثال على البيانات المتصلة . وبوجه عام فإن القياسات ينشأ عنها بيانات متصلة بينما العد أو الترقيم ينشأ عنها بيانات متقطعة .

قد يكون من المفيد أحياناً أن يمتد مفهوم المتغير إلى خصائص غير رقمية . فعلى سبيل المثال فإن اللون C في قوس قزح يمكن أن يأخذ « القيم » أحمر ، برتقالى ، أصفر ، أخضر ، أزرق ، نيل ، بنفسجى . وبشكل عام يمكن التعبير عن اللون الأحمر بالرقم ١ ، البرتقالى بالرقم ٢ ، وهكذا .

تقريب البيانات :

تقريب رقم مثل 72.8 إلى أقرب رقم عشرى هو 73 حيث أن 72.8 أقرب إلى 73 منها إلى 72 . كذلك فإن تقريب الرقم 72.8146 إلى أقرب رقم مئوى أو إلى رقين عشريين هو 72.81 حيث أن 72.8146 أقرب إلى 72.81 منها إلى 72.82 .

في تقريب رقم مثل 72.465 إلى أقرب رقم مئوى تصادفنا صعوبة حيث أن الرقم 72.465 في نفس درجة البعد عن الرقين 72.46 ، 72.47 وقد اصطلح من الناحية العملية أن يتم في هذه الحالات التقريب إلى الرقم الزوجى السابق على 5 . مثال ذلك 72.465 تقرب إلى 72.46 ، 183.575 تقرب إلى 183.58 ، $116\ 500\ 000$ يقرب إلى أقرب مليون إلى $116\ 000\ 000$ وهذا الحل العملى يفيد على وجه الخصوص في تصنيف الأخطاء المتراكمة للتقريب إذا أجرى عدد كبير من العمليات (أنظر المسألة ١ - ٤)

الرموز العلمية :

عند كتابة أى رقم وخاصة إذا كان متضمناً عدداً كبيراً من الأصفار قبل أو بعد العلامة العشرية ، فإنه من المفيد استخدام الرمز العلمى للأساس 10 .

مثال ١ - $10^1 = 10$, $10^2 = 10 \times 10 = 100$, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$, $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$, $10^5 = 100000$, $10^6 = 1000000$

مثال ٢ - $10^0 = 1$, $10^{-1} = 0.1$, $10^{-2} = 0.01$, $10^{-3} = 0.0001$

مثال ٣ - $864000000 = 8.64 \times 10^8$, $0.00003416 = 3.416 \times 10^{-5}$

لاحظ أن ضرب رقم بـ 10^8 ، مثلاً يؤدي إلى تحريك العلامة العشرية 8 أماكن إلى اليمين . كما أن ضرب رقم بـ 10^{-6} يؤدي إلى تحريك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار

من المعتاد أن تستخدم الأقواس أو النقط للتمييز عن ضرب رقمين أو أكثر . مثلاً

$$5 \times 3 = 15, (10)(10) = 10.10.10 = 10 \times 10 \times 10 = 1000.$$

إذا استخدمت الحروف للدلالة على أرقام فإنه من المعتاد حذف الأقواس أو النقط . على سبيل المثال .

$$ab = (a)(b) = a.b = a \times b.$$

وتعد الرموز العملية مفيدة في الحساب وخاصة في تحديد مكان العلامة العشرية . وتستخدم في ذلك القاعدة .

$$(10^p)(10^q) = 10^{p+q}, \quad \frac{10^p}{10^q} = 10^{p-q}$$

حيث p ، q أى رقم .

في الرقم 10^p ، p تسمى الأس و 10 الأساس .

$$\frac{(10^3)(10^2)}{10^4} = \frac{1000 \times 100}{10000} = 10000 = 10^4 \text{ (i.e. } 10^{3+2}\text{)},$$

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{1000000}{10000} = 100 = 10^2 \text{ (i.e. } 10^{6-4}\text{)}$$

مثال ١ -

$$\frac{(4000000)(0.0000000002)}{8 \times 10^{-4}} = \frac{(4 \times 10^6)(2 \times 10^{-10})}{8 \times 10^{-4}} = \frac{(4)(2)(10^6)(10^{-10})}{8 \times 10^{-4}} = 8 \times 10^{-6-10}$$

مثال ٢ -

$$\frac{(0.006)(80000)}{0.04} = \frac{(6 \times 10^{-3})(8 \times 10^4)}{4 \times 10^{-2}} = \frac{48 \times 10^1}{4 \times 10^{-2}} = \left(\frac{48}{4}\right) \times 10^{1-(-2)}$$

$$= 12 \times 10^3 = 12000$$

مثال ٣ -

الأرقام المعنوية :

إذا كانت دقة تسجيل وزن شيء هو في الصورة 65.4 kg فهذا يعنى أن الوزن الحقيقي بين 65.35 kg و 65.45 kg والأرقام البقية التي تحتاج إليها لتحديد العلامة العشرية ، بالإضافة إلى الأصفار اللازمة لتحديد العلامة العشرية ، تسمى الأرقام المعنوية للرقم .

مثال ١ - الرقم 65.4 له 3 أرقام معنوية

مثال ٢ - الرقم 4.5300 له 5 أرقام معنوية

مثال ٣ - الرقم $0.0018 = 1.8 \times 10^{-3}$ له 2 أرقام معنوية

مثال ٤ - الرقم $0.001800 = 1.800 \times 10^{-3}$ له 4 أرقام معنوية

الأرقام التي ترتبط بعملية التعداد أو الترقيم ، يعكس القياسات ، بطبيعتها أرقام صحيحة وهذا يكون لها عدد غير محدود من الأرقام المعنوية . في مثل هذه الحالات قد يكون من الصعب تحديد الأرقام المعنوية بدون وجود معلومات إضافية . مثال ذلك الرقم 186 000 000 من الممكن أن يكون له 9 ، 4 ، 3 أرقام معنوية . فإذا كان من المعروف أن له 5 أرقام معنوية فإنه من الأنفل أن يسجل 186.00 مليون أو 1.8600×10^8 .

العمليات الحسابية :

عند إجراء عمليات الحساب المتضمنة عمليات الضرب ، القسمة والحصول على جذور الأرقام فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بأكثر من الأرقام المعنوية بالرقم الذي به أقل رقم معنوى (أنظر المسألة ١ - ٩)

أمثلة :

$$1. 73.24 \times 4.52 = (73.24)(4.52) = 331$$

$$3. \sqrt{38.7} = 6.22$$

$$2. 1.648/0.023 = 72$$

$$4. (8.416)(50) = 420.8, \text{ if } 50 \text{ is exact.}$$

عند إجراء عمليات الجمع والطرح فإن النتيجة النهائية لن تحتوى على أرقام معنوية بعد العلامة العشرية بأكثر من الأرقام التي تحتوى على أقل رقم معنوى بعد العلامة العشرية (أنظر المسألة ١ - ١٠) .

$$1. 3.16 + 2.7 = 5.9 \quad 2. 83.42 - 72 = 11 \quad 3. 47.816 - 25 = 22.816, \text{ if } 25 \text{ is exact.} \quad \text{أمثلة :}$$

القاعدة السابقة في الجمع والطرح يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١ - ١١)

الدوال :

إذا كان لكل قيمة من قيم المتغير X قيمة أو أكثر تقابلها للمتغير Y فإنه يذكر أن Y دالة في X وتكتب $Y=F(X)$ (وتقرأ Y تساوى دالة F في X) وذلك للتعبير عن هذا الاعتماد الدالى . ويمكن أن تستخدم حروف أخرى بدلا من F مثل G, ϕ, \dots وهكذا .

ويسمى المتغير X بالمتغير المستقل والمتغير Y بالمتغير التابع

إذا كان لكل قيمة من قيم X قيمة وحيدة للمتغير Y فإن Y تسمى بدالة وحيدة القيمة في X وخلاف ذلك تسمى بدالة متعددة القيم في X .

مثال ١ — العدد السكلى P لسكان الجزر البريطانية يعد دالة في الزمن t ، وتكتب $P = F(t)$.

مثال ٢ — الاستطالة S لزنبرك في وضع رأسى يعد دالة في الوزن W المعلق في نهاية الزنبرك . وبالرموز ، $S = G(W)$.

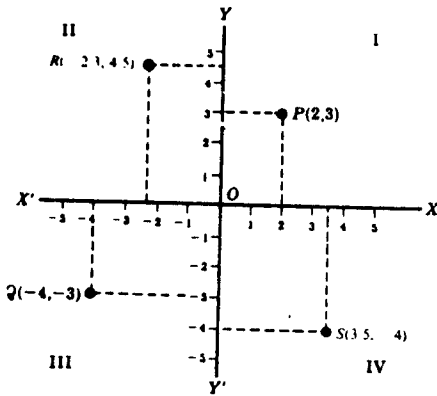
ويمكن تمثيل الاعتماد الدالى أو المقابلة بين المتغيرات على صورة جدول . كذلك يمكن التعبير عنها على صورة معادلة تربط بين المتغيرات مثال $Y = 2X - 3$ ومنها يمكن تحديد قيمة Y المقابلة للقيم المختلفة للمتغير X .

إذا كانت $Y = F(X)$ فإنه من المعتاد كتابة $F(3)$ مثلاً للتعبير عن « قيمة Y عندما تكون $X = 3$ » ، $F(10)$ تعبر عن « قيمة Y عندما تكون $X = 10$ » وهكذا . على سبيل المثال إذا كانت $Y = F(X) = X^2$ فإن $F(3) = 3^2 = 9$ هي قيمة المتغير Y عندما تكون $X = 3$.

مفهوم الدالة يمكن تعميمه ليشمل حالة متغيرين أو أكثر (أنظر المسألة ١ - ١٧) .

الاحداثيات المتعامدة :

إذا أخذنا في الاعتبار الخطان المتعامدان على بعضهما $X'OX$ و $Y'OY$ سميها المحاور x و y (أنظر الشكل ١ - ١) حيث يوضح المقاييس المناسبة . هذان الخطان يقسمان المستوى المحدد بهما والمسما بالمستوى xy إلى أربع مناطق مبر عنها بالأرقام I, II, III, IV وهذه تسمى بالربع الاول ، الربع الثانى ، الربع الثالث والربع الرابع على التوالى .



شكل ١ - ١

تسمى النقطة O بنقطة الأصل أو نقطة الصفر . إذا كانت هناك نقطة P وأسقطنا خطوطاً عمودية على المحورين x و y من النقطة P فإن قيمة x و y عند هذه النقطة التى تتقابل فيها الخطوط العمودية المسقطه مع هذه المحاور تسمى بالاحداثيات المتعامدة أو بشكل أبسط بإحداثيات النقطة P ويعبر عنها بالنقطة (x, y) ويسمى الاحداثى x أحياناً بالاحداثى السينى والاحداثى y بالاحداثى الصادى . فى الشكل (١-١) الاحداثى السينى للنقطة P هو 2 والاحداثى الصادى لها هو 3 . واحداثيات النقطة P هو $(2, 3)$.

وعلى العكس مما سبق فإذا أعطينا إحداثيات نقطة فإنه يمكن تعيين موضع هذه النقطة . على هذا فإن النقطة ذات الاحداثيات $(-4, -3)$ ، $(-2.3, 4.5)$ وكذلك $(3.5, -4)$ ممثلة بالحروف S, R, Q على التوالى بالشكل . ومن الممكن برسم المحور z يمر بالنقطة O وعمودى على المستوى xy تسمى الفكرة السابقة . وفى هذه الحالة فإن إحداثيات النقطة P يمكن التعبير عنها بالصورة (x, y, z) .

الأشكال البيانية :

الشكل البيانى هو تعبير تصويرى للعلاقة بين المتغيرات . وتستخدم فى الإحصاء أنواع عديدة من الأشكال وذلك حسب طبيعة البيانات موضع الدراسة والهدف المرجو منه من الشكل . من بين هذه الأشكال الأعمدة البيانية ، الرسوم الدائرية والرسوم التصويرية ، وغير ذلك . وهذه الأشكال يشار إليها أحياناً بالخرائط أو الأشكال التوضيحية . وعلى هذا نتحدث عن خرائط الأعمدة البيانية وخرائط الرسوم الدائرية (أنظر المسائل أرقام ١ - ٢٣ ، ١ - ٢٤ ، ١ - ٢٦ ، وكذلك ١ - ٢٧) .

المعادلات :

المعادلة هي تعبير على الصورة $A = B$ حيث تسمى A بالعنصر أو الجانب الأيسر للمعادلة و B بالعنصر أو الجانب الأيمن لها إذا أجرينا على طرفي المعادلة نفس العمليات فإننا نحصل على معادلة مكافئة . وهذا فإذا جمعنا أو طرحنا أو ضربنا كلا من طرفي المعادلة مستخدمين نفس المقدار فإننا نحصل على معادلة مكافئة والاستثناء الوحيد هو القسمة على الصفر فهي غير مسموح بها .

مثال : اعتبر المعادلة $2X + 3 = 9$.

إطرح 3 من الطرفين $2X = 6$ أو $2X + 3 - 3 = 9 - 3$.

اقسم الطرفين على 2 : $X = 3$ أو $2X/2 = 6/2$.

هذه القيمة لـ X تمد حلا للمعادلة المطاة وهذا يمكن إثباته إذا عوضنا عن X بالقيمة 3 فإننا سنحصل على $9 = 3 + 2(3)$ أى $9 = 9$ وهذه متساوية . وتسمى عملية الحصول على حلول لمعادلة بحل المعادلة .

والفكرة السابقة يمكن استخدامها للحصول على حلول معادلتين في مجهولين أو ثلاث معادلات في ثلاثة مجاهيل وهكذا . هذه المعادلات تسمى بالمعادلات الآتية .

المتباينات :

الرمزان $<$ ، $>$ يعنيان « أقل من » و « أكبر من » على التوالي . والرموز \leq ، \geq يعنيان « أقل من أو يساوى » و « أكبر من أو يساوى » على التوالي . وهذه الرموز تعرف برموز المتباينات .

مثال ١ - $3 < 5$ تقرأ « 3 أقل من 5 »

مثال ٢ - $5 > 3$ تقرأ « 5 أكبر من 3 »

مثال ٣ - $X < 8$ تقرأ « X أقل من 8 »

مثال ٤ - $X \geq 10$ تقرأ « X أكبر من أو تساوى 10 »

مثال ٥ - $4 < Y \leq 6$ تقرأ « 4 أقل من Y والى بنورها أقل من أو تساوى 6 » أو « تقع Y بين 4 و 6 بحيث أن 4 نفسها غير متضمنة بينما 6 نفسها متضمنة في الفترة أو « Y أكثر من 4 وأقل من أو تساوى 6 »

تسمى العلاقات التي تتضمن رموز المتباينة بالمتباينات . وكما كنا نتحدث عن عناصر المعادلة فإنه يمكن الحديث عن عناصر لمتباينة . فالمتباينة

$$4 < Y \leq 6 \text{ عناصرها هي } 4, Y, 6 .$$

المتباينة الصحيحة تستمر صحيحة :

(أ) إذا طرح نفس الرقم من أو أضيف إلى كل من عناصر المتباينة

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $15 + 3 > 12 + 3$ أى $18 > 15$ وكذلك $15 - 3 > 12 - 3$ أى $12 > 9$.

(ب) إذا ضرب كل عنصر في أو قسم على نفس الرقم الموجب .

أمثلة بما أن $15 > 12$ فإن $(15)(3) > (12)(3)$ أى $(45 > 36)$ وكذلك $\frac{15}{3} > \frac{12}{3}$ أى $(5 > 4)$

(ج) إذا ضرب كل عنصر في أو قسم على نفس الرقم السالب على أن يقلب اتجاه المتباينة .

أمثلة : بما أن $15 > 12$ فإن $(15)(-3) < (12)(-3)$ أى $(-45 < -36)$ كذلك $\frac{15}{-3} < \frac{12}{-3}$ أى $(-5 < -4)$

اللوغاريتمات :

أى رقم موجب N يمكن التعبير عنه كقوى للرقم 10 أى أنه من الممكن الحصول على الرقم p بحيث $N = 10^p$ و تسمى p لوغاريتم N للأساس 10 أو اللوغاريتم المعتاد للرقم N وتكتب $p = \log N$ أو $p = \log_{10} N$ على سبيل المثال فإن الرقم $1000 = 10^3$ وهذا فإن $\log 1000 = 3$ كذلك فبما أن $0.01 = 10^{-2}$ فإن $\log 0.01 = -2$

إذا كان الرقم N رقماً يقع بين 1 و 10 أى 10^0 و 10^1 فإن $p = \log N$ تقع بين الصفر والواحد ومن الممكن الحصول عليها من جداول اللوغاريتمات فى الملحق صفحة ٥٣٦ .

مثال ١ — للحصول على $\log 2.36$ نبدأ بالبحث فى أسفل العمود المعنون N إلى أن نصل إلى الرقمين 23

ثم نتحرك إلى اليمين فى اتجاه العمود المعنون 6 . سنجد أن التقاطع هو 3729 . وهذا يكون

$$\log 2.36 = 0.3729 \text{ أى } 2.36 = 10^{0.3729}$$

لوغاريتم أى عدد موجب يمكن الحصول عليه من لوغاريتمات الأرقام من 1 إلى 10 .

مثال ٢ — من المثال (١) ، $2.36 = 10^{0.3729}$ إذا ضربنا الأطراف على التوالى بالرقم 10

$$23.6 = 10^{1.3729}, 236 = 10^{2.3729}, 2360 = 10^{3.3729}, \dots$$

أى

$$\log 2.36 = 0.3729, \log 23.6 = 1.3729, \log 236 = 2.3729, \log 2360 = 3.3729.$$

مثال ٣ - بما أن $10^{0.3729} = 2.36$ فإن القسمة المتكررة على الرقم 10 ، نجد

$$0.236 = 10^{0.3729-1} \quad 10^{-0.6271}, 0.0236 = 10^{0.3729-2} \quad 10^{-1.6271}, \dots$$

ومن المتباد أن نكتب 1 — 0.3729 على صورة 10 — 9.3729 أو 1.3729
وكذلك 2 — 0.3729 نكتب 10 — 8.3729 على صورة 2.3729 وهكذا باستخدام هذه
الرموز نجد .

$$\begin{aligned} \log 0.236 &= 9.3729 - 10 = \bar{1}.3729 \dots 0.6271 \\ \log 0.0236 &= 8.3729 - 10 = \bar{2}.3729 = -1.6271, \text{ etc.} \end{aligned}$$

ويسمى الجزء العشري 0.3729 في كل هذه اللوغاريتمات بالجزء العشري . أما الجزء الباقي قبل العلامة العشرية للجزء العشري
مثل 1, 2, 3 وكذلك $\bar{1}, \bar{2}$ أو 10 — 8, 10 — 9 يسمى بالعدد البياني .

القواعد التالية من السهل إثباتها :

١ - العدد البياني في لوغاريتم أى عدد أكبر من الواحد الصحيح يكون موجباً ويساوى عدد الأرقام الصحيحة في العدد الأصلي
ناقصاً واحداً .

هذا يكون العدد البياني في لوغاريتم 2.36, 23.6, 236, 2360 هو 0, 1, 2, 3 وتكون لوغاريتماتها
0.3729, 1.3729, 2.3729, 3.3729 .

٢ - العدد البياني في لوغاريتم أى عدد أصغر من الواحد الصحيح يكون سالباً ويساوى عدد الأصفار التي تلي العلامة العشرية مباشرة
مضافاً إليها واحداً . هذا يكون العدد البياني في لوغاريتم 0.236, 0.0236, 0.00236 هو 3 — 2, — 1, —
وتكون لوغاريتماتها 3.3729, 2.3729, 1.3729 على التوالي .

أما إذا كان لوغاريتم عدد ذا أربعة أرقام مثل 758.2, 2.364, فإنه يمكن الحصول عليها بالاستكمال (أنظر المسألة
١ - ٣٦) .

الأعداد المقابلة للوغاريتمات :

يمكن كتابة الرقم 2.36 في الشكل الأسى على صورة $10^{0.3729} = 2.36$ ويسمى الرقم 2.36 بالعدد المقابل
للوغاريتم 0.3729 أو $\text{antilog } 0.3729$ أى أنه الرقم الذى لوغاريتمه 0.3729 ويترتب على ذلك ما يلى :

$$\text{antilog } 1.3729 = 23.6, \text{ antilog } 2.3729 = 236, \text{ antilog } 3.3729 = 2360, \dots$$

$$\text{antilog } 9.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{1}.3729 = 0.236,$$

$$\text{antilog } 8.3729 - 10 = \text{antilog } \bar{2}.3729 = 0.0236, \dots$$

ويمكن الحصول على الأعداد المقابلة للوغاريتم أى رقم بالرجوع إلى الجدول في الملحق .

مثال : الحصول على العدد المقابل للوغاريتم $10 - 8.6284$ فإننا نبحث عن الجزء العشري 0.6284 في صلب الجدول . حيث نجد عند تقاطع الصف المعنون 42 والعمود 5 فإن الرقم المطلوب هو 425 . وبما أن العدد البياني هو $10 - 8$ فإن الرقم هو 0.0425 .

وبنفس الطريقة فإن $4250. \text{antilog } 5.6284 = 425000$ $\text{antilog } 3.6284$

أما إذا كان الجزء العشري غير موجود بالجدول فإنه يمكن الحصول على العدد بالاستكمال (أنظر المسألة رقم ١ - ٣٧)

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

$$\log MN = \log M + \log N$$

$$\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

$$\log M^p = p \log M$$

وباستخدام هذه النتائج معاً فإننا نجد على سبيل المثال

$$\log \frac{A^p B^q C^r}{D^s E^t} = p \log A + q \log B + r \log C - s \log D - t \log E$$

أنظر المسائل من ١ - ٣٨ إلى ١ - ٤٥

مسائل محلولة

المتغيرات :

١ - ١ حدد أيّاً من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأيّاً منها تمثل بيانات متصلة

- | | |
|--|---------------|
| (أ) عدد الأسهم المباعة في سوق الأوراق المالية | الحل : متقطعة |
| (ب) درجات الحرارة المسجلة كل نصف ساعة في مكتب الأرصاد الجوية | الحل : متصلة |
| (ج) أعمار لمبات التليفزيون المنتجة في شركة ما | الحل : متصلة |
| (د) الدخول السنوية لأساتذة كلية | الحل : متقطعة |
| (هـ) أطوال 1000 مسبار من انتاج مصنع | الحل : متصلة |

١ - ٢ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أيّاً من هذه المتغيرات متصل وأيّاً منها متقطع .

(أ) الرقم V لعدد ليترات الماء في ماكينة غسيل .

المجال : أي رقم يبدأ من الصفر إلى طاقة الماكينة .

المتغير متصل .

(ب) عدد الكتب B الموضوع على رف في إحدى المكتبات .

المجال : $0, 1, 2, 3, \dots$ إلى أكبر عدد من الكتب يمكن أن تناسب الرف .

المتغير متقطع .

(ج) المجموع S لعدد النقاط التي نحصل عليها من رمية زهرتي طاولة

المجال : الأرقام الممكن الحصول عليها من رمية واحدة لزهرتي طاولة هي $1, 2, 3, 4, 5, 6$. وهذا يكون

مجموع النقاط في رمية زهرتين هو $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ وهذا هو مجال S .

المتغير متقطع

(د) القطر d لكرة

المجال : إذا اعتبرنا أن النقطة هي كرة قطرها صفر فإن المجال d هو جميع القيم ابتداء من الصفر .

المتغير متصل

(هـ) الدولة C في أوروبا .

المجال : إنجلترا ، فرنسا ، ألمانيا . . . وهكذا . ويمكن تمثيلها رقياً $1, 2, 3, \dots$ وهكذا

المتغير متقطع

تقريب البيانات :

١ - ٣ قرب الأرقام التالية إلى درجة اللقمة المشار إليها

(أ) 48.6 أقرب وحدة 49 (و) 143.95 أقرب نسبة من العشرة 144.0

(ب) 136.5 أقرب وحدة 136 (ز) 368 أقرب نسبة من المائة 400

(ج) 2.484 أقرب نسبة من مئة 2.48 (ح) 24448 أقرب نسبة من ألف 24000

(د) 0.0435 أقرب نسبة ألف 0.044 (ط) 5.56500 أقرب نسبة من المائة 5.56

(هـ) 4.50001 أقرب وحدة 5 (ي) 5.56501 أقرب نسبة من المائة 5.57

١ - ٤ أجمع الأرقام 4.35, 8.65, 2.95, 12.45, 6.65, 7.55, 9.75

(أ) مباشرة

(ب) بالتقريب إلى أقرب نسبة من العشرة حسب طريقة « الرقم الزوجي »

(ج) بالتقريب بحيث يزيد الرقم السابق على الـ 5

الحل .

(أ)	(ب)	(ج)
4.35	4.4	4.4
8.65	8.6	8.7
2.95	3.0	3.0
12.45	12.4	12.5
6.65	6.6	6.7
7.55	7.6	7.6
9.75	9.8	9.8
المجموع 52.35	المجموع 52.4	المجموع 52.7

لاحظ أن الطريقة (ب) أحسن من الطريقة (ج) حيث أنها تؤدي إلى تناقص أخطاء التقريب المتراكمة ب.

الرموز العلمية والارقام المعنوية :

١ - ٥ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى العدد 10 .

- (أ) 4.823×10^7 . حرك العلامة العشرية 7 أماكن إلى اليمين فيكون الناتج 48230000
 (ب) 8.4×10^{-6} حرك العلامة العشرية 6 أماكن إلى اليسار فيكون الناتج 0.000 008 4
 (ج) $3.80 \times 10^{-4} = 0.000\ 380$ (هـ) $300 \times 10^8 = 30\ 000\ 000\ 000$
 (د) $1.86 \times 10^5 = 186\ 000$ (و) $70\ 000 \times 10^{-10} = 0.000\ 007\ 000\ 0$

١ - ٦ ما هو عدد الأرقام المعنوية في الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام مسجلة بدقة ؟

- (أ) 149.8 mm أربعة (د) 0.002 80 m ثلاثة (ز) 9 منازل غير محدود
 (ب) 149.80 mm خمسة (هـ) 1.002 80 m ستة (ح) 4.0×10^3 g إثنان
 (ج) 0.0028 m إثنان (و) 9 g واحد (ط) $7.584\ 00 \times 10^{-5}$ N ستة

١ - ٧ ما هو الحد الأقصى للخطأ في القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم في كل حالة .

- (أ) 73.854 mm من الممكن أن تكون القياسات في المدى من 73.8535 mm إلى 73.8545 mm وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ 0.0005 mm يحتوى الرقم على خمسة أرقام معنوية .
 (ب) $0.09800\ m^3$ رقم الـ m^3 من الممكن أن يكون أى رقم من 0.097 995 إلى 0.098 005 وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ $0.000\ 005\ m^3$ يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .
 (ج) $3.867 \times 10^8\ km$. الرقم الحقيقى بالكيلومترات أكبر من 3.8665×10^8 ولكنه أقل من 3.8675×10^8 .

وبهذا يكون الحد الأقصى للخطأ هو $0.0005 \times 10^8\ km$. يحتوى الرقم على أربعة أرقام معنوية .

١ - ٨ أكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العملية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

$$\begin{array}{ll} 7\,300\,000\,000 \text{ (five sig. fig.)} = 7.3000 \times 10^9 & \text{(ج)} \quad 24\,380\,000 \text{ (four sig. fig.)} = 2.438 \times 10^7 \quad \text{(أ)} \\ 0.000\,184\,00 = 1.8400 \times 10^{-4} & \text{(د)} \quad 0.000\,009\,851 = 9.851 \times 10^{-6} \quad \text{(ب)} \end{array}$$

العمليات الحسابية :

١ - ٩ وضع أنه في حاصل ضرب الرقم 5.74 في 3.8 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي ثلاثة وإثنان على التوالي لا يمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من رقمين معنويين .

الطريقة الأولى :

$5.74 \times 3.8 = 21.812$ ولكن ليس كل ناتج الضرب معنوياً . ولتحديد عدد الأرقام المعنوية فنلاحظ أن الرقم 5.74 يمكن أن يكون أى رقم بين 5.745 ، 5.735 بينما الرقم 3.8 يمكن أن يكون أى رقم بين 3.75 ، 3.85 ، وهذا يكون أصغر قيمة ممكنة لحاصل الضرب هو $5.735 \times 3.75 = 21.50625$ وتكون أكبر قيمة ممكنة هي $5.745 \times 3.85 = 22.118\,25$.

وبما أن المدى الممكن للقيم هو من 21.506 إلى 22.118 فإنه من الواضح أن الأرقام المعنوية لن تزيد من الأرقام الخمسة الأولى ، وتكتب النتيجة 22 . لاحظ أن الرقم 22 يمثل أى رقم بين 21.5 ، 22.5 .

الطريقة الثانية :

اعتبر في الصورة التالية أن الأرقام المائلة مشكوك في صحتها ، وهذا يجب حاصل الضرب كالاتي :

$$\begin{array}{r} 5.74 \\ 3.8 \\ \hline 4592 \\ 1722 \\ \hline 21.812 \end{array}$$

يجب أن لا تحتفظ بأكثر من رقم واحد مشكوك فيه في النتيجة وهذا يكون الرقم 22 إلى رقمين معنويين .

لاحظ أنه من الضروري الاحتفاظ بعدد أكبر من الأرقام المعنوية أكبر مما هو في آخر حد دقيق . لاحظ أنه لو قمنا بتقريب الرقم 5.74 إلى 5.7 فإن حاصل ضرب $5.7 \times 3.8 = 21.66 = 22$ إلى رقمين معنويين ، كما في النتيجة السابقة . عند إجراء الحسابات بدون استخدام آلة حاسبة فإنه يمكن التقليل من العمل بعدم الاحتفاظ بأكثر من رقمين معنويين بعد آخر معامل دقيق وتقرب النتيجة النهائية إلى أقرب رقم معنوى .

١ - ١٠ أجمع الأعداد 4.193 55, 15.28, 5.9561, 12.3, 8.472 مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية
الحل :

في (أ) الرقم المشكوك فيه في عمليات الجمع مكتوب بخط مائل . النتيجة النهائية والتي لا تتضمن أكثر من رقم واحد مشكوك فيه هي 46.2

	(ب)	4.193 55 (أ)
	15.28	15.28
	5.96	5.956 1
بعض العمل يمكن تقليله لو اتبعنا الطريقة (ب) حيث احتفظنا	12.3	12.3
برقم معنوي عشرى واحد أكثر من الرقم الأقل دقة. والنتيجة النهائية ،	8.47	8.472
	46.20	46.201 65
مقربة إلى 46.2 تتفق مع النتيجة في (أ) .		

١١ - ١١ أجمع 1372410 — 12 684 000 + 475 000 000 إذا كانت هذه الأعداد تحتوي على 3, 5, 7 أرقام معنوية على التوالي

الحل :

في عمليات الجمع في (أ) جميع الأرقام احتفظ بها ثم قربت النتيجة . في (ب) استخدمت طريقة مشابهة لمسا استخدمناه في الحل ١ - ١٠ (ب) . في كلتا الحالتين فإن الأرقام المشكوك فيها مكتوبة بخط مائل .

475 000 000	487 700 000	(ب)	475 000 000	487 684 000	(أ)
+ 12 700 000	= 1 400 000		+ 12 684 000	= 1 372 410	
487 700 000	486 300 000		487 684 000	486 311 590	

وتقرب النتيجة النهائية إلى 486 000 000 وقد يكون من الأفضل لبيان أن هناك 3 أرقام معنوية أن تكتب على صورة 486 مليون أو 4.86×10^8 .

١٢ - ١٢ أجر العمليات الموضحة فيما يلي :

$$8.35/98 = 0.085 \quad (ب) \quad 48.0 \times 943 = (48.0)(943) = 45300 \quad (أ)$$

$$(28)(4193)(182) \quad (2.8 \times 10^1)(4.193 \times 10^3)(1.82 \times 10^2) \quad (ج) \quad (2.8)(4.193)(1.82) \times 10^{1+3+2} \quad 21 \times 10^6 \quad 2.1 \times 10^7$$

وهذه يمكن كتابتها 21 مليون لبيان أن هناك رقمين معنويين

$$\begin{aligned} \frac{(526.7)(0.001280)}{0.000034921} &= \frac{(5.267 \times 10^2)(1.280 \times 10^{-3})}{3.4921 \times 10^{-5}} = \frac{(5.267)(1.280)}{3.4921} \times \frac{(10^2)(10^{-3})}{10^{-5}} \quad (د) \\ &= 1.931 \times \frac{10^{2-3}}{10^{-5}} = 1.931 \times \frac{10^{-1}}{10^{-5}} \\ &= 1.931 \times 10^{-1+5} = 1.931 \times 10^4 \end{aligned}$$

وهذه يمكن كتابتها 19.31 ألف لبيان أن هناك أربعة أرقام معنوية

$$\begin{aligned} \frac{(1.47562 - 1.47322)(4895.36)}{0.000159180} &= \frac{(0.00240)(4895.36)}{0.000159180} = \frac{(2.40 \times 10^{-3})(4.89536 \times 10^3)}{1.59180 \times 10^{-4}} \quad (هـ) \\ &= \frac{(2.40)(4.89536)}{1.59180} \times \frac{(10^{-3})(10^3)}{10^{-4}} = 7.38 \times \frac{10^0}{10^{-4}} = 7.38 \times 10^4 \end{aligned}$$

هذه أيضاً يمكن كتابتها 73.8 ألف لإظهار الأرقام الثلاثة معنوية بالعدد

$$\frac{(4.38)^2}{5} + \frac{(5.482)^2}{6} = 3.84 + 5.009 = 8.85 \quad ، \quad 5 \text{ أرقاماً دقيقة} \quad (و)$$

$$\sqrt{128.5 - 89.24} \quad \sqrt{39.3 - 6.27} \quad (ح) \quad 3.1416 \sqrt{71.35} = (3.1416)(8.447) = 26.54 \quad (ز)$$

١٣-١ احسب قيمة كل مما يلي إذا كانت $X = 3, Y = -5, A = 4, B = -7$ حيث كل الأرقام يفترض فيها أنها دقيقة .

$$2X - 3Y = 2(3) - 3(-5) = 6 + 15 = 21 \quad (أ)$$

$$4Y - 8X + 28 = 4(-5) - 8(3) + 28 = -20 - 24 + 28 = -16 \quad (ب)$$

$$\frac{AX + BY}{BX - AY} = \frac{(4)(3) + (-7)(-5)}{(-7)(3) - (4)(-5)} = \frac{12 + 35}{-21 + 20} = \frac{47}{-1} = -47 \quad (ج)$$

$$X^2 - 3XY - 2Y^2 = (3)^2 - 3(3)(-5) - 2(-5)^2 = 9 + 45 - 50 = 4 \quad (د)$$

$$\begin{aligned} 2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) &= 2[(3) + 3(-5)] - 4[3(3) - 2(-5)] \\ &= 2[3 - 15] - 4[9 + 10] = 2(-12) - 4(19) \quad (هـ) \\ &= -24 - 76 = -100 \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} 2(X + 3Y) - 4(3X - 2Y) &= 2X + 6Y - 12X + 8Y = -10X + 14Y = -10(3) + 14(-5) \\ &= -30 - 70 = -100 \quad (و) \end{aligned}$$

$$\frac{X^2 - Y^2}{A^2 - B^2 + 1} = \frac{(3)^2 - (-5)^2}{(4)^2 - (-7)^2 + 1} = \frac{9 - 25}{16 - 49 + 1} = \frac{-16}{-32} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (ز)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2X^2 - Y^2 - 3A^2 + 4B^2 + 3} &= \sqrt{2(3)^2 - (-5)^2 - 3(4)^2 + 4(-7)^2 + 3} \\ &= \sqrt{18 - 25 - 48 + 196 + 3} = \sqrt{144} = 12 \quad (ح) \\ \sqrt{\frac{6A^2}{X} + \frac{2B^2}{Y}} &= \sqrt{\frac{6(4)^2}{3} + \frac{2(-7)^2}{-5}} = \sqrt{\frac{96}{3} + \frac{98}{-5}} = \sqrt{12.4} = 3.52, \text{ approx} \end{aligned}$$

الدوال :

السنة	عدد الأطنان من الجنذور (مقربة لأقرب هـ أطنان)	عدد الأطنان من البنجر (مقربة لأقرب هـ أطنان)
1950	210	75
1951	185	90
1952	225	100
1953	250	85
1954	240	80
1955	195	100
1956	210	110
1957	225	105
1958	250	95
1959	230	110
1960	235	100

١٤ - ١ الجدول ١ - ١ يظهر عدد الأطنان

من الجنذور والبنجر التي أنتجتها مزرعة

PQR وذلك خلال الأعوام من

من 1950 إلى 1960

بالرجوع إلى هذا الجدول حدد

السنة أو السنوات التي في خلالها :

(أ) أنتج أقل عدد من أطنان
الجنذور

(ب) أنتج أكبر عدد من أطنان البنجر

(ج) حدث أكبر تدهور في إنتاج
الجنذور

شكل ١-١

(د) انخفض إنتاج البنجر بينما ارتفع إنتاج الجنذور عما كان عليه في العام السابق

(هـ) أنتج نفس كمية الأطنان من الجنذور والبنجر

(و) مجموع إنتاج الجنذور ، والبنجر وصل إلى نهاية العظمى

الحل : (أ) 1951 (ب) 1959 ، 1956 (ج) 1955 (د) 1953, 1957, 1958, 1960

(هـ) 1952, 1957; 1953, 1958 (و) 1958

١٥ - ١ إذا كانت W تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من الجنذور و C تعبر عن عدد الأطنان المنتجة من البنجر في العام t في

مزرعة PQR المذكورة في المسألة ١٤ - ١ . من الواضح أن W ، C دالتان في t وهذا يعبر عنه $W = F(t)$ و $C = G(t)$.

(أ) أوجد W عند $t = 1956$ الحل : 210

(ب) أوجد C عند $t = 1959$ ، $t = 1953$ الحل : 110 ، 85 على التوالي

(ج) أوجد t عند $W = 225$ الحل : 1957 ، 1952 على التوالي

(د) أوجد $F(1959)$ الحل : 240

(هـ) أوجد $G(1958)$ الحل : 95

(و) أوجد C عندما $W = 210$ الحل : 110

(ز) ماهو مجال المتغير t ؟ الحل : السنوات 1950, 1951, ..., 1960

(ح) هل W دالة وحيدة القيمة في t ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة من قيم t (في مجال t) تقابلها قيمة وحيدة للمتغير W .

(ط) هل t دالة في W ؟ إذا كانت كذلك فهل هي دالة وحيدة القيمة ؟ نعم ، t دالة في W حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها W تقابلها قيمة أو أكثر من قيم t يمكن الحصول عليها من الجدول .

بما أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من قيمة للمتغير t مقابل قيمة من قيم W (مثال : عندما $W=225$ فإن $t = 1952$ أو $t = 1957$) فإن الدالة متعددة القيم . هذا الاعتماد الدالي لـ t على W يمكن كتابته على صورة $t = H(W)$

(ى) هل C دالة في W ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة ممكنة من قيم W يقابلها قيم أو أكثر من قيم C كما هو محدد بالجدول ١-١ .
كذلك فإن W دالة في C .

(ك) ما هو المتغير المستقل ، t أو W ؟

من الناحية المسادية فإنه من المعتاد أن نفكر في أن W تتحدد من t وليس أن t تتحدد من W . وبهذا فإنه من الناحية المسادية نعتبر t المتغير المستقل و W المتغير التابع . من الناحية الرياضية فإن أيًا من المتغيرين يمكن اعتباره متغيراً مستقلاً والآخر متغيراً تابعاً . فالمتغير الذى يعطى قيمًا مختلفة هو المتغير المستقل أما المتغير الذى يتحدد كنتيجة لذلك فهو المتغير التابع .

١٦ - تتحدد قيمة المتغير Y من المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 2X - 3$ (حيث الرقمان 2,3 أرقام صحيحة) .

(أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم 1.5 ، 2 ، 3 ،

$$\begin{aligned} X = 3, Y = 2X - 3 &= 2(3) - 3 = 6 - 3 = 3. & \text{عندما} \\ X = -2, Y = 2X - 3 &= 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7. & \text{عندما} \\ X = 1.5, Y = 2X - 3 &= 2(1.5) - 3 = 3 - 3 = 0. & \text{عندما} \end{aligned}$$

(ب) كون جدولاً لقيم Y المقابلة لقيم $X = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

يظهر الجدول المقابل قيم Y ، محسوبة كما في الجزء

(أ) من المسألة :

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	-7	-5	-3	-1	1	3	5

لاحظ أنه باستخدام قيم أخرى لـ X فإنه من الممكن تكوين عديد من الجداول . العلاقة $Y = 2X - 3$ مكافئة لمجموعة من كل الجداول المحتملة .

(ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالصورة $Y = F(X)$ حدد قيمة $F(2.4)$ ، $F(0.8)$

$$F(2.4) = 2(2.4) - 3 = 4.8 - 3 = 1.8, F(0.8) = 2(0.8) - 3 = 1.6 - 3 = -1.4$$

(د) ماهي قيمة X إذا كانت $Y = 15$ ؟

بالتعويض عن Y بالقيمة 15 في $Y = 2X - 3$ فإن $15 = 2X - 3$ $18 = 2X$ $9 = X$

(هـ) هل من الممكن التعبير عن X كدالة في Y ؟

نعم حيث أن $Y = 2X - 3$ ، $Y + 3 = 2X$ أو $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ وهذا يعبر عن X كدالة صريحة في Y .

(و) هل Y دالة وحيدة القيمة في X ؟

نعم ، حيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها X (وهناك عدد لا نهائى من هذه القيم) تأخذ Y قيمة وحيدة فقط .

(ز) هل X دالة وحيدة القيمة في Y ؟

نعم ، حيث أنه من الجزء (ج) فإن $X = \frac{1}{2}(Y + 3)$ بحيث أنه لكل قيمة يمكن أن تأخذها Y قيمة وحيدة فقط تأخذها X .

١٧-١ إذا كانت $Z = 16 + 4X - 3Y$ أوجد قيم Z المقابلة لما يلي :

$$(أ) \quad X = 2, Y = 5 \quad (ب) \quad X = 3, Y = 7 \quad (ج) \quad X = -4, Y = 2$$

الحل :

$$Z = 16 + 4(2) - 3(5) = 16 + 8 - 15 = 9 \quad (أ)$$

$$Z = 16 + 4(-3) - 3(-7) = 16 - 12 + 21 = 25 \quad (ب)$$

$$Z = 16 + 4(-4) - 3(2) = 16 - 16 - 6 = -6 \quad (ج)$$

بمعلومية قيم Y ، X يقابلها قيمة Z . ومن الممكن التعبير عن اعتماد Z على Y ، X بأن نكتب

$Z = F(X, Y)$ ونقرأ Z دالة في Y ، X . $F(2, 5)$ تعبر عن قيمة Z عندما $Y = 5$ ، $X = 2$

وهي 9 ، من الجزء (أ) . بصورة ماثلة $F(-3, -7) = 25$ ، $F(-4, 2) = -6$ من (ب)

و (ج) ونسمى المتغيرات X, Y بالمتغيرات المستقلة و Z بالمتغير التابع .

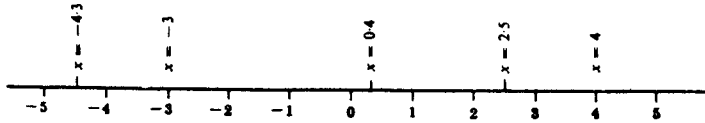
الاشكال البيانية :

١٨ - ١ عين على المحور X في نظام للإحداثيات النقط المقابل لما يلي :

(أ) $x = 4$ (ب) $x = -3$ (ج) $x = 2.5$

(د) $x = -4.3$ (هـ) $x = 0.4$ ، مفترضاً أن كل هذه القيم قيم صحيحة .

الحل :



لكل قيمة من قيم x الصحيحة نقطة وحيدة فقط على المحور . وبالعكس فإنه من الثابت في الرياضيات المتقدمة أن كل

نقطة على الأحداثى تقابلها قيمة وحيدة من قيم x .

من الناحية النظرية فإن هناك نقطة تقابل $x = \pi = 3.141 592653 58 \dots$

أو $x = 7/22 = 3.142857142875 \dots$

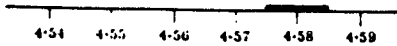
ومن الناحية العملية فإننا لن نأمل أن نحدد موضع نقطة بالدقة حيث أن كثافة القلم الذي تستخدمه له سمك يغطي على عدد

لانهاى من النقط ، كذلك فإن المحور x نفسه له سمك . وبهذا فإن الشكل أعلاه هو تمثيل مادي للوضع الرياضى الفعل .

١٩ - ١ إذا كان x يعبر عن قطر حامل كرة بالمليمتر . إذا كانت $x = 4.58$ إلى ثلاثة أرقام معنوية . كيف يمكن تمثيل هذا

على المحور x ؟

الحل :



القياس المعطى 4.58 mm.

يظهر أن القياس الحقيقى يقع بين

4.575 mm و 4.585 . وبهذا

فإن القياس يجب أن يمثل بالجزء

الثقيل من الخط .

٢٠ - ١ عين في نظام للإحداثيات المتعامدة

النقطة التى إحداثياتها :

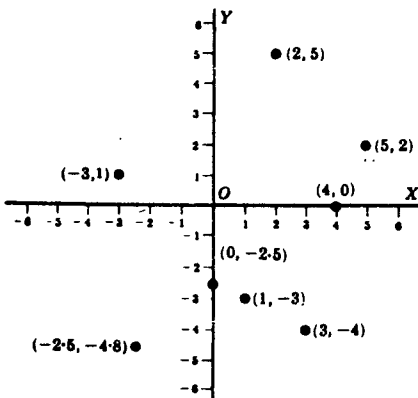
(أ) (5, 2) (ب) (2, 5)

(ج) (-3, 1) (د) (1, -3)

(هـ) (-2.5, -4.8)

(و) (0, -2.5)

(ز) (3, -4) (ح) (4, 0)



الشكل ٢-١

افترض أن الأرقام المطاة هي أرقام صحيحة . أنظر الشكل (١ - ٢) لتوضيح الحل .

$$١ - ٢ \text{ عبر بيانياً عن المعادلة } y = 2x - 3$$

الحل :

$$x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ضع}$$

فإننا نجد

$$y = -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5$$

على التوالي [أنظر المسألة ١ - ١٦

(ب)]. وهذا تكون النقطة على الرسم

هي (٨٨) .

وقد رسمت باستخدام نظام

الاحداثيات المتعامدة كما هو موضح

بالشكل ١ - ٣ جميع هذه النقاط

وكذلك غيرها من النقاط التي يمكن

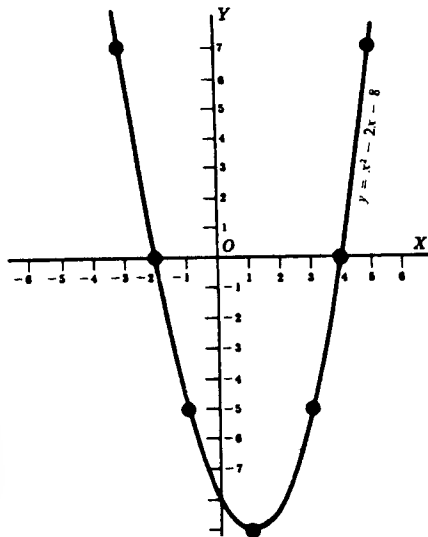
الحصول عليها باستخدام قيم أخرى

ل x تقع على خط مستقيم وهو الشكل المطلوب .

وبما أن الشكل البياني للمعادلة $y = 2x - 3$ هو خط مستقيم فإننا نسمي أحياناً $F(x) = 2x - 3$ دالة خطية

وبشكل عام فإن $F(x) = ax + b$ حيث a, b ثوابت دالة خطية وشكلها البياني هو خط مستقيم .

لاحظ أن نقطتين فقط لازمتين لرسم الدالة الخطية لأن نقطتين كافيتان لتحديد خط



الشكل ١ - ٤

$$١ - ٢٢ \text{ عبر بيانياً عن المعادلة } y = x^2 - 2x - 8$$

الحل :

يظهر الجدول قيم y المقابلة للقيم المختلفة لـ x وعلى سبيل

المثال فم عندما $x = 2$

$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

من الجدول فإن النقاط الموضحة بالشكل هي $(-3, 7)$

$(-2, 0), (-1, -5), (0, -8), (1, -9), (2, -8)$

$(3, -5), (4, 0), (5, 7)$

هذه النقاط وغيرها من النقاط التي يمكن الحصول عليها باستخدام

قيم مختلفة لـ x ، تقع على المنحنى الموضح بالشكل ١ - ٤ . هذا المنحنى يسمى قطع مكافئ .

$$F(x) = x^2 - 2x - 8$$

والدالة $F(x) = x^2 - 2x - 8$ تسمى دالة من الدرجة الثانية . وبشكل عام فإن الرسم البياني للمعادلة $y = a + bx + cx^2$ حيث a, b, c ثوابت و $c \neq 0$ يعبر عن قطع مكافئ . أما إذا كانت $c = 0$ فإن الشكل يعبر عن خط مستقيم كما في المسألة ١ - ٢١ .

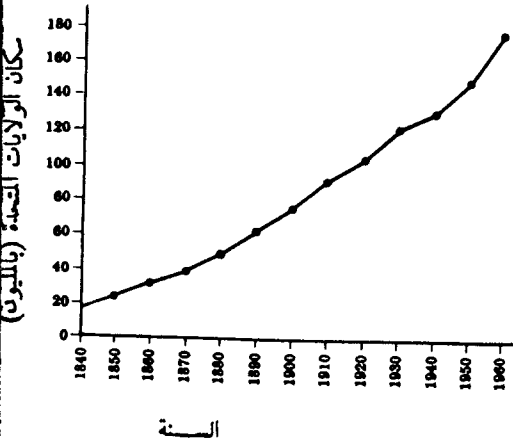
٢٣ - ١ الجدول ٢ - ١ يعطى عدد سكان الولايات المتحدة (بالمليون) للسنوات 1840, 1850, ..., 1960 . ارسم هذه البيانات .

جدول ٢ - ١ سكان الولايات المتحدة (بالمليون) ، 1840 — 1960

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960
السكان (بالمليون)	17.1	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1	179.3

المصدر : مكتب التعداد

الطريقة الاولى :



(المصدر : مكتب التعداد)

شكل ١ - ٥

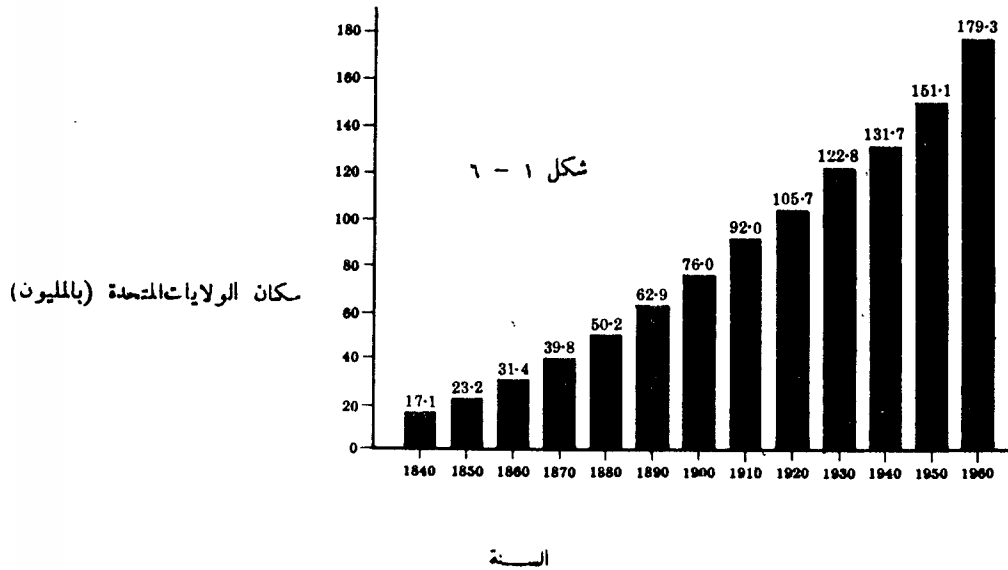
بالرجوع إلى الشكل ١ - ٥ فإننا في الرسم اعتبرنا أن السكان ، يعبر عنها بالرمز P هو المتغير التابع بينما الزمن ، يرمز له بالرمز t هو المتغير المستقل . وتحدد مواضع النقاط كالمعتاد بالاحداثيات المقروءة من الجدول فعمل سبيل المثال (1880, 50.2) وتوصل النقاط المتتالية بعد ذلك بخط مستقيم حيث أنه لا توجد لدينا معلومات عن عدد السكان في خلال السنوات المتوسطة ولهذا السبب يسمى هذا الشكل بالخط البياني لاحظ أن الوحدات على الاحداثيات غير متساوية كما هو الحال عند رسم المعادلة $y = 2x - 3$.

وهذا بالطبع يمكن تبريره حيث أن المتغيران يمثلان كميات مختلفة .

لاحظ أيضاً أن الصفر قد وضع على المحور الرأسى وليس (لأسباب واضحة) على المحور الأفقى . وبشكل عام يجب أن يوضح الصفر وبخاصة على المحور الرأسى .

فإذا كان من المستحيل وضع الصفر لأى سبب وإذا كان حذفه يؤدي إلى استنتاجات خاطئة بواسطة القارئ فإنه من الممكن لفت النظر إلى هذا الحذف بإحدى الوسائل كما هو موضح فى المسألة ١ - ٢٦ . الجدول أو الرسم البيانى الذى يوضح توزيع متغير كدالة فى الزمن يسمى سلسلة زمنية .

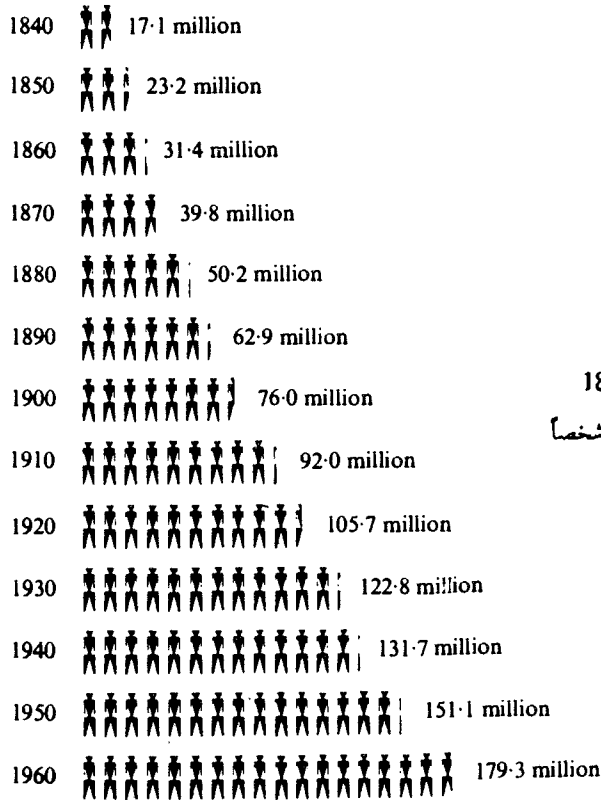
الطريقة الثانية :



المصدر : مكتب التعداد

الشكل ١ - ٦ يسمى بالأعمدة البيانية ، خرائط الأعمدة أو مخططات الأعمدة . عرض الأعمدة ليس له أى دلالة فى هذه الحالة ويمكن أن يأخذ أى حجم مادامت الأعمدة لاتتراكب فوق بعضها .

الأرقام الموضحة على الأعمدة من الممكن تركها أو حذفها . فإذا أبقينا عليها فإن التدرج الرأسى يصبح غير ضرورى ومن الممكن حذفه .



سكان الولايات المتحدة

1840 to 1960 خلال الأعوام

يمثل كل شكل 10 000 000 شخصاً

شكل ١ - ٧

المصدر : مكتب التعداد

الخرائط أو المخططات كالتى فى الشكل ١ - ٧ تسمى بالرسوم التصويرية أو الخرائط المصورة . وعادة تستخدم لتوضيح البيانات الإحصائية بطريقة مشوقة للعامة . وكثير من هذه الرسوم التصويرية تظهر مقدرة كبيرة على الابتكار والابداع فى فن توضيح البيانات .

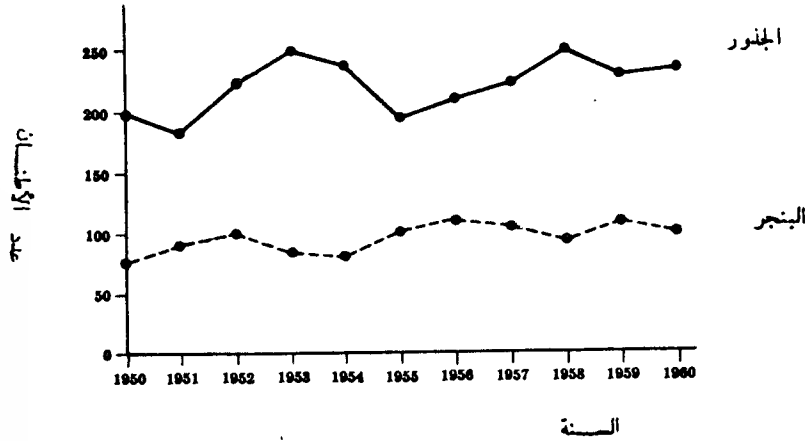
الأرقام على يمين الرسوم فى الرسم التصويرى السابق يمكن إدراجها أو عدم إدراجها وعند حذفها فإنه يظل من الممكن للقارىء تقدير عدد السكان إلى أقرب خمسة ملايين شخص .

١ - ٢٤ عبر بياناً عن بيانات المسألة ١ - ١٤ باستخدام

(ب) الأعمدة البيانية

(أ) الخطوط البيانية

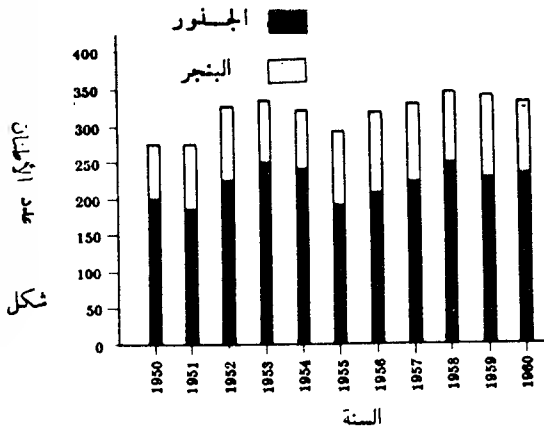
الحل :
(أ)



شكل ٨ - ١

(ب)

الطريقة الثانية



شكل ١٠ - ١

الطريقة الأولى



شكل ٩ - ١

يسمى هذا الشكل بخريطة الأعمدة البيانية المحزأة

١ - ٢٥ (أ) عبر عن عدد الأطنان السنوية من الجذور والبنجر في المسألة ١ - ١٤ كنسبة من مجموع الإنتاج السنوي .

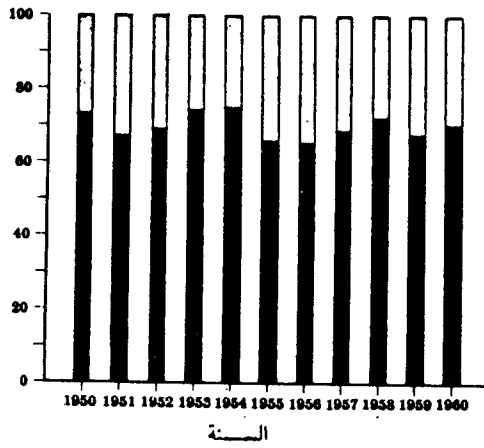
(ب) ارسم النسب التي حصلت عليها في (أ)

الحل :

(أ) في 1950 نسبة الجذور = $\frac{200}{200 + 75} = 72.7\%$ ونسبة البنجر = $100\% - 72.7\% = 27.3\%$

جدول ٣ - ١

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
نسبة الجذور	72.7	67.3	69.2	74.6	75.0	66.1	65.6	68.2	72.5	67.6	70.1
نسبة البنجر	27.3	32.7	30.8	25.4	25.0	33.9	34.4	31.8	27.5	32.4	29.9



(ب) الرسم البياني للنسب في (أ) والموضح بالشكل ١١-١ يسمى الشكل البياني للنسب المئوية المجزأة . من الممكن أيضاً استخدام شكل بياني مثل الذي استخدم في الطريقة الأولى لحل المسألة ٢٤ - ١ (ب) .

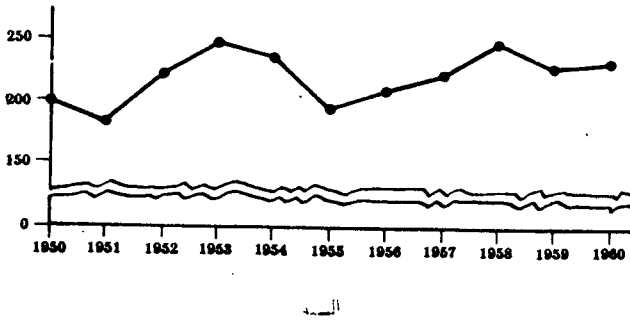
٢٦ - ١ باستخدام الخط البياني مثل بيانات انتاج الجدور الموضح في الجدول ١ - ١ بالمسألة (١٤) .

الحل :

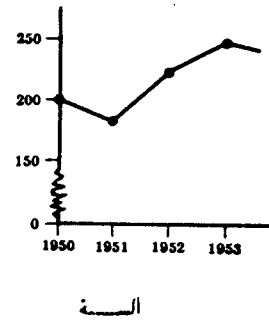
شكل ١١ - ١

الخط البياني المطلوب يمكن الحصول عليه من حل (المسألة ٢٤ - ١) (أ) وذلك بحذف الخط البياني الأدنى . وهذا يؤدي إلى ظهور

مساحة مضاعفة بين الخط البياني الأعلى والمحور الرأسى . ولتجنب ذلك يمكن أن نبدأ المقياس الأفقى عند 150 بدلا من 0 . وهذا قد يؤدي إلى استنتاجات خاطئة من جانب القارئ الذي لا يلاحظ حذف الصفر . وحتى نوجه النظر لهذا الحذف فن الممكن أن يكون الرسم كما في (الشكل ١٢ - ١) أدناه .



شكل ١٣ - ١



شكل ١٢ - ١

أسلوب آخر يمكن استخدامه حتى نوجه النظر إلى حذف الصفر نستخدم خطأ متراجاً على أحد الاحداثيات كما هو موضح (بالشكل ١٣ - ١) أعلاه .

٢٧ - ١ الجدول ٤ - ١ يظهر مساحات القارات المختلفة في العالم مبرراً عنها بمليون الكيلومترات المربعة ، عبر بياناً عن هذه البيانات .

جدول ١ - ٤

مساحات قارات العالم

المساحة بمليون كيلومتر (مربع)	القارة
30.3	أفريقيا
26.9	آسيا
4.9	أوروبا
24.3	أمريكا الشمالية
8.5	استراليا و نيوزيلندا
17.9	أمريكا الجنوبية
20.5	الاتحاد السوفيتي

133.3

المجموع

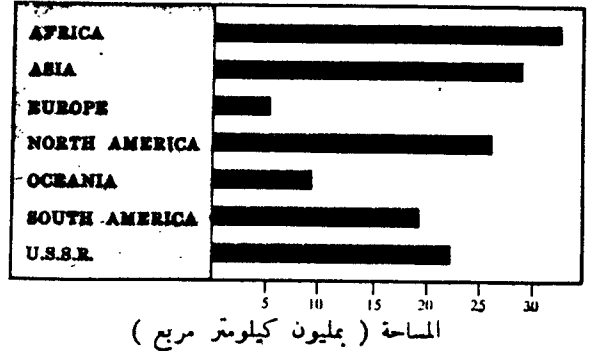
المصدر الأمم المتحدة

ملحوظة ١ - مساحة أوروبا لاتتضمن مساحة
الاتحاد السوفيتي والبلاد الخاضعة لسيطرته حيث ظهر
في خانة U.S.S.R (الاتحاد السوفيتي)
ملحوظة ٢ - لاتتضمن مساحة أوروبا تركيا
حيث ظهرت ضمن آسيا .

الطريقة الاولى :

الشكل ١ - ١٤

مساحات قارات العالم
(من واقع بيانات الأمم المتحدة)



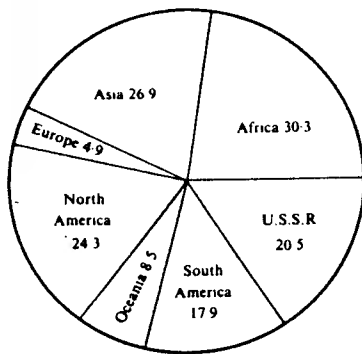
الشكل اعلاه هو شكل الأعمدة البيانية حيث الأعمدة أفقية بدلا
بدلا من رأسية . لاحظ أن القارات قد رتب حسب الترتيب الأبجدي
لأسمائها (باللغة الإنجليزية) . وكان من الممكن ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً
حسب مساحتها .

الطريقة الثانية :

(الشكل ١ - ١٥) يسمى بالرسم الدائري أو الخريطة
التوضيحية الدائرية . لرسم هذا الشكل تستخدم النتيجة بأن المساحة
الكلية 133.3 مليون كيلومتر مربع وهذه تقابل مجموع
درجات قوس الدائرة أي 360° .

وهذا فإن كل مليون كيلومتر مربع يقابله $360^\circ/133.3$
ومن هذا فإن أفريقيا ومساحتها 30.3 مليون كيلومتر
مربع يقابلها قوس المقدار $82^\circ = (360^\circ/133.3) \times 30.3$
بينما آسيا ، أوروبا ، أمريكا الشمالية استراليا ونيوزيلندا ،
أمريكا الجنوبية والاتحاد السوفيتي يقابلها قوس المقدار
 55° and 48° ، 23° ، 66° ، 13° ، 73° على التوالي .
وباستخدام المنقلة فإن خطوط التقسيم المطلوبة يمكن رسمها .

مساحة قارات العالم
(بمليون كيلومتر مربع)



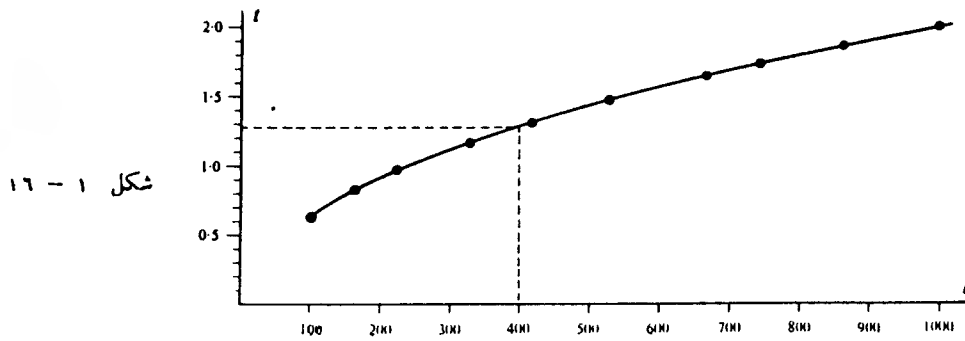
شكل ١ - ١٥

٢٨ - ١ الملاحظات التالية سجلت في معمل للطبيعة للزمن t (بالثواني) اللازم لكي يكمل بندول طوله l (بالمليمترات) اهتزازة واحدة (أ) أعرض بيانياً t كدالة في l (ب) من الرسم قدر t لبندول طوله 400 مليمتر

l	101	162	222	338	420	534	667	745	866	1000
t	0.64	0.81	0.95	1.17	1.30	1.47	1.65	1.74	1.87	2.01

الحل :

(أ) الخط البياني الموضح بالشكل ١ - ١٦ حصلنا عليها بتوصيل نقاط الملاحظات بخط ممد .



(ب) القيمة المقدرة لـ t هي 1.27 ثانية .

المعادلات :

٢٩ - ١ حل المعادلات التالية :

$$(أ) \quad 4a - 20 = 8$$

$$أضف 20 \text{ إلى طرفي المعادلة} \quad 4a - 20 + 20 = 8 + 20 \quad \text{أو} \quad 4a = 28$$

$$\text{اقسم الطرفين على 4 :} \quad 4a/4 = 28/4 \quad \text{و} \quad a = 7$$

$$\text{تحقق :} \quad 4(7) - 20 = 8, \quad 28 - 20 = 8, \quad 8 = 8$$

$$(ب) \quad 3X + 4 = 24 - 2X$$

$$\text{اطرح 4 من طرفي المعادلة} \quad 3X + 4 = 24 - 2X - 4 \quad \text{أو} \quad 3X = 20 - 2X$$

$$\text{أضف } 2X \text{ إلى الطرفين} \quad 3X + 2X = 20 - 2X + 2X \quad \text{أو} \quad 5X = 20$$

$$\text{اقسم الطرفين على 5 :} \quad 5X/5 = 20/5 \quad \text{و} \quad X = 4$$

$$\text{تحقق :} \quad 3(4) + 4 = 24 - 2(4), \quad 12 + 4 = 24 - 8, \quad 16 = 16$$

من الممكن الحصول على الحل بطريقة أسرع بمعلومية أنه من الممكن نقل أو تحريك أى حد من أحد طرفى المعادلة إلى الطرف الآخر بعد تغيير إشاراته . وبهذا يمكن أن نكتب

$$3X + 4 = 24 - 2X, \quad 3X + 2X = 24 - 4, \quad 5X = 20, \quad X = 4$$

$$18 - 5b = 3(b + 8) + 10 \quad (ج)$$

$$18 - 5b = 3b + 24 + 10, \quad 18 - 5b = 3b + 34$$

$$\text{لتحويل } -8b = 16 \text{ أو } -5b - 3b = 34 - 18$$

$$\text{بالقسمة على } b = -2 \text{ و } -8, \quad \frac{-8b}{-8} = \frac{16}{-8}$$

$$18 - 5(-2) = 3(-2 + 8) + 10, \quad 18 + 10 = 3(6) + 10, \quad 28 = 28 \quad \text{تحقيق :}$$

$$\frac{Y+2}{3} + 1 = \frac{Y}{2} \quad (د)$$

اضرب أولاً الطرفين فى 6 . العامل المشترك الأصغر للمقام

$$6 \left(\frac{Y+2}{3} + 1 \right) - 6 \left(\frac{Y}{2} \right), \quad 6 \left(\frac{Y+2}{3} \right) + 6(1) = \frac{6Y}{2}, \quad 2(Y+2) + 6 = 3Y$$

$$2Y + 4 + 6 = 3Y, \quad 2Y + 10 = 3Y, \quad 10 = 3Y - 2Y, \quad Y = 10$$

$$\frac{10+2}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \quad \frac{12}{3} + 1 = \frac{10}{2}, \quad 4 + 1 = 5, \quad 5 = 5 \quad \text{تحقيق :}$$

٣٠ - ١ حل كل من مجموعات المعادلات الآتية التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 3a - 2b = 11 \\ 5a + 7b = 39 \end{array} \right\} \quad (أ)$$

$$(١) \quad 21a - 14b = 77 \quad \text{اضرب المعادلة الأولى فى } 7$$

$$(٢) \quad 10a + 14b = 78 \quad \text{اضرب المعادلة الثانية فى } 2$$

$$\begin{array}{r} 21a - 14b = 77 \\ 10a + 14b = 78 \\ \hline 31a = 155 \end{array} \quad \text{أجمع}$$

$$a = 5 \quad \text{اقسم على } 31$$

لاحظ أنه بضرب المعادلات المطاة فى الأرقام المناسبة فإنه يمكننا كتابة معادلتين مكافئتين وهما (١) ، (٢) .

حيث تتساوى القيمة العددية لمعاملات المجهول . وبجمع المعادلتين فإنه يمكن حذف المجهول b وبهذا نحصل على قيمة a .

وبالتعويض عن a فى المعادلة الأولى : $3(5) - 2b = 11, \quad -2b = -4, \quad b = 2$.

وهذا نحصل على $a = 5$ ، $b = 2$

$$\begin{aligned} 3(5) - 2(2) &= 11, 15 - 4 = 11, 11 = 11. \\ 5(5) + 7(2) &= 39, 25 + 14 = 39, 39 = 39 \end{aligned} \quad \text{تحقق :}$$

$$\left. \begin{aligned} 5X + 14Y &= 78 \\ 7X + 3Y &= -7 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ب})$$

$$(١) \quad 15X + 42Y = 234 \quad \text{اضرب المعادلة الأولى في 3}$$

$$(٢) \quad -98X - 42Y = 98 \quad \text{اضرب المعادلة الثانية في 14}$$

$$-83X = 332 \quad \text{اجمع}$$

$$X = -4 \quad : -83 \quad \text{اقسم على}$$

بالتعويض عن $X = -4$ في المعادلة الأولى $5(-4) + 14Y = 78, 14Y = 98, Y = 7$

$$X = -4, Y = 7 \quad \text{أى}$$

$$\begin{aligned} 5(-4) + 14(7) &= 78, -20 + 98 = 78, 78 = 78. \\ 7(-4) + 3(7) &= -7, -28 + 21 = -7, -7 = -7 \end{aligned} \quad \text{تحقق :}$$

$$\left. \begin{aligned} 3a + 2b + 5c &= 15 \\ 7a - 3b + 2c &= 52 \\ 5a + b - 4c &= 2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{array}{rcll} 6a & 4b & 10c & 30 \\ 35a & 15b & 10c & 260 \\ 29a & 19b & & 230 \end{array} \quad \begin{aligned} & \text{اضرب المعادلة الأولى في 2} \\ & \text{اضرب المعادلة الثانية في 5} \end{aligned}$$

$$(١) \quad \text{اجمع}$$

$$\begin{array}{rcll} 14a & 6b + 4c & 104 \\ 5a & b & 4c & 2 \\ \hline 19a & 5b & & 106 \end{array} \quad \begin{aligned} & \text{اضرب المعادلة الثانية في 2} \\ & \text{ضع المعادلة الثالثة} \end{aligned}$$

$$(٢)$$

وهذا نكون قد حذفنا c وبقى لدينا المعادلتين (١) ، (٢) والتي يمكن حلها آنياً لنحصل على قيم a, b .

$$\begin{aligned} -145a + 95b &= -1150 & \text{اضرب المعادلة (١) في 5} \\ 361a - 95b &= 2014 & \\ \hline 216a &= 864 & \text{اضرب المعادلة (٢) في 19} \\ a &= 4 & \end{aligned}$$

$$\text{اجمع}$$

$$\text{اقسم على 216}$$

بالتعويض عن $a = 4$ في (١) أو (٢) نجد أن $b = -6$

بالتعويض عن $a = 4, b = -6$ في أى من المعادلات المعطاة نحصل على قيمة $c = 3$.

$$a = 4, b = -6, c = 3$$

$$\begin{aligned} 3(4) + 2(-6) + 5(3) &= 15, 15 = 15. & 7(4) - 3(-6) + 2(3) &= 52, 52 = 52. \\ 5(4) + (-6) - 4(3) &= 2, 2 = 2. \end{aligned}$$

المتباينات :

٣١-١ عبر بالكلمات عن معنى مايلي :

$$N > 30 \quad (أ) \quad N \text{ أكبر من } 30$$

$$X \leq 12 \quad (ب) \quad X \text{ أقل من أو تساوى } 12$$

$$0 < p \leq 1 \quad (ج) \quad p \text{ أكبر من الصفر وأقل من أو تساوى الواحد}$$

$$\mu - 2t < X < \mu + 2t \quad (د) \quad X \text{ أكبر من } \mu - 2t \text{ وأقل من } \mu + 2t$$

٣٢-١ ترجم مايلي إلى رموز

$$(أ) \text{ المتغير } X \text{ يأخذ فيما بين } 5, 2 \text{ بما في ذلك } 5, 2 : 2 \leq X \leq 5$$

$$(ب) \text{ الوسط الحسابى } \bar{X} \text{ أكبر من } 28.42 \text{ ولكن أقل من } 31.56 : 28.42 < \bar{X} < 31.56$$

$$(ج) \text{ مقدار موجب أقل من أو يساوى } 10 : 0 < m \leq 10$$

$$(د) \text{ مقدار غير سالب } : P \geq 0$$

٣٣-١ باستخدام رموز المتباينات رتب الأرقام $3.42, -0.6, -2.1, 1.45, -3$

(أ) ترتيباً تصاعدياً حسب قيمها

(ب) ترتيباً تنازلياً حسب قيمها

الحل :

$$(أ) \quad -3 < -2.1 < -0.6 < 1.45 < 3.42$$

$$(ب) \quad 3.42 > 1.45 > -0.6 > -2.1 > -3$$

لاحظ أنه عند تعيين الأرقام كنقط على خط (أنظر المسألة ١ - ١٨) فإنها تزايد من اليسار إلى اليمين .

١ - ٣٤ في كل مايل أوجد المتباينة المقابلة في X . بمعنى حل كل متباينة في X

$$(أ) \quad 2X < 6 \quad \text{اقسم الطرفين على 2 نتحصل على } X < 3$$

$$(ب) \quad 3X - 8 \geq 4 \quad \text{بإضافة 8 على كلا الطرفين } 3X \geq 12 \quad \text{أقسم}$$

$$\text{الطرفين على 3 لتحصل على } X \geq 4 .$$

$$(ج) \quad 6 - 4X < -2 \quad \text{بإضافة 6 - على كلا الطرفين ، } -4X < -8$$

$$\text{و بقسمة الطرفين على } -4 \text{ نحصل على } X > 2$$

لاحظ أنه كما في المعادلات يمكن نقل حد من طرف إلى آخر من أطراف المتباينة مع تغيير إشارة الحد المنقول .

مثال الجزء (ب)

$$(د) \quad -3 < \frac{X-5}{2} < 3 \quad \text{بالضرب في 2 ، } -6 < X-5 < 6$$

$$\text{بإضافة 5 . } -1 < X < 11$$

$$(هـ) \quad -1 \leq \frac{3-2X}{5} \leq 7 \quad \text{بالضرب في 5 ، } -5 \leq 3-2X \leq 35$$

$$\text{بإضافة 3 - نحصل على } -8 \leq -2X \leq 32 \quad \text{بالقسمة ،}$$

$$\text{على } -2 \leq X \leq 16 \text{ أو } 4 \geq X \geq -16$$

اللوغاريتمات والاعداد المقابلة للوغاريتمات :

١ - ٣٥ حدد العدد البياني للوغاريتمات المعتادة (الأساس 10) لكل من الأرقام التالية :

$$(أ) \quad 57 \quad (ب) \quad 5.63 \quad (ج) \quad 982.5 \quad (د) \quad 186000 \quad (هـ) \quad 0.7314 \quad (و) \quad 0.0071 \quad (ز) \quad 0.0003 \quad (ح) \quad 0.0325 \quad (ط) \quad 0.71 \quad (ك) \quad 57.4$$

$$(ب) \quad 57.4 \quad (د) \quad 35.63 \quad (و) \quad 7824 \quad (ح) \quad 0.71 \quad (ط) \quad 0.0325 \quad (ك) \quad 0.0071 \quad (ل) \quad 0.0003$$

الحل :

$$(أ) \quad 1 \quad (ب) \quad 0 \quad (ج) \quad 2 \quad (د) \quad 5 \quad (هـ) \quad 9 \quad (و) \quad 10 \quad (ز) \quad 7$$

$$(ب) \quad 1 \quad (د) \quad 1 \quad (و) \quad 3 \quad (ح) \quad 9-10 \quad (ط) \quad 8 \quad (ك) \quad 6-10$$

١ - ٣٦ تحقق من اللوغاريتمات التالية :

$$(أ) \quad \log 87.2 = 1.9405 \quad \text{الجزء العشري} = 0.9405 \quad \text{العدد البياني} = 1 \quad \text{وهذا يكون } \log 87.2 = 1.9405$$

$$(ب) \quad \log 37300 = 4.5717 \quad (د) \quad \log 9.21 = 0.9643$$

$$(ج) \quad \log 753 = 2.8768 \quad (هـ) \quad \log 54.50 = 1.7364$$

(و) $\log 0.382$ الجزء العشري = 0.5821 ، العدد البياني = وهذا يكون $10 - 9.5821 = \log 0.382$

(ز) $\log 0.00159 = 7.2014 - 10$ (ط) $\log 0.000827 = 6.9175 - 10$

(ح) $\log 0.0753 = 8.8768 - 10$ (ي) $\log 0.0503 = 8.7016 - 10$

(ك) $\log 4.638$ الجزء العشري لـ $\log 4638$ هو 0.8 من المسافة بين الجزء العشري لـ $\log 4630$

والجزء العشري لـ $\log 4640$

الجزء العشري لـ $\log 4640 = 0.6665$

الجزء العشري لـ $\log 4630 = 0.6656$

الفرق الجدول = 0.0009

الجزء العشري $\log 4.638 = 0.6656 + (0.00009)(0.8)$

= 0.6663

إلى أربعة أرقام عشرية

وهذا يكون $\log 4.638 = 0.6663$

وهذه العملية تسمى الاستكمال الخطي

وإذا رغبتنا ، فإن خانة الفروق في الجدول صفحة ٥٣٦ و ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشري مباشرة

(7 + 6656)

(ل) $\log 6.753 = 0.8295 (8293 + 2)$ (ع) $\log 0.2548 = 9.4062 - 10 (4048 + 14)$

(م) $\log 183.2 = 2.2630 (2625 + 5)$ (ف) $\log 0.04372 = 8.6407 - 10 (6405 + 2)$

(ن) $\log 43.15 = 1.6350 (6345 + 5)$ (س) $\log 0.009848 = 7.9933 - 10 (9930 + 3)$

(س) $\log 876400 = 5.9427 (9425 + 2)$ (ق) $\log 0.0001788 = 6.2524 - 10 (2504 + 20)$

٣٧ - ١ تحقق من الأعداد المقابلة للوغاريتمات

(أ) $\text{antilog } 1.9058$

من الجدول فإن الجزء العشري 0.9058 يقابل الرقم 805 . وبما أن العدد البياني هو 1 ، فإن العدد به رقم قبل

العلامة العشرية وهذا يكون العدد المطلوب هو 80.5 أى $\text{antilog } 1.9058 = 80.5$

(ب) $\text{antilog } 3.8531 = 7130$ ، $\text{antilog } 2.1875 = 154$ ، $\text{antilog } 0.4997 = 3.16$

$\text{antilog } 4.9360 = 86300$

(ج) $\text{antilog } 7.8657 = 10$

من الجدول فإن الجزء العشري 0.8657 يقابل الرقم 734 . وحيث أن العدد البياني هو 10 — 7 فإن الرقم

يحتوى على صفرين تالين مباشرة للعلامة العشرية . وهذا يكون الرقم المطلوب هو 0.00734

أى $0.00734 = 10 - 7.8657$

وإذا رغبتنا ، فإن خانة الفروق في الجدول صفحة ٥٣٦ ، ٥٣٧ من الممكن استخدامها لإيجاد الجزء العشري

مباشرة .

$$\text{antilog } 2.3927 = 0.0247, \text{ antilog } 9.8267 - 10 = 0.671, (د)$$

$$\text{antilog } 9.3842 - 10 (هـ) \text{ antilog } 7.7443 - 10 = 0.00555$$

وبما أن الجزء العشري غير موجود بالجداول فإننا نلجأ إلى الاستكمال :

$$0.3842 = \text{الجزء العشري المعطى} \quad \log 2430 = 0.3856 \quad \text{الجزء العشري لـ}$$

$$0.3838 = \text{الجزء العشري التالي في الصفر} \quad \log 2420 = 0.3838 \quad \text{الجزء العشري لـ}$$

$$0.0004 = \text{الفرق} \quad 0.0018 = \text{الفرق الجدولي}$$

$$0.2422 \text{ وهذا } 2422 = (2430 - 2420)(18/4) + 2420 \text{ إلى أربعة أرقام ويكون الرقم المطلوب هو } 0.2422$$

$$\begin{array}{ll} \text{antilog } 2.6715 = 469.3 & (3/9 \times 10 = 3 \text{ approx.}) \\ \text{antilog } 4.1853 = 15320 & (6/28 \times 10 = 2 \text{ approx.}) \\ \text{antilog } 0.9245 = 8.404 & (2/5 \times 10 = 4) \end{array} \quad (و)$$

$$\begin{array}{ll} \text{antilog } 1.6089 = 0.4064 & (4/11 \times 10 = 4 \text{ approx.}) \\ \text{antilog } 8.8907 - 10 = 0.07775 & (3/6 \times 10 = 5) \\ \text{antilog } 1.2000 = 15.85 & (13/27 \times 10 = 5 \text{ approx.}) \end{array} \quad (ز)$$

الحسابات باستخدام اللوغاريتمات :

احسب كلا مما يلي باستخدام اللوغاريتمات :

$$P = (3.81)(43.4) \cdot \log P = \log 3.81 + \log 43.4 \quad ٣٨ - ١$$

$$\log 3.81 = 0.5809$$

$$(+)\log 43.4 = 1.6375$$

$$\log P = 2.2184$$

$$P = \text{antilog } 2.2184 = 165.3 \text{ إذن}$$

أو 165 إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الآسية للحساب حيث

$$(3.81)(43.4) = (10^{0.5809})(10^{1.6375}) = 10^{0.5809 + 1.6375} = 10^{2.2184} = 165.3$$

$$\log P = \log 73.42 + \log 0.004620 + \log 0.5143 \quad P = (73.42)(0.004620)(0.5143) \quad ٣٩ - ١$$

$$\log 73.42 = 1.8658$$

$$(+)\log 0.004620 = 7.6646 - 10$$

$$(+)\log 0.5143 = 9.7112 - 10$$

$$\log P = 19.2416 - 20 = 9.2416 - 10$$

$$P = 1744 \text{ إذن}$$

٤٠ - ١

$$P = \frac{(784.6)(0.0431)}{28.23} \quad \log P = \log 784.6 + \log 0.0431 - \log 28.23$$

$$\begin{aligned} \log 784.6 &= 2.8947 \\ (+) \log 0.0431 &= \frac{8.6345 - 10}{11.5292 - 10} \\ (-) \log 28.23 &= \frac{1.4507}{10.0785 - 10} = 0.0785 \\ \log P &= 10.0785 - 10 = 0.0785 \end{aligned}$$

إذن $P = 1.198$ ، $p = 1.20$ إلى ثلاثة أرقام معنوية لاحظ الدلالة الأسية للحساب . حيث

$$\frac{(784.6)(0.0431)}{28.23} = \frac{(10^{2.8947})(10^{8.6345-10})}{10^{1.4507}} = 10^{2.8947 + 8.6345 - 10 - 1.4507} = 10^{0.0785} = 1.198$$

$$P = (5.395)^8. \quad \log P = 8 \log 5.395 = 8(0.7320) = 5.8560, \text{ and } P = 717\,800 \text{ or } 7.178 \times 10^5 \quad ٤١ - ١$$

$$P = \sqrt{387.2} = (387.2)^{1/2}. \quad \log P = \frac{1}{2} \log 387.2 = \frac{1}{2}(2.5879) = 1.2940, \text{ and } P = 19.68 \quad ٤٢ - ١$$

$$P = (0.08317)^{1/3}. \quad \log P = \log 0.08317 = \frac{1}{3}(0.9200 - 10) = \frac{1}{3}(48.9200 - 50) = 9.7840 - 10, \text{ and } P = 0.6081 \quad ٤٣ - ١$$

$$P = \frac{\sqrt{0.003654} (18.37)^3}{(8.724)^4 \sqrt[3]{743.8}}. \quad \log P = \frac{1}{2} \log 0.003654 + 3 \log 18.37 - (4 \log 8.724 + \frac{1}{3} \log 743.8) \quad ٤٤ - ١$$

المقام D

البسط N

$$\begin{aligned} 4 \log 8.724 &= 4(0.9407) = 3.7628 \\ \frac{1}{3} \log 743.8 &= \frac{1}{3}(2.8714) = 0.9571 \\ \text{Add:} \quad \log D &= 4.4806 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log 0.003654 &= \frac{1}{2}(7.5628 - 10) \\ &= \frac{1}{2}(17.5628 - 20) = 8.7814 - 10 \\ 3 \log 18.37 &= 3(1.2641) = 3.7923 \\ \text{Add:} \quad \log N &= 12.5737 - 10 \\ (-) \log D &= 4.4806 \\ \log P &= 8.0931 - 10 \\ P &= 0.01239 \end{aligned}$$

$$P = \sqrt{\frac{(874.3)(0.03816)(28.53)^3}{(1.754)^4 (0.007352)}}$$

٤٥ - ١

$$\begin{array}{rcl} \log 874.3 & = & 2.9417 \\ \log 0.03816 & = & 8.5816 - 10 \\ 3 \log 28.53 & = & 3(1.4553) = 4.3659 \\ \text{Add:} & & \underline{15.8892 - 10} \\ & & (-) \quad \underline{8.8424 - 10} \\ & & 7.0468 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 \log 1.754 & = & 4(0.2440) = 0.9760 \\ \log 0.007352 & = & 7.8664 - 10 \\ \text{Add:} & & \underline{8.8424 - 10} \end{array}$$

Then $\log P = \frac{1}{2}(7.0468) = 3.5234$, and $P = 3338$.

مسائل اضافية

المتغيرات :

١ - ٤٦ حدد أى من البيانات التالية تمثل بيانات متقطعة وأياً منها تمثل بيانات متصلة :

- (أ) عدد ملايين الأمطار الساقطة على مدينة ما خلال أشهر السنة المختلفة .
- (ب) سرعة سيارة بالكيلومترات / ساعة .
- (ج) عدد أوراق النقد فئة 5 £ المتداولة بالملكة المتحدة في فترة ما .
- (د) القيمة الإجمالية للأسهم المباعة يومياً في سوق الأوراق المالية .
- (هـ) عدد الطلبة المسجلين بجامعة على مدار عدد من السنين .

الحل : (أ) متصلة (ب) متصلة (ج) متقطعة (د) متقطعة (هـ) متقطعة .

١ - ٤٧ وضح مجال كل من المتغيرات التالية وحدد أياً من هذه المتغيرات متصل وأى منها متقطع .

- (أ) العدد W من كيلوجرامات القمح التى ينتجها الفدان في مزرعة على مدار عدد من السنين .
- (ب) العدد N للأفراد في عائلة .
- (ج) الحالة الاجتماعية لشخص .
- (د) الزمن t لطيران صاروخ .
- (هـ) العدد P للبتلات في زهرة .

الحل :

- (أ) الصفر وما بعده ، متصل (ب) 2, 3, ... متقطعة .
- (ج) أعزب ، متزوج ، مطلق ، منفصل ، أرمل ، متقطعة .
- (د) الصفر وما بعده ، متصل .
- (هـ) 0, 1, 2, ... متقطعة .

تقريب البيانات ، الرموز العلمية والأرقام المعنوية :

١ - ٤٨ قرب الأرقام التالية إلى درجة البقة المشار إليها :

أقرب مليون	3 502 378 (و)	أقرب مئة	3256 (أ)
أقرب وحدة	148.475 (ز)	أقرب نسبة من العشرة	5.781 (ب)
أقرب نسبة من المليون	0.000 098 501 (ج)	أقرب نسبة من ألف	0.0045 (ح)
أقرب عشرة	2184.73 (ط)	أقرب نسبة من مئة	46.7385 (د)
أقرب نسبة من المئة	43.875 00 (ي)	إلى رقين عشريين	125.9995 (هـ)

الحل :

(أ) 3300 (ب) 5.8 (ج) 0.004 (د) 46.74 (هـ) 126.00 (و) 4000 000 (ز) 148
(ح) 0.000 099 (ط) 2180 (ي) 43.88 .

٢ - ٤٩ عبر عن الأرقام التالية بدون استخدام قوى الرقم 10

(أ) 132.5×10^4 (ب) 418.72×10^{-5} (ج) 280×10^{-7} (د) 7300×10^6 (هـ) 3.487×10^{-4}
(و) 0.0001850×10^5

الحل :

(أ) 1325000 (ب) 0.004 187 2 (ج) 0.000 028 0 (د) 7 300 000 000 (هـ) 0.000 3487
(و) 18.50

١ - ٥٠ ماهو عدد الأرقام المعنوية في الأرقام التالية إذا افترضنا أن الأرقام قد سجلت بدقة :

(أ) 2.54 mm (د) 3.51 million litres (و) 378 people (ح) 4.50×10^{-3} km
(ب) 0.004 500 m (هـ) 10.000 100 m (ز) 378 g (ط) 500.8×10^3 kg
(ج) 3 510 000 litres (ي) 100.00 km

الحل : (أ) 3 (ب) 4 (ج) 7 (د) 3 (هـ) 8 (و) غير محدود (ز) 3 (ح) 3
(ط) 4 (ي) 5

١ - ٥١ ماهو الحد الأقصى للخطأ في القياسات التالية إذا افترضنا أنها مسجلة بدقة ؟ حدد عدد الأرقام المعنوية لكل رقم في كل حالة .

(أ) 7.20 million litres (ج) 5280 metres (هـ) 186 000 metres per second
(ب) 0.000 048 35 millimetres (د) 3.0×10^8 metres (و) 186 thousand metres per second

الحل :

- 0.5 m/s; 6 (أ) 0.5 m; 4 (ب) 0.005 million or 5000 litres; 3 (ج) 0.5 thousand or 500 m/s; 3 (د) 0.05×10^8 or 5×10^6 m; 2 (هـ) 0.000000005 or 5×10^{-9} mm; 4 (و)

١ - ٥٧ اكتب الأرقام التالية باستخدام الرموز العلمية ، مفترضاً أن جميع الأرقام معنوية إلا إذا ذكر غير ذلك .

(أ) 0.000317 (ب) 428 000 000 (أربعة أرقام معنوية)

(ج) 21 600.00 (د) 0.000 009810

(هـ) 732 ألف (و) 18.0 عشر الألف

الإجابة :

(أ) 3.17×10^{-4} (ب) 4.280×10^8 (ج) $2.160\,000 \times 10^4$ (د) 9.810×10^{-6}

(هـ) 7.32×10^5 (و) 1.80×10^{-3}

العمليات الحسابية :

١ - ٥٣ اشرح أن (أ) حاصل ضرب (ب) حاصل قسمة ، الرقبن 5.16 ، 72.48 مفترضاً أن أرقامها المعنوية هي أربعة وثلاثة على التوالي لا يمكن أن يكون دقيقاً لأكثر من ثلاثة أرقام معنوية ، اكتب ناتج الضرب وناتج القسمة لدرجة الدقة المسجلة .

الإجابة : (أ) 374 (ب) 14.0

١ - ٥٤ أجر العمليات الموضحة أدناه . مفترضاً أن الأرقام مسجلة بدقة ما لم يذكر خلاف ذلك .

(أ) 0.36×781.4 (ج) $5.78 \times 2700 \times 16.00$ (هـ) $\sqrt{120 \times 0.5386 \times 0.4614}$ (120 exact)

(ب) $\frac{873.00}{4.881}$ (د) $\frac{0.00480 \times 2300}{2084}$ (و) $\frac{(416\,000)(0.000\,187)}{\sqrt{73.84}}$

(ز) $14.8641 + 4.48 - 8.168 + 0.361\,25$

(ح) $4\,173\,000 - 170\,264 + 1820\,470 - 78\,320$ الأرقام مسجلة بدقة إلى 4, 6, 6, 6 رقماً معنوياً

(ط) $\sqrt{\frac{7(4.386)^2 - 3(6.47)^2}{6}}$ الأرقام 3, 6, 7 أرقام دقيقة (ي) $4.120 \sqrt{\frac{3.1416[(9.483)^2 - (5.075)^2]}{0.000\,198\,0}}$

الإجابة :

(a) 280 (two sig. fig.), or 2.8 hundred, or 2.8×10^2 . (b) 178.9. (c) 250 000 (three sig. fig.), or 250 thousand, or 2.50×10^5 . (d) 53.0. (e) 5.461. (f) 9.05. (g) 11.54. (h) 5 745 000 (four sig. fig.), or 5.745 thousand, or 5.745 million, or 5.745×10^6 . (i) 1.2. (j) 4157

٥٥ - احسب قيمة كل مما يل إذا كانت $U = -2, V = \frac{1}{2}, W = 3, X = -4, Y = 9, Z = \frac{1}{8}$ حيث يفترض أن جميع الأرقام دقيقة .

$$\begin{array}{llll} \frac{X-3}{\sqrt{(Y-4)^2 + (U-5)^2}} & (ح) & \sqrt{U^2 - 2UV + W} & (أ) \quad 4U + 6V - 2W \quad (أ) \\ X^3 + 5X^2 - 6X - 8 & (ط) & 3X(4Y - 3Z) - 2Y(6X - 5Z) - 25 & (و) \quad \frac{XYZ}{UVW} \quad (ب) \\ \frac{U-V}{\sqrt{U^2 + V^2}} [U^2 V(W+X)] & (ى) & \sqrt{\frac{(W-2)^2}{V} + \frac{(Y-5)^2}{Z}} & (ز) \quad \frac{2X}{UV} \cdot \frac{3Y}{XV} \quad (ج) \\ & & & (د) \quad 3(U-X)^2 + Y \end{array}$$

الإجابة :

$$\begin{array}{llll} -7/\sqrt{34}, \text{ or } -1.20049 \text{ approx.} & (ح) & 3 & (أ) \quad -11 \\ 32 & (ط) & -16 & (و) \quad 2 \\ 10/\sqrt{17}, \text{ or } 2.42536 \text{ approx.} & (ى) & \sqrt{98}, \text{ or } 9.89961 \text{ approx.} & (ز) \quad 35/8 \text{ or } 4.375 \\ & & & (د) \quad 21 \end{array}$$

النوال ، الجداول والاشكال البيانية :

٥٦ - ١ تتحدد قيمة المتغير Y من قيمة المتغير X طبقاً للمعادلة $Y = 10 - 4X$

- (أ) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ أظهر هذه النتائج في جدول
- (ب) أوجد قيمة Y إذا أخذت X القيم $-2.4, -1.6, -0.8, 1.8, 2.7, 3.5, 4.6$
- (ج) إذا كان اعتماد Y على X يعبر عنه بالعلاقة $Y = F(X)$ أوجد $F(2.8), F(-5), F(\sqrt{2}), F(-\pi)$
- (د) ماهى قيمة X المقابلة لقيم Y المساوية لـ $-2, 6, -10, 1.6, 16, 0, 10$ ؟
- (هـ) عبر عن X كدالة صريحة في Y .

الإجابة :

$$\begin{array}{ll} -1.2, 30, 10 - 4\sqrt{2} = 4.34 \text{ approx.}, 10 + 4\pi = 22.57 \text{ approx.} & (ج) \quad 22, 18, 14, 10, 6, 2, -2, -6, -10 \quad (أ) \\ X = \frac{1}{4}(10 - Y) & (هـ) \quad 3, 1, 5, 2.1, -1.5, 2.5, 0. \quad (د) \quad 19.6, 16.4, 13.2, 2.8, -0.8, -4, -8.4. \quad (ب) \end{array}$$

٥٧ - ١ إذا كانت $Z = X^2 - Y^2$ أوجد قيمة Z عندما :

$$\begin{array}{ll} X = 1, Y = 5 & (ب) \quad X = -2, Y = 3 \quad (أ) \\ F(-3, -1) & (ج) \quad Z = F(X, Y) \text{ أوجد} \\ 8 & (ج) \quad -24 \quad (ب) \quad -5 \quad (أ) \end{array}$$

الإجابة :

١ - ٥٨ إذا كانت $W = 3XZ - 4Y^2 + 2XY$ أوجد W عندما (أ) $X = 1, Y = -2, Z = 4$

(ب) $X = -5, Y = -2, Z = 0$ إذا استخدمنا الرمز الدالي $W = F(X, Y, Z)$ أوجد $F(3, 1, -2)$

الإجابة : (أ) -8 (ب) 4 (ج) -16

١ - ٥٩ عين باستخدام نظام الاحداثيات المتعامدة النقط التي احداثياتها :

(أ) $(3, 2)$ (ب) $(2, 3)$ (ج) $(-4, 4)$ (د) $(4, -4)$

(هـ) $(-3, -2)$ (و) $(-2, -3)$ (ز) $(-4.5, 3)$ (ح) $(-1.2, -2.4)$

(ط) $(0, -3)$ (ى) $(1.8, 0)$

١ - ٦٠ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 10 - 4x$ (أنظر المسألة ١ - ٥٦)

(ب) $y = 2x + 5$ (ج) $y = \frac{1}{3}(x-6)$ (د) $2x + 3y = 12$ (هـ) $3x - 2y = 6$

١ - ٦١ عبر بيانياً عن المعادلات (أ) $y = 2x^2 + x - 10$ (ب) $y = 6 - 3x - x^2$

١ - ٦٢ عبر بيانياً عن المعادلة $y = x^3 - 4x^2 + 12x - 6$

١ - ٦٣ الجدول التالي يوضح عدد العاملين بالزراعة وغير العاملين بها بالولايات المتحدة الأمريكية في الأعوام 1950 - 1840

عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام (أ) الخطوط البيانية (ب) خرائط الأعمدة البيانية

(ج) خرائط الأعمدة البيانية المجهزة .

السنة	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
العامل الزراعيين (بالمليون)	3.7	4.9	6.2	6.9	8.6	9.9	10.9	11.6	11.4	10.5	8.8	6.8
العامل غير الزراعيين (بالمليون)	1.7	2.8	4.3	6.1	8.8	13.4	18.2	25.8	31.0	38.4	42.9	52.2

١ - ٦٤ رسماً تصويرياً ملائماً لإظهار التغيرات في أعداد

(أ) العمال الزراعيين (ب) العمال غير الزراعيين

في بيانات المسألة السابقة . هل يمكنك تصميم رسم تصويري يظهر التغيرات في كل من (أ) ، (ب) معاً ؟ .

١ - ٦٥ باستخدام بيانات المسألة ١ - ٦٣ ارسم شكلاً بيانياً يوضح النسب المئوية للعاملين

(أ) الزراعيين (ب) غير الزراعيين . هل يمكنك تصميم شكل بياني يظهر كلا من (أ) ، (ب) في نفس الوقت ؟

١ - ٦٦ الجدول التالي يظهر معدل المواليد والوفيات لكل 1000 من السكان بالولايات المتحدة في الأعوام 1955 و 1915 عبر بيانياً عن هذه البيانات باستخدام شكل بياني مناسب .

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6
معدل الوفيات لكل 1000 من السكان	13.2	13.0	11.7	11.3	10.9	10.8	10.6	9.6	9.3

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والخدمات

١ - ٦٧ الجدول التالي يبين ارتفاعات أعلى سبعة مباني ومنشآت في العالم . ارسم هذه البيانات مستخدماً شكلاً بيانياً مناسباً .

المسكن	الارتفاع بالامتار	المبنى أو المنشأة
نيويورك	381	مبنى « الأمبرست »
نيويورك	319	مبنى « كريزلر »
باريس	300	برج إيفل
نيويورك	290	مبنى « وول ستريت »
نيويورك	283	بنك مانهاتن
نيويورك	259	مبنى « R.C.A. مركز روكفلر »
نيويورك	241	مبنى « وولورث »

١ - ٦٨ الجدول التالي يظهر السرعة المدارية لكواكب المجموعة الشمسية . ارسم هذه البيانات :

الكوكب	عطارد	الزهرة	الأرض	المريخ	المشتري	زحل	أورانوس	نبتون	بلوتو
السرعة (km/s)	47.8	35.1	29.8	24.1	13.0	9.7	6.8	5.5	4.8

١ - ٦٩ الجدول التالي يبين الحالة الاجتماعية للذكور والإناث (14 سنة فأكثر) بالولايات المتحدة في عام 1958 . عبر عن هذه البيانات بيانياً باستخدام رسمين دائريين لهما نفس القطر

الحالة الاجتماعية	الذكور (نسبة مئوية من المجموع)	الإناث (نسبة مئوية من المجموع)
أعزب	24.5	18.8
متزوج	69.8	66.0
أرمل	3.9	12.8
مطلق	1.8	2.3

المصدر : مكتب التعداد .

١ - ٧٠ الجدول التالي يبين المساحة بمليون الكيلومترات المربعة لمحيطات العالم . ارسم هذه البيانات مستخدماً : (أ) الأعمدة البيانية (ب) الرسوم الدائرية .

المحيط	المهادى	الأطلنطى	الهندي	القطبى الجنوبى	القطبى الشمالى
المساحة مليون km ²	183.4	106.7	73.8	19.7	12.4

المعادلات :

٧١ - ١ حل المعادلات التالية :

$$3[2(X + 1) - 4] = 10 - 5(4 - 2X) \quad (أ) \quad 4(X - 3) - 11 = 15 - 2(X + 4) \quad (ج) \quad 16 - 5c = 36 \quad (١)$$

$$\frac{1}{3}(12 + Y) = 6 - \frac{1}{4}(9 - Y) \quad (د) \quad 3(2U + 1) = 5(3 - U) + 3(U - 2) \quad (ب) \quad 2Y - 6 = 4 - 3Y \quad (ج)$$

$$\text{الحل : } (أ) -4 \quad (ب) 2 \quad (ج) 5 \quad (د) \frac{3}{4} \quad (١) 1 \quad (ج) -7$$

٧٢ - ١ حل كل من مجموعة المعادلات الآتية التالية :

$$\left. \begin{array}{l} 5A - 9B = -10 \\ 3A - 4B = 16 \end{array} \right\} (د) \quad \left. \begin{array}{l} 8X - 3Y = 2 \\ 3X + 7Y = -9 \end{array} \right\} (ج) \quad \left. \begin{array}{l} 3a + 5b = 24 \\ 2a + 3b = 14 \end{array} \right\} (ب) \quad \left. \begin{array}{l} 2a + b = 10 \\ 7a - 3b = 9 \end{array} \right\} (أ)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3U - 5V + 6W = 7 \\ 5U + 3V - 2W = -1 \\ 4U - 8V + 10W = 11 \end{array} \right\} (ز) \quad \left. \begin{array}{l} 5X + 2Y + 3Z = -5 \\ 2X - 3Y - 6Z = 1 \\ X + 5Y - 4Z = 22 \end{array} \right\} (و) \quad \left. \begin{array}{l} 2a + b - c = 2 \\ 3a - 4b + 2c = 4 \\ 4a + 3b - 5c = -8 \end{array} \right\} (أ)$$

الحل :

$$X = -0.2, Y = -1.2 \quad (ج) \quad a = -2, b = 6 \quad (ب) \quad a = 3, b = 4 \quad (أ)$$

$$4 = 184/7 = 26.28571 \text{ approx.}, B = 110/7 = 15.71429 \text{ approx.} \quad (د)$$

$$U = 0.4, V = -0.8, W = 0.3 \quad (ز) \quad X = -1, Y = 3, Z = -2 \quad (و) \quad a = 2, b = 3, c = 5 \quad (أ)$$

٧٣ - ١ (أ) عبر بيانياً عن المعادلات $5x + 2y = 4$ and $7x - 4y = 23$ مستخدماً نفس الأحداثيات .

(ب) من الرسم أوجد الحل الآتي للمعادلتين .

(ج) استخدم نفس الطريقة للحصول على الحل الآتي للمعادلات (أ) - (د) بالمسألة ٧٢ - ١ .

$$\text{الحل : } (ب) (2, -3), \text{ i.e. } x = 2, y = -3$$

٧٤ - ١ (أ) استخدم الرسم البيانى للمسألة ٦١ - ١ لإيجاد حل المعادلة $2x^2 + x - 10 = 0$ (ملحوظة : أوجد قيمة x من تقاطع القطع المكافئ مع محور x أى عندما $y = 0$).(ب) استخدم الطريقة الموضحة في (أ) لإيجاد حل المعادلة $3x^2 - 4x - 5 = 0$.

$$\text{الحل : } (أ) 2.5, -2 \quad (ب) (تقريباً) 2.1, -0.8$$

٧٥-١ حل المعادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$ معطى بصيغة الدرجة الثانية $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

استخدم هذه الصيغة لإيجاد حل

(ب) $2x^2 + x - 10 = 0$

(أ) $3x^2 - 4x - 5 = 0$

(د) $x^2 + 8x + 25 = 0$

(ج) $5x^2 + 10x = 7$

الحل (أ) $\frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$ or 2.12 and -0.79 approx (ب) $2, -2.5$ (ج) (تقريباً) $0.549, -2.549$

(د) $\frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{36} \sqrt{-1}}{2} = \frac{-8 \pm 6\sqrt{-1}}{2} = -4 \pm 3\sqrt{-1} = -4 \pm 3i$

حيث $i = \sqrt{-1}$ هذه الجذور هي أرقام مركبة ولن تظهر إذا استخدمنا الرسوم البيانية .

المتباينات :

٧٦-١ باستخدام رموز المتباينات رتب الأعداد $1.5, -1.52, 2.37, -6.15, -4.3$ حسب قيمتها (أ) ترتيباً تصاعدياً (ب) ترتيباً تنازلياً .

الحل (أ) $2.37 > 1.52 > -1.5 > -4.3 > -6.15$ (ب) $-6.15 < -4.3 < -1.5 < 1.52 < 2.37$

٧٧-١ استخدم رموز المتباينات للتعبير عن الجمل التالية

(أ) عدد الأطفال N يقع بين 30 , 50 متضمناً العددين 30 , 50

(ب) المجموع S لعدد النقاط التي تظهر على زهرق طاولة لا يقل عن 7

(ج) X أكبر من أن يساوي 4 - ولكن أقل من 3

(د) أقصى قيمة لـ P هي 5

(هـ) X لا تزيد عن Y بأكثر من 2

الحل : (أ) $30 \leq N \leq 50$, (ب) $S \geq 7$, (ج) $4 \leq X < 3$, (د) $P \leq 5$, (هـ) $X - Y > 2$

٧٨-١ حل كل من المتباينات التالية :

(أ) $3x \geq 12$ (ب) $3 + 5(Y - 2) \leq 7 - 3(4 - Y)$ (ج) $2 \leq 3 + \frac{1}{2}(a - 12) < 8$

(ب) $4x < 5x - 3$ (د) $-3 \leq \frac{1}{2}(2x + 1) \leq 3$

(ج) $2N + 15 > 10 + 3N$ (و) $0 < 4(15 - 5N) \leq 12$

الحل : $a < 22$, $2 \leq a < 22$ (ز) $-1.8 \leq N < 3$, (ح) $-8 \leq X \leq 7$, (ط) $Y \leq 1$, (د) $N < 5$, (ج) $X > 3$, (ب) $X \geq 4$, (أ) $X \geq 4$

اللوغاريتمات :

٧٩ - أوجد اللوغاريتم المعتاد لكل من الأعداد التالية :

$$\begin{array}{llllll} 0.00098 \text{ (ك)} & 7.146 \text{ (ط)} & 476.3 \text{ (ز)} & 0.6042 \text{ (أ)} & 0.0792 \text{ (ج)} & 387 \text{ (أ)} \\ 84.620000 \text{ (ل)} & 71.46 \text{ (ي)} & 1.007 \text{ (ح)} & 0.002795 \text{ (و)} & 14630 \text{ (د)} & 0.387 \text{ (ب)} \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllll} 6.9912-10 \text{ (ك)} & 0.8541 \text{ (ط)} & 2.6779 \text{ (ز)} & 9.7812-10 \text{ (أ)} & 8.8987-10 \text{ (ج)} & 2.5877 \text{ (أ)} \\ 7.9275 \text{ (ل)} & 1.8541 \text{ (ي)} & 0.0030 \text{ (ح)} & 7.4464-10 \text{ (و)} & 4.1653 \text{ (د)} & 9.5877 \text{ (ب)} \end{array}$$

٨٠ - أوجد العدد المقابل للوغاريتم الأعداد التالية :

$$\begin{array}{llllll} 0.0800 \text{ (ط)} & 2.8003 \text{ (ز)} & 2.4700 \text{ (أ)} & 1.7045 \text{ (ج)} & 3.5611 \text{ (أ)} \\ 6.3841 \text{ (ي)} & 3.7072 \text{ (ح)} & 6.4700-10 \text{ (و)} & 8.9266-10 \text{ (د)} & 9.8293-10 \text{ (ب)} \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{llllll} 1.202 \text{ (ط)} & 0.06314 \text{ (ز)} & 295.1 \text{ (أ)} & 50.64 \text{ (ج)} & 3640 \text{ (أ)} \\ 2.422000 \text{ (ي)} & 5096 \text{ (ح)} & 0.0002951 \text{ (و)} & 0.08445 \text{ (د)} & 0.675 \text{ (ب)} \end{array}$$

٨١ - احسب قيمة ما يلي باستخدام اللوغاريتمات

$$\begin{array}{llll} \sqrt[3]{(21.63)(33.81)(47.53)(65.28)(87.47)} \text{ (ح)} & \frac{(0.3854)^4(12.48)^2}{(0.04382)^3} \text{ (أ)} & (783.6)(1054) \text{ (أ)} \\ \sqrt{\frac{(48.79)(0.00574)^3}{(2.143)^5}} \text{ (ط)} & 0.04182 \sqrt{0.6758} \text{ (و)} & \frac{21.7}{378.2} \text{ (ب)} \\ \frac{3.781}{0.01873} \sqrt{\frac{(43.25)(0.08743)}{(0.002356)(6.824)}} \text{ (ي)} & \sqrt[3]{3728} \text{ (ز)} & \frac{(0.04556)(624.1)}{(14.32)(0.003572)} \text{ (ج)} \\ & & (1.562)^{15} \text{ (د)} \end{array}$$

الحل :

$$\begin{array}{l} 1296000 \text{ أو } 1.296 \times 10^6 \text{ (ب) } 0.05739 \text{ أو } 0.0574 \text{ إلى ثلاثة أرقام معنوية (ج) } 556.0 \\ 804.4 \text{ (أ) } 40820 \text{ (و) } 0.03438 \text{ (ز) } 15.51 \text{ (ح) } 45.67 \text{ (ط) } 4.519 \times 10^{-4} = 0.0004519 \\ \text{أو } 4.52 \times 10^{-4} \text{ إلى ثلاثة أرقام معنوية (ي) } 3096 \end{array}$$

٨٢ - ارسم (أ) $y = \log x$ (ب) $y = 10^x$. ناقش التشابه بين الشكلين .

٨٣ - أكتب المعادلة (أ) $2 \log X - 3 \log Y = 2$ (ب) $\log Y + 2X = \log 3$ بصورة خالية من اللوغاريتمات

الحل : (أ) $X^2 = 100Y^3$ (ب) $Y = 3(10^{-2X})$

٨٤ - إذا كانت $a^p = N$ ، حيث a ، p أرقام موجبة ، $a \neq 1$ فإننا نسمى p لوغاريتم N للأساس a ونكتب $p = \log_a N$ احسب :

(أ) $\log_2 8$ (ب) $\log_{25} 125$

(ج) $\log_4 1/16$ (د) $\log_{1/2} 32$

(هـ) $\log_5 1$

الحل :

(أ) 3 (ب) $3/2$ (ج) -2 (د) -5 (هـ) 0

٨٥ - اضع أن $N = 2.303 \log_{10} N$ تقريباً ، حيث $e = 2.71828 \dots$ تسمى بالأساس الطبيعي للوغاريتم حيث $N > 0$.

٨٦ - اضع أن $(\log_b a)(\log_a b) = 1$ حيث $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

الفصل الثاني

التوزيعات التكرارية

البيانات الخام

البيانات الخام هي بيانات جمعت ولكنها غير منتظمة عدديا . مثال ذلك مجموعة أوزان 100 طالب استخرجت من سجلات جامعة حسب الترتيب الأبجدي لأسمائهم .

المفردات المنظومة

المنظومة هي ترتيب للبيانات الرقمية الخام ترتيبا تصاعديا أو تنازليا حسب قيمها . الفرق بين الرقم الأكبر والرقم الأصغر يسمى مدى البيانات . على سبيل المثال ، إذا كان أكبر الطلبة وزنا في المائة طالب هو 74 kg وأقلهم وزناً هو 60 kg فإن المدى هو $74 - 60 = 14$ kg .

التوزيعات التكرارية

عند تلخيص أعداد كبيرة من البيانات الخام فإنه من المفيد توزيعها على فئات أو طوائف وتحديد عدد الأشخاص الذين ينتمون لكل فئة ويسمى هذا العدد بتكرار الفئة .

الجدول المنظم على صورة فئات يقابل كل فئة تكرارها يسمى بالتوزيع التكراري أو الجدول التكراري . ويمثل الجدول ١ - ٢ توزيع تكراري لأوزان (مقسمة إلى أقرب kg) 100 طالب من طلبة جامعة XYZ .

الفئة أو الطائفة الأولى على سبيل المثال تشتمل على الأوزان من 60 kg إلى 62 kg . ويعبر عنها بالرمز 60 - 62 . وبما أن عدد الطلبة الذين ينتمون إلى هذه الفئة هم 5 طلبة فإن التكرار المقابل لهذه الفئة هو 5 .

جدول ١ - ٢

أوزان 100 طالب من طلبة جامعة XYZ

الأوزان (كيلو جرامات)	عدد الطلبة
60-62	5
63-65	18
66-68	42
69-71	27
72-74	8
	100 المجموع

تسمى البيانات المنظمة والمملخصة كما في التوزيع التكرارى أعلاه بالبيانات المجمعة وعلى الرغم من أن عملية التجميع تؤدي بشكل عام إلى ضياع كثير من تفصيلات البيانات الأصلية فإن الفائدة الهامة منها هي الصورة العامة التي يمكن الحصول عليها والعلاقات الأساسية التي تظهر بالتالي أكثر وضوحا .

فترة الفئات وحدود الفئات

الرمز الذي يعبر عن الفئة مثل 62 — 60 في الجدول أعلاه يسمى بفترة الفئة . الرقمان 60 و 62 يسميان حدود الفئة . الرقم الأصفر 60 يسمى الحد للفئة الأدنى والرقم الأكبر 62 يسمى الحد الأعلى للفئة . المصطلح فئة وفترة الفئة يستخدمان في أغلب الأحيان للدلالة على نفس المعنى على الرغم من أن فترة الفئة هي في الحقيقة رمز لفئة .

وفترة الفئة التي ، من الناحية النظرية على الأقل ، ليس لها أما حد الفئة الأعلى أو حد الفئة الأدنى تسمى بفترة فئة مفتوحة . على سبيل المثال إذا أخذنا مجموعة أعمار لأشخاص فإن فترة الفئة « 65 سنة فأكثر » هي فترة فئة مفتوحة .

الحدود الحقيقية للفئات

إذا كانت الأوزان سجلت إلى أقرب kg فإن فترة الفئة 62 — 60 تتضمن من الناحية النظرية كل القياسات من 59.5000 ... kg إلى 62.5000 ... kg . هذه الأرقام إذا عبرنا عنها باختصار بالأرقام الصحيحة 59.5, 62.5 تسمى بالحدود الحقيقية للفئة . الرقم الأصفر 59.5 هو الحد الأدنى الحقيقي للفئة والرقم الأكبر وهو 62.5 هو الحد الأعلى الحقيقي للفئة .

ومن الناحية العملية فإن الحدود الحقيقية للفئة يمكن الحصول عليها بجمع الحد الأعلى لفترة فئة والحد الأدنى لفترة الفئة التالية لها والقسم على 2 .

في بعض الأحيان تستخدم الحدود الحقيقية للفئات كرمز للفئات . مثال ذلك ، الفئات المختلفة بالعمود الأول في الجدول ٢ - ١ يمكن التعبير عنها بالصورة 65.5 — 62.5, 62.5 — 59.5 وهكذا ولتلافى الغموض باستخدام هذه الرموز فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب أن لا تتطابق مع أحد القيم الفعلية . فلو كان لدينا القيمة 62.5 فإنه يكون من الصعب تقرير ما إذا كانت تنتمي إلى الفئة 62.5—59.5 أو 65.5—62.5 .

حجم أول طول فترة الفئة

حجم أو طول فترة الفئة هو الفرق بين الحد الأدنى الحقيقي والحد الأعلى الحقيقي للفئة ويسمى أيضا طول الفئة ، حجم الفئة أو طول الفئة . إذا كانت جميع الفئات في التوزيع التكرارى لها نفس الطول فإن الطول المشترك يرمز له بالرمز c .

وفي هذه الحالة فإن c هو الفرق بين الحدين الأدنىين لفئتين متتاليتين . أو الحدين الأعلىين لفئتين متتاليتين . مثال ذلك لو أخذنا بيانات الجدول ٢ - ١ فإن طول الفئة هو $c = 62.5 - 59.5 = 65.5 - 62.5 = 3$.

مركز الفئة

مركز الفئة هو منتصف فترة الفئة وتحصل عليه بجمع الحد الأدنى والحد الأعلى للفئة وتقسيم المجموع على اثنين . فمركز الفئة $60-62$ هو $(60 + 62)/2$. ويسمى مركز الفئة أيضا بمنتصف الفئة .

ويهدف مزيد من التحليل الرياضي فإنه يفترض أن جميع القراءات الموجودة داخل فترة فئة تأخذ قيما تتطابق مع مركز الفئة . بهذا فإن جميع الأوزان داخل الفئة $60-62$ kg تعتبر كما لو أنها 61 kg .

قواعد عامة لتكوين التوزيعات التكرارية

- ١ - حدد أكبر قيمة وأقل قيمة في البيانات الخام ومنها أوجد المدى (الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم) .
- ٢ - قسم المدى إلى عدد مناسب من الفئات المتساوية الطول . إذا لم يكن ذلك ممكنا استخدم فئات ذات أطوال مختلفة أو فئات مفتوحة (أنظر المسألة ٢ - ١٢) . وتأخذ عدد الفئات عادة بين 5, 20 حسب البيانات . وتختار الفئات أيضا بحيث يتفق مركز الفئة مع المشاهدات الفعلية . وهذا يؤدي إلى التقليل من أخطاء التجميع عند اجراء مزيد من المعالجة الرياضية . وعلى أية حال فإن الحدود الحقيقية للفئات يجب ألا تتفق مع بيانات مشاهدة فعلا .
- ٣ - حدد عدد المشاهدات التي تقع في كل فترة فئة . أي حدد تكرار كل فئة . وأحسن طريقة لأداء ذلك هو استخدام كشف الحزم أو النقط (أنظر المسألة ٢ - ٨) .

المدرجات التكرارية والمضلعات التكرارية :

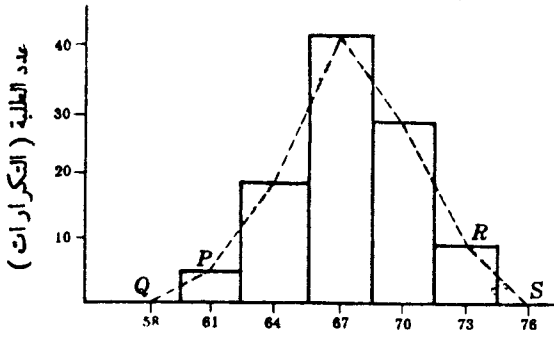
هنا طريقتان في الرسم البياني للتعبير عن التوزيعات التكرارية .

١ - المدرج التكرارى أو مدرج التكرارات يتكون من مجموعة من المستطيلات لها :

- (أ) قاعدة على المحور الأفقى (محور x) مراكزها عند مركز الفئة وطول القاعدة يساوى طول فترة الفئة .
- (ب) مساحة متناسبة مع تكرارات الفئات .

وإذا كانت الفئات كلها لها نفس الطول فإنه من المعتاد أن تأخذ الارتفاعات مساوية لتكرارات الفئات . أما إذا كانت الفئات غير متساوية الطول فإن هذه الأطوال يجب أن تعدل (أنظر المسألة ٢ - ١٣) .

٢ - المضلع التكرارى • هو خط بياني لتكرار الفئة المقابلة لمركز الفئة . ويمكن رسمه بإيصال نقاط تنصيف رؤوس المستطيلات المكونة للمدرج التكرارى .



الأوزان (بالكيلوجرامات)

شكل ٢ - ١

المدرج التكرارى والمضلع التكرارى لبيانات التوزيع التكرارى للأوزان موضحان على نفس الاحداثيات فى الشكل ٢ - ١ . من المعتاد أن نضيف الوصلتين PQ و RS إلى ما بعد مركز الفئة الدنيا ومركز الفئة العليا ونعتبر أن التكرارات المقابلة لها صفر . وفى هذه الحالة فإن مجموع مساحات المستطيلات فى المدرج التكرارى تتساوى مع المساحة الكلية المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .
(أنظر المسألة ٢ - ١١) .

التوزيع التكرارى النسبى

التكرار النسبى لفئة هو تكرار الفئة مقسوما على التكرار الكلى لجميع الفئات وعادة يعبر عنه كنسبة مئوية . فعلى سبيل المثال فإن التكرار النسبى للفئة 66—68 فى الجدول (٢ - ١) هو $42\% = \frac{42}{100}$. مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات هو 1 أو 100% .

إذا استبدلنا التكرارات فى الجدول التكرارى السابق بما يقابلها من التكرارات النسبية فإن الجدول الناتج يسمى بالتوزيع التكرارى النسبى أو توزيع النسب المئوية أو جداول التكرارات النسبية .

التمثيل البيانى للتوزيع التكرارى النسبى يمكن الحصول عليه من المدرج التكرارى أو المضلع التكرارى وذلك بإبدال تدريج المحور الرأسى من التكرارات إلى التكرارات النسبية وهذا لن يغير فى الشكل نفسه . ويسمى الشكل الناتج بمدرج التكرارات النسبية أو المدرج التكرارى للنسب المئوية وكذلك المضلع التكرارى النسبى أو المضلع التكرارى للنسب المئوية .

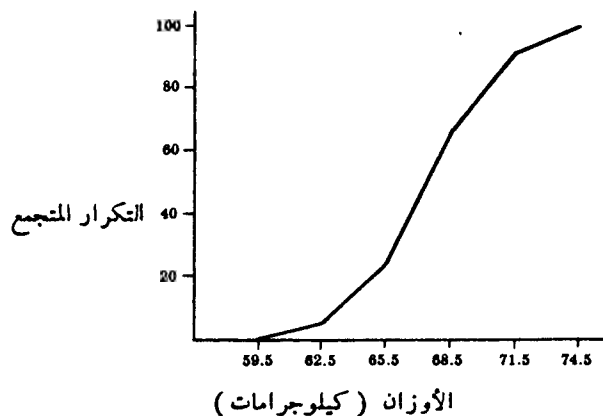
التوزيع التكرارى المتجمع • والمنحنى التكرارى المتجمع

مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأعلى الحقيقى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع إلى هذه الفئة والمتضمن تكرارها أيضا . وعلى سبيل المثال فى الجدول ١ - ٢ فإن التكرار المتجمع إلى الفئة 68 — 66 والمتضمن تكرارها أيضا هو $65 = 5 + 18 + 42$ وهذا يعنى أن 65 طالبا أوزانهم تقل عن 68.5 kg .

والجدول الذى يمثل التكرارات المتجمعة يسمى بالتوزيع المتجمع أو جدول التكرارات المتجمعة أو باختصار التوزيع - المتجمع ومثال له الجدول ٢ - ٢ لتوزيع أوزان الطلبة .

جدول ٢ - ٢

عدد الطلبة	الأوزان (كيلوجرامات)
0	أقل من 59.5
5	أقل من 62.5
23	أقل من 65.5
65	أقل من 68.5
92	أقل من 71.5
100	أقل من 74.5



شكل ٢ - ٢

والشكل البياني الذي يظهر التكرارات المتجمعة إلى أقل من الحد الأعلى الحقيقي لأي فئة بالمقابلة للحد الأعلى الحقيقي للفئات يسمى بالمضلع التكراري المتجمع أو المنحنى التكراري كما هو موضح بالشكل ٢ - ٢ والخاس بتوزيع أوزان الطلبة .

وفي بعض الأحيان قد يكون من المرغوب فيه الحصول على التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأدنى الحقيقي لكل فئة . وحيث أننا نعتبر في هذه الحالة الأوزان 59.5 kg أو أكثر ، 62.5 kg أو أكثر وهكذا . فإن هذا يسمى أحيانا التوزيع المتجمع على أساس « أو أكثر من » بينما التوزيع الذي ذكرناه سابقا يسمى التوزيع المتجمع على أساس « الأقل من » . ومن السهل الحصول على أحدهما من الآخر (أنظر المسألة ٢ - ١٥) . وشكل التكرار المتجمع يسمى تبعا لذلك المنحنى التكراري الصاعد « أقل من » في الحالة الأولى والمنحنى التكراري النازل « أو أكثر » . ولكن عندما نشير إلى التوزيع التكراري المتجمع أو المنحنى التكراري المتجمع بدون توصيف فإن هذا يتضمن أن الأساس هو « الأقل من » .

التوزيع التكراري المتجمع النسبي • المنحنى المتجمع للنسب المئوية

التوزيع التكراري المتجمع النسبي أو التكرار المتجمع المئوي . هو التكرار المتجمع مقسوما على التكرار السكلي . مثال ذلك فإن التكرار النسبي للأوزان الأقل من 68.5 kg هو $65/100 = 65\%$ وهذا يعني أن 65% من الطلبة أوزانهم أقل من 68.5 kg .

إذا استغلنا التكرارات المتجمعة النسبية في الجدول ٢ - ٢ والشكل ٢ - ٢ بدلا من التكرارات المتجمعة فإن النتيجة تسمى بالتوزيع التكراري المتجمع النسبي أو بالتوزيع المتجمع للنسب المئوية أو المضلع التكراري المتجمع النسبي أو المنحنى التكراري المتجمع للنسب المئوية .

المنحنى التكرارى • تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع

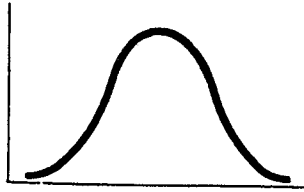
يمكن اعتبار البيانات المجمعة كمينة مسحوبة من مجتمع أكبر . وبما أن هناك عددا كبيرا من المشاهدات في المجتمع فإنه من الممكن من الناحية النظرية (للبيانات المتصلة) اختيار فترة الفئة صغيرة جدا ويظل لدينا عدد ملموس من المشاهدات تقع في داخل كل فئة . وبهذا فإنه من المتوقع أن يتكون المصطلح التكرارى أو المصطلح التكرارى النسبى للمجموعات الكبيرة من عدد كبير من الخطوط الصغيرة المتكررة والتي يمكن تقريبها بمنحنى ، ويسمى هذا المنحنى بالمنحنى التكرارى أو المنحنى التكرارى النسبى على التوالى .

ومن المنطقي أن نتوقع أن مثل هذه المنحنيات النظرية يمكن الحصول على تقريب لها باستخدام المدرج التكرارى أو المدرج التكرارى النسبى للعينة بعد تمهيده .

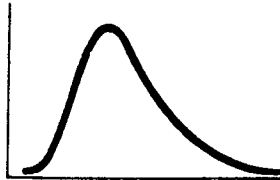
وتزيد درجة الدقة في التقريب بزيادة حجم العينة . ولهذا السبب فإن المنحنى التكرارى يسمى أحيانا المدرج التكرارى الممهّد . وبنفس الطريقة فإن المنحنى التكرارى المتجمع الممهّد نحصل عليه بتمهيد المدرج التكرارى المتجمع أو المنحنى التكرارى المتجمع . ومن المعتاد أن يكون تمهيد المنحنى المتجمع أكثر سهولة من تمهيد المدرج التكرارى (أنظر المسألة ٢ - ١٨) .

اشكال المنحنيات التكرارية

المنحنيات التكرارية التي تظهر في الناحية العملية تأخذ أشكالا مميزة كما هو موضح بالشكل ٢ - ٣ .



المبائل أو الشكل الناقوسى



ملتو إلى اليمين
(التواء موجب)



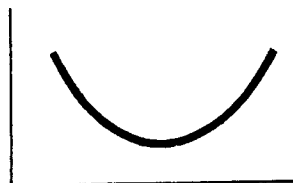
ملتو إلى اليسار
(التواء سالب)



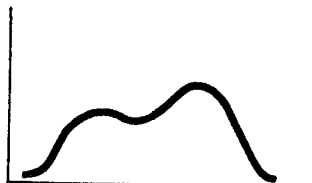
المنحنى الرأى



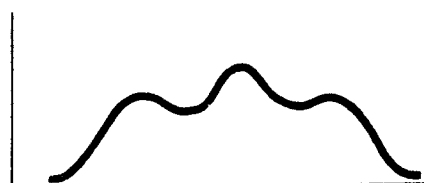
المنحنى الرأى المعكوس



المنحنى التوى



منحنى ذو قمتين .



منحنى متعدد القيم

(أ) المنحنى التكرارى المماثل أو ذو الشكل الناقوسى يتميز بأن المشاهدات المتساوية البعد عن مركز النهاية العظمى لها نفس التكرارات . ومن الأمثلة الهامة له المنحنى المعتدل .

(ب) المنحنيات التكرارية متوسطة علم المماثل أو الالتواء تتميز بأن أحد طرفيها يمتد أكثر من الآخر على جانبى مركز النهاية العظمى . إذا كان الطرف (الأيمن) أطول فيكون المنحنى فى هذه الحالة ملتوياً إلى اليمين أو ملتوياً التواء موجباً . بينما لو كان العكس صحيحاً فإن المنحنى يكون ملتوياً إلى اليسار أو ملتوياً التواء سالباً .

(ج) فى المنحنيات ذات الشكل الرأى أو الشكل الرأى المعكوس فإن نقطة النهاية العظمى للمنحنى تقع عند أحد طرفى المنحز .

(د) المنحنى التوفى له نهاية عظمى عند كل من طرفيه .

(هـ) المنحنى ذو القيمتين له نهايتان عظميان .

(و) المنحنى متعدد القيم له أكثر من نهايتين عظميتين .

مسائل محلولة

المفردات المنظومة

١ - ٢ (أ) رتب الأرقام 17, 45, 38, 27, 6, 48, 11, 57, 34, 22 فى منظومة ، ثم
(ب) حدد الملى .

الحل :

(أ) بترتيبها تصاعدياً حسب قيمها تكون المنظومة 6, 11, 17, 22, 27, 34, 38, 45, 48, 57

بترتيبها تنازلياً حسب قيمها تكون المنظومة 57, 48, 38, 34, 27, 22, 17, 11, 6

(ب) بما أن الرقم الأصغر هو 6 والرقم الأكبر هو 57 فإن الملى هو $57 - 6 = 51$.

٢ - ٢ درجات 80 طالباً فى مادة الرياضة فى جامعة ولاية مسجلة بالجدول التالى

68	84	75	82	68	90	62	88	76	93
73	79	88	73	60	93	71	59	85	75
61	65	75	87	74	62	95	78	63	72
66	78	82	75	94	77	69	74	68	60
96	78	89	61	75	95	60	79	83	71
79	62	67	97	78	85	76	65	71	75
65	80	73	57	88	78	62	76	53	74
86	67	73	81	72	63	76	75	85	77

جدول ٢ - ٤

50-54	53
55-59	57, 59
60-64	60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 63, 63
65-69	65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69
70-74	71, 71, 71, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74
75-79	75, 75, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79
80-84	80, 81, 82, 82, 83, 84
85-89	85, 85, 85, 86, 87, 88, 88, 88, 89
90-94	90, 93, 93, 94
95-99	95, 95, 96, 97

من الجدول ٢ - ٤ يكون من الأسهل نسبياً الإجابة على هذه الأسئلة . حيث

(أ) أكبر درجة : 97

(ب) أقل درجة : 53

(ج) المدى $97 - 53 = 44$

(د) درجات أعلى خمسة طلبة من حيث الترتيب : 97, 96, 95, 95, 94

(هـ) درجات أقل خمسة طلبة من حيث الترتيب : 53, 57, 59, 60, 60

(و) درجة الطالب الذى ترتيبه العاشر من أعلى : 88

(ز) عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجة 75 فأكثر : 44

(ح) عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات أقل من 85 : 63

(ط) نسبة الطلبة الحاصلين على درجات أعلى من 65 ولكن ليست أعلى من 85 : $49/80 = 61.2\%$

(ي) الأرقام التى لم تظهر هى 0 وكذلك 52, 54, 55, 56, 58, 64, 70, 91, 92, 98, 99, 100 .

التوزيعات التكرارية والمدرجات والمضلعات التكرارية

٢ - ٣ يبين الجدول ٢ - ٥ التوزيع التكرارى للأجور الشهرية بالجنينيات الاسترلينية لـ 65 عاملاً فى شركة P and R

حدد باستخدام هذا الجدول :

(أ) الحد الأدنى للفتة السادسة ج : £ 100.00

(ب) الحد الأعلى للفتة الرابعة ج : £89.99

(ج) مركز الفئة (أو منتصف الفئة) الثالثة . مركز الفئة الثالثة

جول ٥ - ٢

$$\frac{1}{2}(\pounds 70.00 + \pounds 79.99) = \pounds 74.9995$$

ولكثير من الأغراض العملية يقرب هذا الرقم إلى $\pounds 75.00$.

عدد العاملين	الاجور
8	£50.00-£59.99
10	60.00- 69.99
16	70.00- 79.99
14	80.00- 89.99
10	90.00- 99.99
5	100.00-109.99
2	110.00-119.99
المجموع 65	

(د) الحدود الحقيقية لفئة الخامسة

الحد الأدنى الحقيقي لفئة الخامسة

الحد الأعلى الحقيقي لفئة الخامسة :

$$= \frac{1}{2}(\pounds 90.00 + \pounds 89.99) = \pounds 89.995$$

$$= \frac{1}{2}(\pounds 99.99 + \pounds 100.00) = \pounds 99.995$$

(هـ) طول الفئة الخامسة :

طول الفئة الخامسة = الحد الأعلى الحقيقي للفئة الخامسة - الحد الأدنى الحقيقي للفئة الخامسة

$$= \pounds 99.995 - \pounds 89.995 = \pounds 10.00$$

وفي هذه الحالة فإن جميع الفئات لها نفس الطول $\pounds 10.00$.

(و) تكرار الفئة الثالثة ج : 16

(ز) التكرار النسبي للفئة الثالثة : ج : $16/65 = 0.246 = 24.6\%$

(ح) الفئة ذات التكرار الأكبر ج : $\pounds 70.00 - \pounds 79.99$

وهذه تسمى أحيانا بالفئة المتوالية . ويسمى تكرارها بتكرار الفئة المتوالية .

(ط) نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل شهري أقل من $\pounds 80.00$

العدد الكلي للعاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 80.00$ شهريا $16 + 10 + 8 = 34$

نسبة العاملين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 80.00$ شهريا $34/65 = 52.3\%$

(ي) العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 10 + 14 + 16 + 10 = 50$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 50/65 = 76.9\%$$

نسبة العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من $\pounds 100.00$ ولكن لا يقل دخلهم عن $\pounds 60.00$ شهريا

$$= 50/65 = 76.9\%$$

٢ - ٤ إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكراري لأطوال أوراق نبات الفار هي

128, 137, 146, 155, 164, 173, 182 mm أوجد (أ) طول الفئة (ب) الحدود الحقيقية للفئات

(ج) حدود الفئات ، مفترضا أن القياس أخذ إلى أقرب مليمتر .

الحل :

(أ) طول الفئة = الفرق المشترك بين مراكز الفئات المتتالية = $137 - 128 = 146 - 137 = 9 \text{ mm}$

(ب) بما أن أطوال الفئات كلها متساوية ، فإن الحدود الحقيقية للفئات هي في منتصف المسافة بين مراكز الفئات وهذا يكون لدينا القيم .

$$\frac{1}{2}(128 + 137), \frac{1}{2}(137 + 146), \dots, \frac{1}{2}(173 + 182) \text{ or } 132.5, 141.5, 150.5, \dots, 177.5 \text{ mm.}$$

وهذا يكون الحد الحقيقي لفئة الأولى هو

$$132.5 - 9 = 123.5 \text{ ولفئة الأخيرة هو } 177.5 + 9 = 186.5$$

وبما أن الطول المشترك لفئات هو 9 mm . فإن الحدود الحقيقية للفئات هي :

$$123.5, 132.5, 141.5, 150.5, 159.5, 168.5, 177.5, 186.5 \text{ mm.}$$

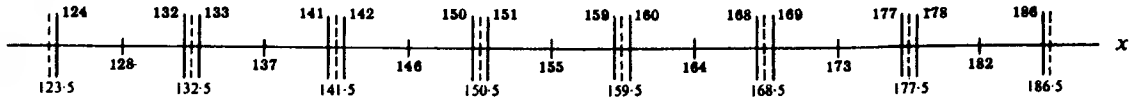
(ج) بما أن حدود الفئات هي قيم صحيحة فإننا نختار حدود الفئات من الأرقام الصحيحة الأقرب إلى الحدود الحقيقية ، لفئة وعلى سبيل التحديد :

$$123, 124, 132, 133, 141, 142, \dots$$

وهذا فإن حدود الفئة الأولى هي $124-123$ والفئة التالية $141-133$ وهكذا .

٢-٥ عبر بيانيا عن نتائج المسألة السابقة :

الحل :



مراكز الفئات 128, 137, 146, ..., 182 حدد موضعها على محور x . ويوضح على الرسم الحدود الحقيقية لفئات بالخطوط الرأسية المتقطعة بينما حدد حدود الفئات بالخطوط الرأسية المتصلة .

٢-٦ إذا كان أصغر 150 قياسا هو 5.18 mm وكان أكبرها هو 7.44 mm . حدد مجموعة ملائمة من :

(أ) حدود الفئات (ب) الحدود الحقيقية للفئات (ج) مراكز الفئات

والتي يمكن استخدامها لتكوين توزيع تكرارى لهذه القياسات .

الحل :

المسئ $7.44 - 5.18 = 2.26 \text{ mm}$. وإذا استخلفنا 5 فئات كحد أدنى فإن طول الفئة سيكون

$$2.26/5 = 0.45 \text{ تقريبا أما إذا استخلفنا كحد أعلى 20 فئة فإن طول الفئة سيكون } 2.26/20 = 0.11$$

تقريبا . وهذا يكون الاختيار المناسب لطول الفئة يقع بين 0.11, 0.45 وقد يكون 0.20, 0.30 أو 0.40 .

(١) تظهر الأعمدة I, II, III فئات ملائمة أطوالها 0.20, 0.30, 0.40 على الترتيب .

I	II	III
5.10-5.29	5.10-5.39	5.10-5.49
5.30-5.49	5.40-5.69	5.50-5.89
5.50-5.69	5.70-5.99	5.90-6.29
5.70-5.89	6.00-6.29	6.30-6.69
5.90-6.09	6.30-6.59	6.70-7.09
6.10-6.29	6.60-6.89	7.10-7.49
6.30-6.49	6.90-7.19	
6.50-6.69	7.20-7.49	
6.70-6.89		
6.90-7.09		
7.10-7.29		
7.30-7.49		

لاحظ أن الحد الأدنى للفئة الأولى من الممكن أن يكون مختلفا عن 5.10 . فكل سبيل المثال في العمود I إذا بدأنا بالرقم 5.15 كحد أدنى فإن الفئة الأولى يمكن كتابتها على الشكل 5.15-5.34 .

(ب) الحدود الحقيقية للفئات المقابلة للأعمدة I, II, III أعلاه هي كالاتي .

I	5.095-5.295, 5.295-5.495, 5.495-5.695, ..., 7.295-7.495
II	5.095-5.395, 5.395-5.695, 5.695-5.995, ..., 7.195-7.495
III	5.095-5.495, 5.495-5.895, 5.895-6.295, ..., 7.095-7.495

لاحظ أن هذه الحدود الحقيقية للفئات ملائمة حيث أنها لا تتطابق مع أي من القياسات المشاهدة .

(ج) مراكز الفئات المقابلة للأعمدة I, II, III المغطاة في (١) هي كالاتي :

I	5.195, 5.395, ..., 7.395	II	5.245, 5.545, ..., 7.345	III	5.295, 5.695, ..., 7.295
---	--------------------------	----	--------------------------	-----	--------------------------

هذه القيم لمراكز الفئات يعيها أنها لا تتطابق مع أي من القياسات المشاهدة .

٢ - ٧ في الاجابة على السؤال السابق اختار أحد الطلبة الفئات التالية .

5.10-5.40, 5.40-5.70 ..., 6.90-7.20, 7.20-7.50

هل هناك أي خطأ في هذا الاختيار ؟

الحل :

هذه الفئات تتشابه فيما بينها عند 5.40, 5.70, ..., 7.20 وهذا فإنه إذا كانت قيمة مسجلة لقياس هي 5.40 على سبيل المثال ، فإنه يمكن أن توضع في أي من الفئتين الأولى أو الثانية . ويرر بعض الإحصائيين ذلك بالاتفاق على أن يوضع نصف هذه الحالات غير الواضحة في أحد الفئات والنصف الآخر في الفئة الأخرى .

وعدم الموضوع في هذه الحالة يمكن حذفه بأن نكتب الفئات كالاتي : 5.10 أقل من 5.40 و 5.40 أقل من 5.70 وهكذا . وفي هذه الحالة فإن الحدود تتطابق مع الحدود الحقيقية للفئة ومراكز الفئات تتطابق مع

البيانات المشاهدة . وبشكل عام فن المستحب أن نتجنب مثل هذا التشابك في الفئات كلما كان ذلك ممكننا وكذلك اختيار الحدود الحقيقية للفئات بحيث لا تتطابق مع قيم فعلية مشاهدة وعلى سبيل المثال فإن الفئات في المسألة السابقة يمكن اختيارها مثل 5.695 — 5.395 ، 5.395 — 5.095 وهكذا . بدون أى غموض . ويعيب هذا الاختيار بالذات أن مراكز الفئات لا تتطابق مع قيم مشاهدة .

٢ - ٨ في الجدول التالي سجلت أطوال 40 من أوراق نبات الغار إلى أقرب مليمتري . كون توزيعا تكراريا .

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

الحل :

أكبر طول هو 176 mm وأصغر طول هو 118 mm وبهذا يكون المدى $176 - 118 = 58$ mm .

إذا استخدمنا 5 فئات فإن طول الفئة سيكون بالتقريب $58/5 = 11.6$ mm .

إذا استخدمنا 20 فئة فإن طول الفئة سيكون بالتقريب $58/20 = 2.9$ mm .

أحد الاختيارات الملائمة لطول الفئة هو 5 mm . وكذلك فإنه من الملائم اختيار مراكز الفئات عند

118, 120, 125, 130, 135, ... وبهذا فإن الفئات من الممكن أن تكون 118 — 122, 123 — 127, 128 — 132, ...

وبهذا الاختيار فإن الحدود الحقيقية للفئات هي 117.5, 122.5, 127.5, ... والتي لا تتطابق مع البيانات المشاهدة .

جدول ٢ - ٦

الطول	الحزم	التكرار
118-122	/	1
123-127	//	2
128-132	//	2
133-137	////	4
138-142	//// /	6
143-147	//// ///	8
148-152	////	5
153-157	////	4
158-162	//	2
163-167	///	3
168-172	/	1
173-177	//	2
المجموع		40

التوزيع التكراري المطلوب موضح بالشكل ٢-٦ .

ويستخدم العمود الأوسط ويسمى كشف الحزم (أو النقط)

في ترتيب البيانات الخام للمصنوع على التكرارات

ويحذف عادة عند العرض النهائي للتوزيع التكراري .

وليس ضروريا وضع القيم في منظومة وأن كان من الممكن

في حالة وجودها استخدامها في تبويب التكرارات .

جدول ٢-٧

الطول	الحزم	التكرار
118-126	///	3
127-135	////	5
136-144	////	9
145-153	////	12
154-162	////	5
163-171	////	4
172-180	///	2
المجموع	40-	

طريقة أخرى

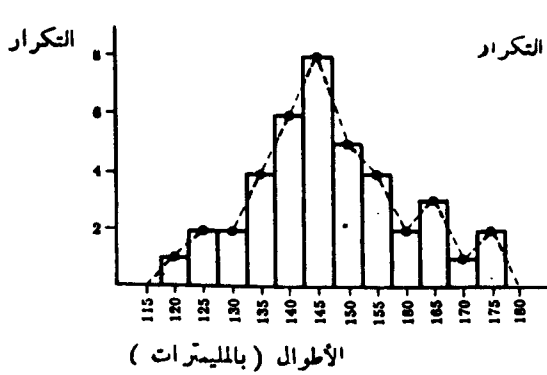
ومن الطبيعي أن يكون من الممكن الحصول على توزيعات تكرارية أخرى .

بالجدول ٢-٧ يظهر على سبيل المثال التوزيع التكراري باستخدام 7 فئات حيث طول الفئة هو 9 mm .

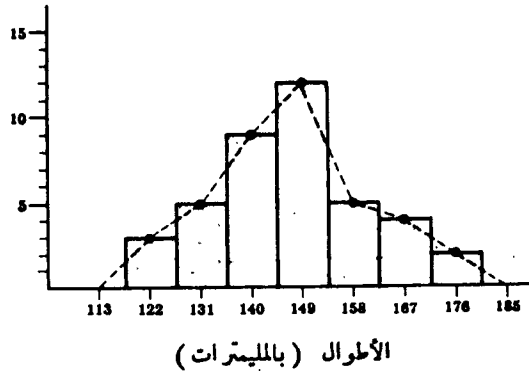
٢-٩ كون (أ) مدرج تكراري (ب) مضلع تكراري لتوزيع الأطوال في المسألة ٢-٨

الحل :

المدرج التكراري والمضلع التكراري لكل من الحالات المذكورة في المسألة ٢-٨ مطاة في الأشكال ٢-٤ (أ) ٢-٤ (ب)



شكل ٢-٤ (أ)



شكل ٢-٤ (ب)

لاحظ أن مراكز قواعد المستطيلات قد عيّنت عند مراكز الفئات .

٢-١٠ باستخدام بيانات المسألة ٢-٣ كون

(أ) توزيع تكراري نسبي (أو نسب مئوية) .

(ب) مدرج تكراري

(ج) مدرج تكراري نسبي

(د) مضلع تكراري

(هـ) مضلع تكراري نسبي .

جدول ٢ - ٨

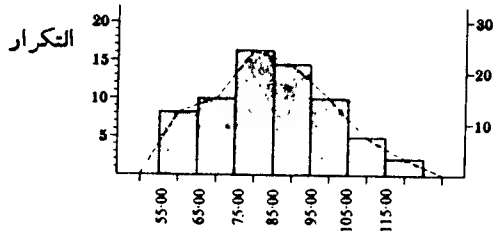
الأجور	التكرار النسبي (كنسب مئوية)
£50-00-£59-99	12.3
60-00- 69-99	15.4
70-00- 79-99	24.6
80-00- 89-99	21.5
90-00- 99-99	15.4
100-00-109-99	7.7
110-00-119-99	3.1
	100.0% المجموع

الحل :

(أ) التوزيع التكرارى النسبى المبين بالجدول ٢ - ٨

حصلنا عليه من التوزيع التكرارى للمسألة
٢ - ٣ بقسمة تكرارات كل فئة على المجموع
الكل لتكرارات (65) وعبرنا عن النتيجة كنسبة
مئوية .

(ب) ، (ج) . المدرج التكرارى والمدرج التكرارى
النسبى موضحان بالشكل ٢ - ٥ . لاحظ أنه
التحويل إلى مدرج تكرارى نسبى فإنه من
الضرورى فقط إضافة مقياس رأسى يظهر
التكرارات النسبية كما هو موضح على يمين
الشكل .



الأجور (£)

شكل ٢ - ٥

التكرار النسبى (كنسب مئوية)

(د) ، (هـ) المضلع التكرارى والمضلع التكرارى

النسبى موضحان بالخط البياني المتقطع بالشكل
٢ - ٥ .

لتحويل إلى مضلع تكرارى نسبى فإنه من
الضرورى فقط إضافة مقياس رأسى يظهر
التكرارات النسبية .

لاحظ أنه إذا كان المطلوب هو المضلع التكرارى النسبى فقط فإن الرسم المقابل لن يحتوى على المدرج التكرارى

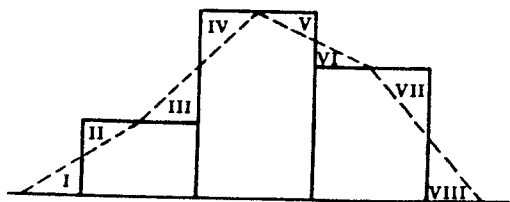
ومحور التكرارات النسبية سوف يظهر على اليسار بدلا من محور التكرارات .

٢-١١ أثبت أن المساحة الكلية للمستطيلات في المدرج

التكرارى تساوى المساحة الكلية المحصورة بين
المضلع التكرارى ومحور السينات .

الحل :

سنثبت ذلك في حالة مدرج تكرارى يتكون من
ثلاثة مستطيلات كما بالرسم ، حيث يظهر المضلع
التكرارى بخطوط متقطعة .



شكل ٢ - ٦

المساحة الكلية للمستطيلات =

المساحة المظلة + مساحة II + مساحة IV + مساحة V + مساحة VII

= المساحة المظلة + مساحة I + مساحة III + مساحة II + مساحة VIII

= المساحة المحصورة بين المضلع التكرارى ومحور السينات .

لأن مساحة I = مساحة II ، مساحة III = مساحة IV ، مساحة V = مساحة VI ، مساحة VII = مساحة VIII .

١٢-٢ في شركة P and R (المسألة ٢-٣) عين خمسة عاملين جدد وكانت أجورهم الشهرية £85.34 . كون توزيعاً تكرارياً لأجور الـ 70 عاملاً .

الحل :

التوزيعات التكرارية الممكنة تظهر في الجداول (أ) ، (ب) ، (ج) ، (د) ، (هـ) ، أدناه . (أ) احتفظ بنفس طول الفئة £10.00 خلال الجدول . وكنتيجه لذلك ظهرت فئات خالية وتفاصيل دقيقة حول الحد الأعلى لهيكل الأجور .

في (ب) الفئات الخالية والتفاصيل الدقيقة أمكن تلافيها باستخدام الفئة المفتوحة £120.00 وأكبر . أحد عيوب هذا الأسلوب أن الجدول أصبح لاقية له عند إجراء بعض العمليات الرياضية . وعلى سبيل المثال أصبح من المستحيل تحديد الأجور الكلية المدفوعة في أسبوع حيث £120.00 وأكبر من الممكن أن تتضمن أن الأفراد يمكن أن يحصلوا على أجور قد تصل إلى £1200.00 في الشهر .

في (ج) كون الجدول باستخدام طول الفئة £20.00 أحد العيوب في ذلك أن كثيراً من المعلومات قد فقدت في الحدود الدنيا لهيكل الأجور والتفاصيل مازالت دقيقة في الحد الأعلى لهيكل الأجور .

في (د) أطوال الفئات غير متساوية . أحد العيوب في ذلك هو أن عمليات رياضية سوف تتم فيما بعد تفقد السهولة المتاحة في حالة ما إذا كانت الفئات متساوية . كذلك فكلما زاد طول الفئة زادت أخطاء التجميع .

(ب)

الأجور	التكرار
£50.00 - £59.99	8
60.00 - 69.99	10
70.00 - 79.99	16
80.00 - 89.99	15
90.00 - 99.99	10
100.00 - 109.99	5
110.00 - 119.99	3
120.00 and over	3
المجموع 70	

(أ)

الأجور	التكرار
£50.00 - £59.99	8
60.00 - 69.99	10
70.00 - 79.99	16
80.00 - 89.99	15
90.00 - 99.99	10
100.00 - 109.99	5
110.00 - 119.99	3
120.00 - 129.99	0
130.00 - 139.99	1
140.00 - 149.99	0
150.00 - 159.99	1
160.00 - 169.99	0
170.00 - 179.99	1
المجموع 70	

التوزيع التكرارى المتجمع والمنحنى التكرارى المتجمع

٢ - ١٤ كون : (أ) التوزيع التكرارى المتجمع .

(ب) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع .

(د) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

وذلك من التوزيع التكرارى بالمسألة ٢ - ٣ .

الحل :

جدول ٢ - ٩

الأجور	التكرار المتجمع	التكرار المتجمع النسبى
أقل من £50.00	0	0.0
60.00	8	12.3
أقل من 70.00	18	27.7
80.00	34	52.3
أقل من 90.00	48	73.8
100.00	58	89.2
أقل من 110.00	63	96.9
أقل من 120.00	65	100.0

(أ) ، (ب) التوزيع التكرارى المتجمع

والتوزيع التكرارى المتجمع للنسب المئوية

(أو التوزيع التكرارى المتجمع النسبى)

موضحان بالجدول ٢ - ٩ . لاحظ

أن كل قيمة فى العمود الثانى حصلنا عليها

بالجمع المتتالى فى جدول المسألة ٢ - ٣ .

مثلا

$$34 = 8 + 10 + 16 ، 18 = 8 + 10$$

وهكذا ، كل قيمة فى العمود الثالث

حصلنا عليها بقسمة القيم المقابلة فى العمود

الثانى على التكرار الكلى 65 وعبرنا عن

النتائج كنسبة مئوية مثلا

$$34/65 = 52.3\%$$

القيم فى هذا العمود يمكن الحصول عليها

أيضاً من الجمع المتتالى للقيم فى العمود الثانى

من جدول المسألة ٢ - ١٠ (أ) . مثلا

$$52.3 = 12.3 + 15.4 + 24.6$$

$$27.7 = 12.3 + 15.4$$

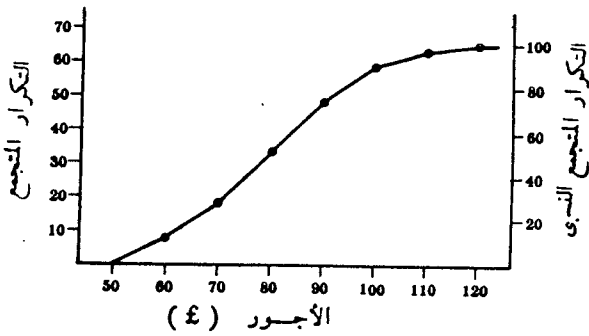
(ج) ، (د) المنحنى التكرارى المتجمع (أو المضلع التكرارى المتجمع) والمنحنى التكرارى المتجمع النسبى

(أو المضلع التكرارى المتجمع النسبى) مرسومان معاً بالشكل ٢ - ٨ المقياس الرأسى إلى اليسار مبين عليه التكرار

المتجمع بينما المقياس الرأسى إلى اليمين مبين عليه التكرار المتجمع النسبى . وتسمى هذه الحالة . بالمنحنى

التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى النسبى الصاعد أو للاساس « أقل من » وذلك نظراً للطريقة التى

تتجمع بها التكرارات .



شكل ٢ - ٨

١٥-٢ كون (أ) التوزيع التكرارى المتجمع النازل «أو أكثر» ،

(ب) المنحنى التكرارى المتجمع النسخى النازل «أو أكثر» ،

وذلك من بيانات التوزيع التكرارى للمسألة ٢-٣

الحل :

(أ) لاحظ أن القيم الموجودة بالعمود الثانى

بالجدول ١٠-٢ قد حصلنا عليها

بالإضافة المتتالية لقيم الموجودة بالعمود

التالى بالجدول ٥-٢ بالمسألة ٢-٣

بادئين بأسفل هذا الجدول . مثلا

$$7 = 2+5 , 17 = 2+5+10$$

وهكذا .

ويمكن الحصول على هذه القيم أيضاً

بطرح كل قيمة بالعمود الثانى من جدول

المسألة ٢-١٤ من التكرار الكلى 65. مثلا

$$57 = 65 - 8 , 47 = 65 - 18$$

وهكذا .

جدول ١٠-٢

الأجور التكرار المتجمع النازل
«أو أكثر»

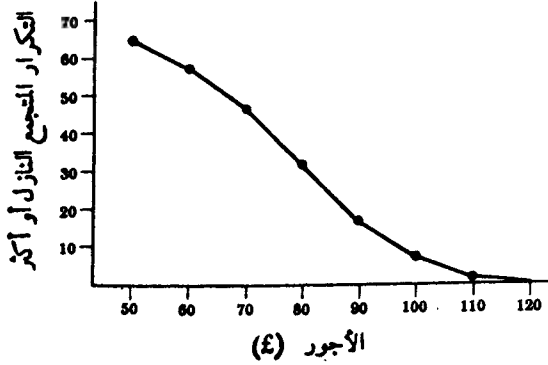
65	أو أكثر	£50.00
57	أو أكثر	60.00
47	أو أكثر	70.00
31	أو أكثر	80.00
17	أو أكثر	90.00
7	أو أكثر	100.00
2	أو أكثر	110.00
0	أو أكثر	120.00

١٦-٢ من المنحنى التكرارى المتجمع بالمسألة ٢-١٤ أو ١٥-٢ قدر عدد العاملين الذين يحصلون على جتن .

(أ) أقل من £88.00 شهرياً .

(ب) £96.00 أو أكثر شهرياً .

(ج) على الأقل £63.00 ولكن لا يقل عن £75.00 شهرياً .



شكل ١-٢

الحل :

(أ) بالرجوع إلى المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » للمسألة ٢-١٤ ، ارسم خطاً رأسياً يتقاطع مع محور الأجور عند £88.00 . هذا الخط يقابل المنحنى المتجمع الصاعد عند النقطة التى أحداثياتها (45, 88) وبهذا فإن عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £ 88.00 شهرياً هو 45 .

(ب) فى المنحنى التكرارى المتجمع التنازل أو أكثر بالمسألة ٢ - ١٥ ارسم خطاً رأسياً عند £96.00 . هذا الخط يقابل المنحنى عند النقطة التى أحداثياتها (11, 96) وبهذا فإن هناك 11 عاملاً يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر . ومن الممكن الحصول على نفس النتيجة باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد « أقل من » برسم خط رأسى عند £ 96.00 حيث نجد أن هناك 54 عاملاً يحصلون على دخل أقل من £96.00 وبهذا فإن $54 - 11 = 43$ عاملاً يحصلون على دخل £96.00 أو أكثر .

(ج) باستخدام المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد « أقل من » بالمسألة ٢ - ١٤ نجد أن :
عدد العاملين المطلوب = عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £75.00
- عدد العاملين الذين يحصلون على دخل أقل من £63.00 : $15 = 11 - 26$

لاحظ أن النتيجة السابقة يمكن الحصول عليها بالاستكمال فى جدول التكرارات المتجمعة ، على سبيل المثال فإن النتيجة التى حصلنا عليها فى (أ) يمكن الحصول عليها كالتالى : بما أن £88.00 هى $8/10$ أو $4/5$ المسافة بين £80 و £90 فإن رقم العاملين المطلوب يجب أن يكون $4/5$ المسافة بين القيم المقابلة وهى 34 و 48 (أنظر جدول المسألة ٢ - ١٤) . ولكن $4/5$ الطريق بين 34 و 48 هو $11 = (48 - 34) \times \frac{4}{5}$ فإن رقم العاملين المطلوب هو $34 + 11 = 45$.

جدول ٢-١١

عدد الصور	عدد الرميات (التكرار)
0	38
1	144
2	342
3	287
4	164
5	25
المجموع 1000	

٢-١٧ خمسة بنسات رميت 1000 مرة وفى كل مرة سجل عدد البنسات التى تظهر الصورة . سجل عدد الرميات التى ظهر فيها 0, 1, 2, 3, 4, 5 صورة بالجدول ٢ - ١١ .
(أ) ارسم هذه البيانات .

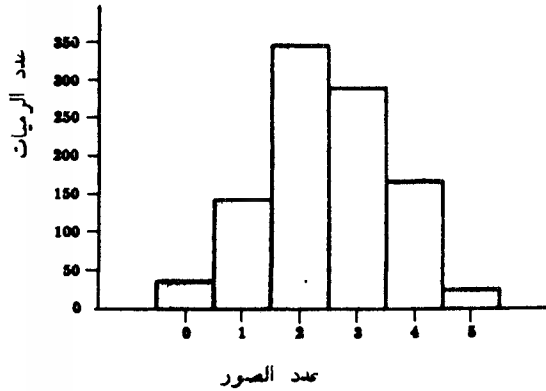
(ب) كون جدولاً تظهر فيه النسبة المئوية للرميات التى تظهر بها الصورة أقل من 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .
(ج) ارسم بيانات الجدول الذى حصلت عليه فى (ب) .

الحل :

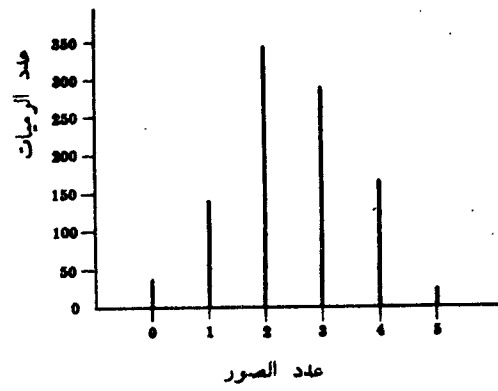
(أ) يمكن التعبير بيانياً عن هذه البيانات كما فى الشكل ٢-١٠ أو ٢-١١ .

الشكل ٢ - ١٠ يبدو أنه أكثر ملاءمة لتمثيل هذه البيانات حيث ان عدد الصور لا يمكن ان يكون 1.5 أو 3.2 مثلاً . وهذا الشكل هو صورة من صور الأعمدة البيانية حيث عرض العمود هو الصفر . ويسمى أحياناً بالشكل القضيبى . ويستخدم على وجه الخصوص عندما تكون البيانات متقطعة .

الشكل ٢ - ١١ يمثل المدرج التكراري للبيانات . لاحظ أن المساحة الكلية للمدرج التكراري هو التكرارات الكلية 1000 كما يجب أن تكون . عند التمثيل البياني باستخدام المدرج التكراري أو المضلع التكراري فإنه من الضروري معالجة البيانات كما لو كانت متصلة . وسوف يتضح فيما بعد أن هذه الطريقة مفيدة . لاحظ أننا قد سبق أن استخدمنا المدرج التكراري والمضلع التكراري لبيانات متقطعة في بيانات المسألة ٢ - ١٠ .



شكل ٢ - ١١



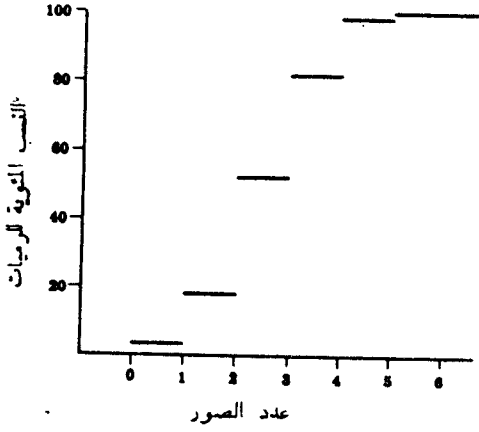
شكل ٢ - ١٠

(ب) بالرجوع إلى بيانات الجدول ٢ - ١٢ نجد أنه يوضح التوزيع التكراري المتجمع والتوزيع التكراري المتجمع النسبي (نسب مئوية) لعدد الصور .

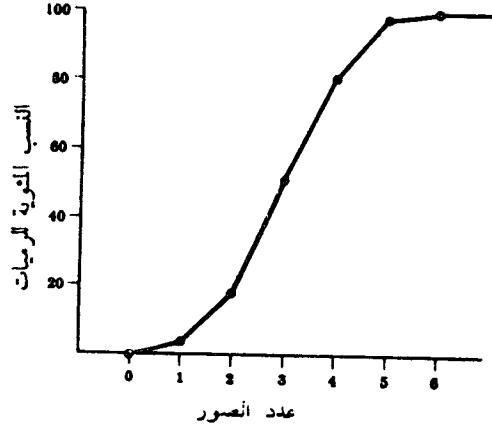
يجب أن نلاحظ أن البيانات « أقل من 1 » ، « أقل من 2 » وهكذا من الممكن أن تكتب « أقل من 0 » أو يساوي 0 « أقل من أو يساوي 1 » وهكذا

جدول ٢ - ١٢

عدد الصور	عدد الرميات (تكرار متجمع)	النسبة المئوية لعدد الرميات والتكرار المتجمع لنسب المئوية
0	0	0.0
أقل من 1	38	3.8
أقل من 2	182	18.2
أقل من 3	524	52.4
أقل من 4	811	81.1
أقل من 5	975	97.5
أقل من 6	1000	100.0



الشكل ٢ - ١٢



الشكل ٢ - ١٣

(ج) الشكل المطلوب يمكن تمثيله إما بالشكل ١٢ - ٢ أو الشكل ١٣ - ٢ .

الشكل ١٢ - ٢ أكثر ملاءمة لتمثيل البيانات المتقطعة ، حيث أن النسب المئوية للمراتب حيث عدد الصور أقل من 2 يساوي النسب المئوية للمراتب حيث عدد الصور أقل من 1.75 أو 1.56 أو 1.23 . بحيث أن النسبة 18.2% يجب أن تظهر كتشكيل لهذه القيم . (موضحة بالخط الأفقي) .

الشكل ١٣ - ٢ يظهر المضلع التكراري المتجمع أو المنحنى التكراري المتجمع لهذه البيانات وبه تعالج البيانات كما لو كانت بيانات متصلة .

لاحظ أن الأشكال ١٢ - ٢ و ١٣ - ٢ يقابلان على الترتيب الأشكال ١٠ - ٢ ، ١١ - ٢ في الجزء (أ) .

التحنيات التكرارية والتحنيات التكرارية المتجمعة الممهدة

١٨ - ٢ بيانات الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر صفحة ٤٥) تمثل في الواقع عينة مأخوذة من 1546 طالب من طلبة هذه الجامعة . من البيانات المعطاة من العينة .

(أ) كون مضلعاً تكرارياً ممهداً للنسب المئوية (منحنى تكراري) ، ثم

(ب) كون منحنى تكرارياً متجمعاً صاعداً « أقل من » للنسب المئوية بحيث يكون ممهداً

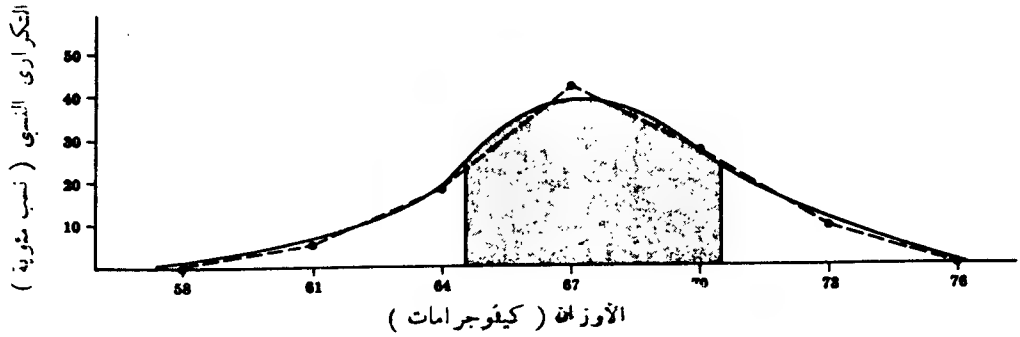
(ج) من بيانات (أ) ، (ب) قدر عدد الطلبة في الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg . ماهي الفروض التي يجب أن تضعها .

(د) هل من الممكن استخدام هذه النتائج لتقدير نسبة الذكور في الولايات المتحدة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg ؟

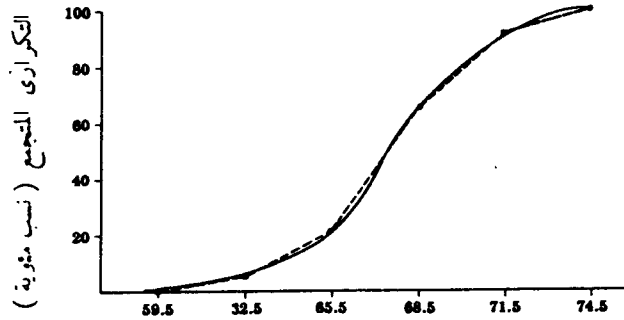
الحل :

(أ) ، (ب) في الشكلين ٢ - ١٤ ، ٢ - ١٥ نجد أن الخطوط المتقطعة تمثل المصنع التكرارى والمنحنى التكرارى المتجمع وقد حصلنا عليهما من المعطى في صفحتى (٤٩ ، ٤٨) .

والمنحنى الممهد المطلوب يظهر فى الشكل بالخطوط الثقيلة وقد حصلنا عليه بتقريب الخطوط المتقطعة بخط ممهد .
من الناحية العملية فن الأسهل تمهيد المنحنى التكرارى المتجمع بحيث نحصل عليه أولا ثم نحصل على المدرج التكرارى الممهد بقراءة القيم من المنحنى التكرارى المتجمع الممهد .



شكل ٢ - ١٤



الأوزان (كيلوجرامات)

شكل ٢ - ١٥

(ج) إذا كانت العينة المكونة من 100 طالب ممثلة للمجتمع المكون من 1546 طالب ، فإن المنحنيات الممهدة فى الأجزاء (أ) ، (ب) من الممكن اعتبارها المنحنى التكرارى النسبى والمنحنى المتجمع النسبى للمجتمع . هذا الفرض صحيح فقط فى حالة ما إذا كانت العينة عشوائية ، بمعنى أن فرصة كل طالب فى اختياره ضمن العينة مساوية لفرصة أى طالب آخر .

وبما أن الأوزان بين 65 kg و 70 kg مسجلة إلى أقرب كيلوجرام فإنها تمثل مثلاً الأوزان بين 64.5 kg و 70.5 kg، ونسبة الطلبة في المجتمع الذين لهم هذه الأوزان من الممكن الحصول عليها بقسمة المساحة المظلة في الشكل ٢ - ١٤ على المساحة الكلية المحصورة بين الخط الممهد ومحور السينات .

ومن السهل استخدام الشكل ٢ - ١٤ . ومنه نجد أن

$$\text{نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن } 70.5 \text{ kg} = 82\%$$

$$\text{نسبة الطلبة الذين تقل أوزانهم عن } 64.5 \text{ kg} = 18\%$$

$$\text{ولهذا فإن أوزان الطلبة بين } 65 \text{ و } 70 \text{ kg وهي } 64\% = 82\% - 18\%$$

وبهذا فإن عدد الطلبة في الجامعة الذين تقع أوزانهم بين 65 و 70 kg إلى أقرب كيلوجرام

$$989 = 1546 \times 64\%$$

ويمكن التعبير بصورة أخرى عما سبق بالقول بأن احتمال أو فرصة شخص في أن يختار بمسورة عشوائية من 1546 طالب ويكون وزنه بين 65 و 70 kg هو 64%، 0.64 أو 64 من 100 ولهذا الصلة بالاحتمال (سندر سها في الفصل السادس) فإن المنحنى التكراري النسبي يسمى في أغلب الأحيان بالمنحنيات الاحتمالية أو التوزيعات الاحتمالية .

(د) من الممكن اعتبار النسبة المطلوبة هي 64% (بدرجة أكبر من عدم التأكد عما سبق) في حالة ما إذا كنا مقتنعين بأن العينة المكونة من 100 طالب المسحوبة من المجتمع الكلي للذكور بالولايات المتحدة هي عينة عشوائية وعلى أية حال فإن هذا يبدو غير محتمل لعدة أسباب سها (١) من الممكن أن يكون بعض طلبة الكليات لم يصلوا إلى أقصى وزن لهم (٢) الأجيال الجديدة قد تميل لأن تكون أثقل وزناً من آبائهم .

مسائل إضافية

٢ - ١٩ (أ) رتب الأرقام 12, 56, 42, 21, 5, 18, 10, 3, 61, 34, 65, 24 في -نظومة ، ثم

(ب) حدد المدى

ج : (ب) 62

٢ - ٢٠ الجدول ٢ - ١٣ يبين التوزيع التكراري للعمر الانتاجي لـ 400 من لمبات الراديو التي أختبرت في شركة L&M

للمبات . بالرجوع لهذا الجدول . عين

(أ) الحد الأعلى للفترة الخامسة

(ب) الحد الأدنى للفترة الثامنة

جدول ٢ - ١٣

عدد اللببات	العمر الإنتاجي (بالساعات)
14	300 - 399
46	400 - 499
58	500 - 599
76	600 - 699
68	700 - 799
62	800 - 899
48	900 - 999
22	1000 - 1099
6	1100 - 1199
الإجمالي	400

(ج) مركز الفئة السابعة

(د) الحدود الحقيقية للفئة الأخيرة

(هـ) طول الفئة

(و) تكرار الفئة الرابعة

(ز) التكرار النسبي للفئة السادسة

(ح) النسبة المئوية لللبات التي عمرها الإنتاجي لا يتجاوز 600 ساعة

(ط) النسبة المئوية لللبات التي يزيد عمرها الإنتاجي أو يساوي

900 ساعة .

(ي) النسبة المئوية لللبات التي لا يقل عمرها الإنتاجي عن 500

ولكن يقل عن 1000 ساعة .

ج : (أ) 799 (ب) 1000 (ج) 949.5 (د) 1199.5, 1099.5 (هـ) 100 ساعة (و) 76

(ز) $0.155 \text{ or } 15.5\%$ (ح) $62/400$ (ط) 19.0% (ي) 78.0%

٢ - ٢١ كون (أ) مدرجاً تكرارياً . (ب) مضلعاً تكرارياً للتوزيع التكراري للمسألة السابقة .

٢ - ٢٢ لبيانات المسألة ٢ - ٢٠ كون (أ) التوزيع التكراري النسبي (ب) المدرج التكراري النسبي

(ج) المضلع التكراري النسبي .

٢ - ٢٣ لبيانات المسألة ٢ - ٢٠ كون

(أ) التوزيع التكراري المتجمع .

(ب) التوزيع التكراري المتجمع النسبي (أو للنسب المئوية) .

(ج) المنحنى التكراري المتجمع .

(د) المنحنى التكراري المتجمع النسبي . (لاحظ أن المقصود عادة بالمنحنى التكراري المتجمع هو المنحنى المستخدم فيه

الأساس « أقل من » أي المنحنى التكراري المتجمع المساعد هذا ما لم يذكر خلاف ذلك) .

٢ - ٢٤ حل المسألة السابقة عندما تتجمع التكرارات على الأساس « أو أكثر » .

٢ - ٢٥ قدر نسبة اللببات في المسألة ٢ - ٢٠ التي أعمارها الإنتاجية :

(أ) أقل من 560 ساعة .

(ب) 970 أو أكثر ساعة .

(ج) بين 620 و 890 ساعة .

ج : (أ) 24% (ب) 11% (ت) 46% .

٢ - ٢٦ القطر الداخلى لجلبة مستديرة منتجة بواسطة إحدى الشركات يمكن قياسها إلى أقرب وحدة من مائة من المليمترات .
إذا كانت مراكز الفئات للتوزيع التكرارى لهذه الأقطار معطاه بالمليمترات هي
3.21, 3.24, 3.27, 3.30, 3.33, 3.36

أوجد :

(أ) طول الفئة . (ب) الحدود الحقيقية للفئات (ج) حدود الفئة .

ج : (أ) 0.03 mm

(ب) 3.195, 3.225, 3.255, ..., 3.375 mm

(ج) 3.20 — 3.22, 3.23 — 3.25, 3.26 — 3.28, ..., 3.35 — 3.37

٢ - ٢٧ الجدول التالى يبين الأقطار بالمليمترات لعينه من 60 من رلمان البلى مصنوعة فى شركة ما . كون التوزيع التكرارى للأقطار مستخدماً طول فئة ملائم .

7:38	7:29	7:43	7:40	7:36	7:41	7:35	7:31	7:26	7:37
7:28	7:37	7:36	7:35	7:24	7:33	7:42	7:36	7:39	7:35
7:45	7:36	7:42	7:40	7:28	7:38	7:25	7:33	7:34	7:32
7:33	7:30	7:32	7:30	7:39	7:34	7:38	7:39	7:27	7:35
7:35	7:32	7:35	7:27	7:34	7:32	7:36	7:41	7:36	7:44
7:32	7:37	7:31	7:46	7:35	7:35	7:29	7:34	7:30	7:40

٢٠ - ٢٨ لبيانات المسألة السابقة كون (أ) مدرج تكرارى (ب) مضلع تكرارى نسبى

(ج) منحنى تكرارى نسبى (د) مدرج تكرارى نسبى (هـ) مضلع تكرارى نسبى

(و) التوزيع التكرارى المتجمع (ز) التوزيع التكرارى المتجمع النسبى

(ح) المنحنى التكرارى المتجمع (ط) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

٢ - ٢٩ من نتائج المسألة ٢ - ٢٨ أوجد نسبة رولمان البلى الذى قطره

(أ) يزيد عن 0.732 mm (ب) ليس أكبر من 0.736 mm

(ج) بين 0.730 mm و 0.738 mm .

قارن نتائجك بالنتائج التى تحصل عليها مباشرة من البيانات الخام للمسألة ٢ - ٢٧

٢ - ٣٠ حل المسألة ٢ - ٢٨ مستخدماً بيانات المسألة ٢ - ٢٠ .

٢ - ٣١ يظهر الجدول ٢ - ١٤ التوزيع النسبى لإجمالى دخول الذكور الذين أعمارهم 14 سنة فأكثر فى الولايات المتحدة فى سنة 1956 باستخدام هذا الجدول أجب عن الأسئلة التالية :

(أ) ماهو طول الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟

(ب) ماهو عدد أطوال الفئات المختلفة بالجدول ؟

(ج) ماهو عدد الفئات المفتوحة ؟

النسبة المئوية	الدخل بالدولارات
17.2	Under \$1000
11.7	1000 - 1999
12.1	2000 - 2999
14.8	3000 - 3999
15.9	4000 - 4999
11.9	5000 - 5999
12.7	6000 - 9999
3.6	10000 and over

المصدر : مكتب التعداد

(د) كيف يمكن كتابة الفئة الأولى بحيث

يكون طولها مساوياً لطول الفئة الثانية ؟

(هـ) ما هو مركز الفئة الثانية ؟ الفئة السابعة ؟

(و) ماهي الحدود الحقيقية للفئة الرابعة ؟

(ز) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على

دخل \$4000 أو أكثر ؟ أقل من \$3000 ؟

(ح) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على

دخل على الأقل \$3000 ولكن لا يزيد على \$5000 ؟

(ط) ماهي نسبة الذكور الذين يحصلون على دخل بين \$6300 ، \$3000 . ماهي الفروض المستخدمة في هذا الحساب ؟

(ي) لماذا لا يساوي مجموع النسب 100% ؟

ج : (أ) \$4000 ، \$1000 (ب) أربعة (على الرغم من أنهن من الفئة الأولى فإن الفئة الأولى ليس لها طول محدد)

(ج) واحد (على الرغم من أن النسبة الأولى تظهر كثافة مفتوحة ، ولكنها في الواقع بديل عن كتابة

\$999.99 - 0) (د) \$999 - 0 (هـ) \$1499.50 ، ولكثير من الأغراض العملية يمكن كتابتها

\$8000 ، \$1500 على التوالي . (و) \$3999.50 ، \$2999.50

(ز) 41.0% ، 44.1% . (ح) 30.7% . (ط) 42.0%

(ي) نظراً لأخطاء التقريب في حساب النسب المئوية .

٢٢- (أ) لماذا يستحيل تكوين مدرج تكراري نسبي أو مضلع تكراري للتوزيع الموضح بالمسألة السابقة

(ب) كيف يمكن تعديل التوزيع بحيث يمكن تكوين المدرج التكراري النسبي أو المضلع التكراري النسبي ؟

(ج) نفذ التكوين باستخدام التعديلات الموضحة في (د) .

٢٣- (أ) كون المدرج التكراري النسبي والمضلع التكراري النسبي المقابلين لبيانات المسألة ٢ - ٢٠ .

(ب) من النتائج (أ) قدر احتمال أن تحترق لمبة قبل 600 ساعة

(ج) ناقش المخاطرة أو الفرصة التي يتحملها المصنع إذا ضمن أن اللبة ستستمر صالحة 425 ساعة ؟ 875 ساعة ؟

(د) إذا قدم المصنع ضماناً برد ثمن اللبة إذا تلفت خلال 90 يوماً . ما هو احتمال أنه سيقوم برد الثمن إذا افترضنا

أن اللبة تستخدم 4 ساعات يومياً ؟ 8 ساعات يومياً ؟

ج : (ب) 0.30 (ج) 0.52 ، 0.008

٢٤- (أ) ارم أربع عملات خسين مرة وبجمل في جدول عند الصور في كل رمية (ب) كون توزيعاً تكرارياً يظهر به عند

الرميات التي ظهر بها 0، 1، 2، 3، 4 صورة . (ج) كون توزيعاً نسبياً يقابل (ب) . (د) قارن النسب التي

حصلت عليها في (ج) بالتوزيع النظري 6.25% ، 25% ، 37.5% ، 25% ، 6.25% (بالتناسب مع

(1، 4، 6، 4، 1) والتي يمكن الحصول عليها باستخدام قواعد الاحتمالات .

الفصل الثالث

الوسط والوسيط والقوال

والمقاييس الأخرى للنزعة المركزية

رمز الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل

الرمز X_j (يقرأ "X دليل j") يمثل أى من القيم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ التى يأخذها المتغير X وعددها N . الحرف j فى X_j الذى يمكن أن يكون أى رقم $1, 2, 3, \dots, N$ يسمى الدليل أو الرقم الجانبي الأسفل. ومن الواضح أن أى حرف آخر غير j مثل i, k, p, q, s يمكن أيضا استخدامه.

رقم التجميع

الرمز $\sum_{j=1}^N X_j$ يستخدم للدلالة على مجموع كل الـ X_j 's ابتداء من $j = 1$ إلى $j = N$ بالتمريف.

$$\sum_{j=1}^N X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N$$

وإذا لم يكن هناك أى غموض محتمل فإننا نعبر عن هذا المجموع بشكل أبسط بالرمز $\Sigma X, \Sigma X_j$ or $\sum_j X_j$

الرمز Σ هو حرف التاج اليوناني سيجما ونعنى به هنا المجموع.

$$\sum_{j=1}^N X_j Y_j = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \dots + X_N Y_N \quad \text{مثال ١ -}$$

$$\sum_{j=1}^N a X_j = a X_1 + a X_2 + \dots + a X_N \quad \text{مثال ٢ -}$$

$$a(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = a \sum_{j=1}^N X_j$$

حيث a ثابت - وبشكل أبسط $\Sigma aX = a\Sigma X$.

$$\Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z \quad \text{مثال ٣ - إذا كانت } a, b, c \text{ ثوابت}$$

أنظر المسألة ٣ - ٣

المتوسطات ومقاييس النزعة المركزية

المتوسط هو القيمة النموذجية أو الممثلة لمجموعة من البيانات - وحيث أن مثل هذه القيمة النموذجية تميل إلى الوقوع في المركز داخل مجموعة بيانات مرتبة حسب قيمها ، فإن المتوسطات تسمى أيضا بمقاييس النزعة المركزية . ويمكن أن نعرف صورا عديدة للمتوسطات وإن كان الأكثر شيوعا الوسط الحسابي أو باختصار الوسط ، الوسيط ، المنوال ، الوسط الهندسي والوسط التوافقي - وكل منها له مميزات وعيوبه وهذا يعتمد على البيانات والهدف من استخدامه .

الوسط الحسابي

الوسط الحسابي أو الوسط للمجموعة N من الأرقام $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ ويرمز له بالرمز \bar{X} (ويقرا "X bar") ويعرف كالتالي

$$(1) \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

مثال : الوسط الحسابي للأرقام 8, 3, 5, 12, 10 هو

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7.6$$

إذا كانت الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K تحدث f_1, f_2, \dots, f_K مرة على الترتيب (بمعنى أنها تحدث بتكرارات (f_1, f_2, \dots, f_K) فإن الوسط الحسابي سيكون

$$(2) \quad \bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_K X_K}{f_1 + f_2 + \dots + f_K} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$$

حيث $N = \sum f$ هو مجموع التكرارات أى مجموع عدد الحالات .

مثال : إذا كانت 5, 8, 6, 2 تحدث بتكرارات 3, 2, 4, 1 على الترتيب فإن الوسط الحسابي سيكون

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5.7$$

الوسط الحسابي المرجح

في بعض الأحيان نقرن بعض الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K بمعاملات ترجيح أو أوزان w_1, w_2, \dots, w_K وهذه تعتمد على الدلالة أو الأهمية المرتبطة بهذا الأرقام . في هذه المسألة .

$$(3) \quad \bar{X} = \frac{w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_K X_K}{w_1 + w_2 + \dots + w_K} = \frac{\sum wX}{\sum w}$$

يسمى بالوسط الحسابي المرجح . لاحظ أوجه الشبه بالمعادلة (٢) التي يمكن اعتبارها وسطا حسابيا مرجحا بأوزان f_1, f_2, \dots, f_K .

مثال إذا كان الامتحان النهائي في مقرر أعطى وزنا ثلاثة أشغال الامتحانات الشفهية وإذا حصل طالب في الامتحان النهائي على 85 وفي الامتحانات الشفهية على 70,90 فإن متوسط تقديره هو

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1+1+3} = \frac{415}{5} = 83$$

خصائص الوسط الحسابي

(١) المجموع الجبري لانحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفرا .

مثال :

انحرافات الأرقام 8, 3, 5, 12, 10 عن وسطها الحسابي 7.6 هو $8 - 7.6, 3 - 7.6, 5 - 7.6$ or $4.0, -4.6, -2.6, 4.4, 2.4$ ومجموعه الجبري .
 $0.4 - 4.6 - 2.6 + 4.4 + 2.4 = 0$

(ب) مجموع مربعات انحرافات مجموعة من الأرقام X_j عن أى رقم a يكون أصغر ما يمكن في حالة واحدة فقط إذا كانت $a = \bar{X}$. أنظر المسألة ٤ - ٢٧ الفصل الرابع

(ج) إذا كان متوسط f_1 من الأرقام هو m_1, f_2 من الأرقام هو m_2, \dots, f_K من الأرقام متوسطها m_K فإن متوسط جميع الأرقام هو

$$(٤) \quad \bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_K m_K}{f_1 + f_2 + \dots + f_K}$$

أى الوسط الحسابي المرجح لجميع الأوساط . أنظر المسألة ٣-١٢ .

(د) إذا كانت A أى وسط حسابي افتراضى أو تخمين (والذى يمكن أن يكون أى رقم) وإذا كان $d_j = X_j - A$ هو انحرافات X_j عن A فإن المعادلات (١) ، (٢) سيصبحان على الترتيب .

$$(٥) \quad \bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N} = A + \frac{\sum d}{N}$$

$$(٦) \quad \bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = A + \frac{\sum f d}{N}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ لاحظ أن (٥) و (٦) يمكن تلخيصهما بالمعادلة $\bar{X} = A + \bar{d}$ (أنظر المسألة ١٨-٣).

الوسط الحسابي محسوباً من بيانات مجمعة

عندما تعرض البيانات في توزيع تكرارى ، فإن جميع القيم التى تقع داخل فئة معينة تعتبر أنها مطابقة لمركز الفئة أو منتصف مدى الفئة . الصيغ (٢) ، (٦) يمكن استخدامها للبيانات المجمعة إذا اعتبرنا X_j مركز الفئة و f_j التكرار المقابل لها ، A أى مركز فئة افتراضى أو نحمن $X_j = A + d_j$ انحرافات X_j عن A .

الحساب باستخدام الصيغ (٢) ، (٦) يسميان أحياناً بالطريقة المطولة والطريقة المختصرة على الترتيب . (أنظر المسائل ٣-١٥ و ٣-٢٠) . إذا كانت أطوال الفئات متساوية وتساوى C ، والانحرافات $d_j = X_j - A$ يمكن التعبير عنها بالصورة cu_j حيث u_j يمكن أن يكون عددا صحيحاً موجباً أو سالباً أو صفراً ، أى $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. وهذا فإن الصيغة (٦) تصبح

$$(٧) \quad \bar{X} = A + \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j}{N} \right) C = A + \left(\frac{\sum f u}{N} \right) C$$

والتي تكافئ المعادلة $\bar{X} = A + C\bar{u}$. (أنظر المسألة ٣-٢١) . وهذه تسمى بطريقة الترميز عند حساب الوسط الحسابي . وهذه الطريقة مختصرة جداً ويجب استخدامها دائماً للبيانات المجمعة عندما تكون أطوال الفئات متساوية . (أنظر المسائل ٣-٢٢ و ٣-٢٣) . لاحظ أنه في طريقة الترميز فإن قيم المتغير X تحول إلى قيم المتغير u بالعلاقة $X = A + cu$.

الوسيط

الوسيط لمجموعة من الأرقام مرتبة حسب قيمها (ق منظومة) هي القيمة التى في المنتصف أو الوسط الحسابي للقيمتين بالمنتصف .

مثال ١ — مجموعة الأرقام 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 وسيطها هو 6.

مثال ٢ — مجموعة الأرقام 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 وسيطها هو $\frac{1}{2}(9 + 11) = 10$.

وفي البيانات المجمعة فإن الوسيط نحصل عليه بالاستكمال وبحسب كالاتى :

$$(٨) \quad \text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{\frac{N}{2} - (\sum f)_1}{f_{\text{median}}} \right) C$$

حيث

$$L_1 = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة (أى الفئة التى يقع فيها الوسيط) .}$$

$$N = \text{عدد العناصر فى البيانات (مجموع التكرارات) .}$$

$$(Sf)_1 = \text{مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطة .}$$

$$f_{\text{median}} = \text{تكرار الفئة الوسيطة .}$$

$$c = \text{طول الفئة الوسيطة .}$$

ويمكن التعبير هندسيا عن الوسيط بأنه القيمة X على الاحداثى السينى التى إذا رسم عندها عمود رأسى فإنه يقسم المدرج التكرارى إلى جزئين متساويين . يعبر عن هذه القيمة لـ X أحيانا بـ \hat{X} .

المنوال

المنوال لمجموعة من القيم هى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها أو القيمة الأكثر شيوعا . وقد لا يكون للقيم منوال وقد يوجد للقيم منوال ولكنه غير وحيد .

مثال ١ — المجموعة 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 لها منوال 9 .

مثال ٢ — المجموعة 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 ليس لها منوال .

مثال ٣ — المجموعة 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 لها منوالان هما 4, 7 وتسمى مجموعة ذات منوالين .

التوزيع الذى له منوال واحد يسمى وحيد المنوال

فى حالة البيانات المجتمعة حيث يعبر عن البيانات بمنحنى تكرارى فإن المنوال هو قيمة (أو قيم) X المقابلة لنقطة (أو نقط) النهاية العظمى للمنحنى . ويعبر أحيانا عن هذه القيمة لـ X بالرمز \hat{X}

ونحصل على المنوال من التوزيع التكرارى أو المدرج التكرارى بالصيغة :

$$(٩) \quad \text{المنوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

حيث

$$L_1 = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية (أى الفئة التى يقع فيها المنوال) .}$$

Δ_1 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة قبل المنوالية .

Δ_2 = زيادة تكرار الفئة المنوالية عن تكرار الفئة بعد المنوالية .

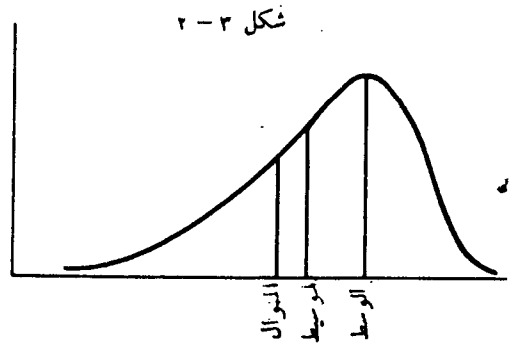
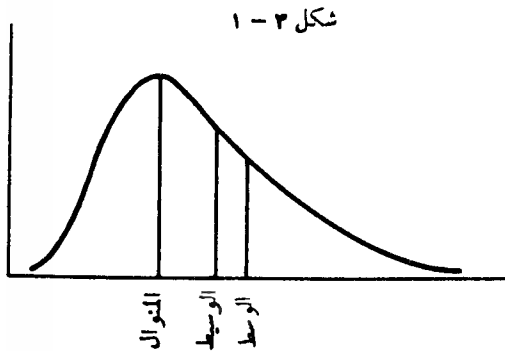
c = طول الفئة المنوالية .

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمنوال

المنحنيات التكرارية وحيدة المنوال والبسيطة الالتواء (غير متائلة) تحقق العلاقة الاعتبارية .

$$(10) \quad \text{المتوسط} - \text{المنوال} = 3 \quad (\text{المتوسط} - \text{الوسيط})$$

في الأشكال ١-٣ و ٢-٣ أدناه يوضح الموضع النسبي للوسط والوسيط والمنوال للمنحنيات التكرارية المتوتية إلى اليمين والمنحنيات المتوتية إلى اليسار على الترتيب . في المنحنيات المتائلة يتطابق الوسط والوسيط والمنوال .



الوسط الهندسي

الوسط الهندسي G لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأرقام .

$$(11) \quad G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \dots X_N}$$

مثال : الوسط الهندسي للأرقام 2, 4, 8 هو $4 = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{(2)(4)(8)}$.

ومن الناحية العملية فإن الوسط الهندسي G يحسب باستخدام اللوغاريتمات (أنظر المسألة ٣-٣٥) . لحساب الوسط

الهندسي للبيانات المجمعة أنظر المسائل ٣-٣٦، ٣-٣٩ .

الوسط التوافقي H :

الوسط التوافقي H لمجموعة من N رقم $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم .

$$(12) \quad H = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{X_j}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}}$$

ومن الناحية العملية فقد يكون من الأسهل أن نتذكر أن

$$(13) \quad \frac{1}{H} = \frac{\sum \frac{1}{X}}{N} = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X}$$

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{3}{8}} = 3.43 \quad \text{مثال : الوسط التوافقي للأرقام 2, 4, 8 هو}$$

حساب الوسط التوافقي للبيانات المجمة ، أنظر المسائل ٣-٩٩ ، ٣٠٠-١٠٠ .

العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي والوسط التوافقي :

الوسط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة X_1, X_2, \dots, X_N أقل من أو يساوي وسطها الحسابي ولكنه أكبر من أو يساوي وسطها التوافقي .

$$(14) \quad H \leq G \leq \bar{X}$$

وتتحقق علامة التساوي إذا كانت الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N متساوية

مثال : المجموعة 2, 4, 8 وسطها الحسابي 4.67 ووسطها الهندسي 4 ووسطها التوافقي 3.43

جذر متوسط المربعات (R.M.S) :

جذر متوسطات المربعات (R.M.S) أو الوسط التربيعي لمجموعة من الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N يرمز له أحيانا بالرمز $\sqrt{\bar{X^2}}$ ويعرف كالاتي :

$$(15) \quad \text{R.M.S.} = \sqrt{\bar{X^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}}$$

هذا النوع من المتوسط يستخدم بكثرة في التطبيقات الطبيعية .

مثال : جذر متوسط المربعات للأرقام 1, 3, 4, 5, 7 هو

$$\sqrt{\frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 7^2}{5}} = \sqrt{20} = 4.47$$

الرييمات والعشيرات والمئينات :

إذا رتبنا مجموعة من الأرقام حسب قيمها فإن القيمة التي في المنتصف (أو الوسط الحسابي للقيمتين بالمنتصف) والتي تقسم مجموعة القيم إلى مجموعتين متساويتين في العدد هي الوسيط . وبتميم هذه الفكرة يمكن أن نفكر في القيم التي تقسم المجموعة إلى أربعة أجزاء متساوية . هذه القيم ويرمز لها بالرموز Q_1, Q_2, Q_3 تسمى بالربيع الأول ، الربيع الثاني والربيع الثالث على الترتيب ، القيمة Q_2 تساوى الوسيط ، كذلك فإن القيم التي تقسم المجموعة إلى عشرة أجزاء متساوية تسمى بالمئينات ويرمز لها بالرمز D_1, D_2, \dots, D_9 بينما أن القيم التي تقسم البيانات إلى مائة قسم متساوية تسمى بالمئينات ويرمز لها بالرمز P_1, P_2, \dots, P_{99} . المئير الخامس والمئين الخمسين يساويان الوسيط . المئين الخامس والعشرون والمئين الخامس والسبعون يساويان الربيع الأول والربيع الثالث على الترتيب .

وإجمالاً لما سبق ذكره يمكن إيجاد الرييمات والمئينات والعشيرات وغيرها من القيم بتقسيم البيانات إلى أقسام جزئية متساوية تسمى قيم التقسيمات الجزئية . لحساب هذه القيم من بيانات مجمعة أنظر المسائل ٣-٤٤ إلى ٣-٤٦ .

مسائل محلولة

رمز التجميع :

٣-١ أكتب الحدود في كل من المجموع الموضح أدناه

$$\sum_{j=1}^6 X_j \quad X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \quad (١)$$

$$\sum_{j=1}^4 (Y_j - 3)^2 \quad (Y_1 - 3)^2 + (Y_2 - 3)^2 + (Y_3 - 3)^2 + (Y_4 - 3)^2 \quad (ب)$$

$$\sum_{j=1}^N a \quad a + a + a + \dots + a = Na \quad (ج)$$

$$\sum_{k=1}^5 f_k X_k \quad f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + f_4 X_4 + f_5 X_5 \quad (د)$$

$$\sum_{j=1}^3 (X_j - a) \quad (X_1 - a) + (X_2 - a) + (X_3 - a) = X_1 + X_2 + X_3 - 3a \quad (هـ)$$

٣-٢ عبر عما يلي باستخدام رمز التجميع

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots + X_{10}^2 \quad \sum_{j=1}^{10} X_j^2 \quad (١)$$

$$(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) + \dots + (X_8 + Y_8) \quad \sum_{j=1}^8 (X_j + Y_j) \quad (ب)$$

$$f_1X_1^3 + f_2X_2^3 + \dots + f_{20}X_{20}^3 \quad \sum_{j=1}^{20} f_j X_j^3 \quad (ج)$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_Nb_N \quad \sum_{j=1}^N a_jb_j \quad (د)$$

$$f_1X_1Y_1 + f_2X_2Y_2 + f_3X_3Y_3 + f_4X_4Y_4 \quad \sum_{j=1}^4 f_jX_jY_j \quad (هـ)$$

٣-٣ أثبت أن $\sum_{j=1}^N (aX_j + bY_j - cZ_j) = a \sum_{j=1}^N X_j + b \sum_{j=1}^N Y_j - c \sum_{j=1}^N Z_j$ حيث a, b and c أى ثوابت

الحل :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (aX_j + bY_j - cZ_j) &= (aX_1 + bY_1 - cZ_1) + (aX_2 + bY_2 - cZ_2) + \dots + (aX_N + bY_N - cZ_N) \\ &= (aX_1 + aX_2 + \dots + aX_N) + (bY_1 + bY_2 + \dots + bY_N) - (cZ_1 + cZ_2 + \dots + cZ_N) \\ &= a(X_1 + X_2 + \dots + X_N) + b(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) - c(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N) \\ &= a \sum_{j=1}^N X_j + b \sum_{j=1}^N Y_j - c \sum_{j=1}^N Z_j \end{aligned}$$

$$\Sigma(aX + bY - cZ) = a\Sigma X + b\Sigma Y - c\Sigma Z \quad \text{أو باختصار}$$

٣-٤ المتغيران X ، Y يأخذان القيم

$$X_1 = 2, X_2 = -5, X_3 = 4, X_4 = -8 \text{ and } Y_1 = -3, Y_2 = -8, Y_3 = 10, Y_4 = 6$$

على الترتيب . أحسب

$$\begin{aligned} \Sigma XY^2 \quad (ز) \quad \Sigma X \quad (ح) \quad \Sigma Y \quad (ب) \quad \Sigma XY \quad (ج) \quad \Sigma X^2 \quad (د) \quad \Sigma Y^2 \quad (هـ) \quad \Sigma X \cdot \Sigma Y \quad (و) \end{aligned}$$

$$\Sigma(X + Y)(X - Y) \quad (ح)$$

الحل :

لاحظ أنه في كل حالة قد حذف الدليل j في Y^2X ومن المفهوم أن Σ تعنى $\sum_{j=1}^4$

$$\text{فمثلا } \Sigma X \text{ هو اختصار لـ } \sum_{j=1}^4 X_j$$

$$\Sigma X = (2) + (-5) + (4) + (-8) = 2 - 5 + 4 - 8 = -7 \quad (ا)$$

$$\Sigma Y = (-3) + (-8) + (10) + (6) = -3 - 8 + 10 + 6 = 5 \quad (ب)$$

$$\Sigma XY = (2)(-3) + (-5)(-8) + (4)(10) + (-8)(6) = -6 + 40 + 40 - 48 = -26 \quad (ج)$$

$$\Sigma X^2 = (2)^2 + (-5)^2 + (4)^2 + (-8)^2 = 4 + 25 + 16 + 64 = 109 \quad (د)$$

$$\Sigma Y^2 = (-3)^2 + (-8)^2 + 10^2 + (6)^2 = 9 + 64 + 100 + 36 = 209 \quad (أ)$$

$$(\Sigma X)(\Sigma Y) \neq \Sigma XY \quad \text{باستخدام (1) ، (ب) لاحظ أن} \quad (\Sigma X)(\Sigma Y) = (-7)(5) = -35, \quad (و)$$

$$\Sigma XY^2 = (2)(-3)^2 + (-5)(-8)^2 + (4)(10)^2 + (-8)(6)^2 = -190 \quad (ز)$$

$$\Sigma(X+Y)(X-Y) = \Sigma(X^2 - Y^2) = \Sigma X^2 - \Sigma Y^2 = 109 - 209 = -100 \quad (أ) ، \quad \text{باستخدام (ج) ،} \quad (ح)$$

$$\sum_{j=1}^6 X_j(X_j-1) \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^6 (2X_j+3) \quad \text{احسب (1)} \quad \sum_{j=1}^6 X_j^2 = 10, \quad \sum_{j=1}^6 X_j = -4 \quad \text{إذا كانت } \sum_{j=1}^6 (X_j-5)^2 \quad (ج)$$

الحل :

$$\sum_{j=1}^6 (2X_j+3) = \sum_{j=1}^6 2X_j + \sum_{j=1}^6 3 = 2 \sum_{j=1}^6 X_j + (6)(3) = 2(-4) + 18 = 10 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^6 X_j(X_j-1) = \sum_{j=1}^6 (X_j^2 - X_j) = \sum_{j=1}^6 X_j^2 - \sum_{j=1}^6 X_j = 10 - (-4) = 14 \quad (ب)$$

$$\sum_{j=1}^6 (X_j-5)^2 = \sum_{j=1}^6 (X_j^2 - 10X_j + 25) = \sum_{j=1}^6 X_j^2 - 10 \sum_{j=1}^6 X_j + 25(6) = 10 - 10(-4) + 25(6) = 200 \quad (ج)$$

ومن الممكن حذف الدليل j إذا رغبتنا في ذلك واستخدام Σ بدلاً من $\sum_{j=1}^6$ مادام هذا الاختصار مفهوماً .

الوسط الحسابي :

٣-٦ درجات طالب في ستة امتحانات هي 84, 91, 72, 68, 87 and 78 . أوجد الوسط الحسابي لهذه الدرجات

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{84 + 91 + 72 + 68 + 87 + 78}{6} = \frac{480}{6} = 80 \quad \text{الحل :}$$

في كثير من الأحيان يستخدم الاصطلاح المتوسط كمرادف للوسط الحسابي . ومن حيث النقة فهذا الاستخدام غير سليم حيث أن هناك متوسطات أخرى غير الوسط الحسابي .

٣-٧ سجل أحد العلماء العشرة قياسات التالية لأقطار أسطوانة فكانت :

38.8, 40.9, 39.2, 39.7, 40.2, 39.5, 40.3, 39.2, 39.8 and 40.6 millimetres . أوجد الوسط الحسابي للقياسات .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{38.8 + 40.9 + 39.2 + 39.7 + 40.2 + 39.5 + 40.3 + 39.2 + 39.8 + 40.6}{10} = \frac{398.2}{10} = 39.8 \text{ mm}$$

٨-٣ الأجر السنوي لأربعة رجال هو \$5000, \$6000, \$6500 and \$30 000. (أ) أوجد الوسط الحسابي للأجور

(ب) هل يمكن القول بأن هذا الوسط يمثل لهذه الأجور ؟

الحل :

$$\bar{x} = \frac{\$5000 + \$6000 + \$6500 + \$30000}{4} = \frac{\$45500}{4} = \$11875 \quad (1)$$

(بافتراض أن جميع الأرقام في الأجور المغطاة معنوية) .

(ب) المتوسط \$11 875 ليس مثلاً للأجور بالتأكيد واعتبار هذا الرقم كوسط بدون تعليق أكثر عليه يؤدي إلى كثير من الخطأ . فأحد العيوب الكبيرة في المتوسط هو شدة تأثره بالقيم المتطرفة .

٩-٣ أوجد الوسط الحسابي للأرقام 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4

الطريقة ١ :

$$\bar{x} = \frac{\sum X}{N} = \frac{5 + 3 + 6 + 5 + 4 + 5 + 2 + 8 + 6 + 5 + 4 + 8 + 3 + 4 + 5 + 4 + 8 + 2 + 5 + 4}{20} = \frac{96}{20} = 4.8$$

الطريقة ٢ :

هناك ست خمسات وثلاثتان وستتان وخمس أربعيات واثنان وثلاثة ثمانيات . إذن

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{(6)(5) + (2)(3) + (2)(6) + (5)(4) + (2)(2) + (3)(8)}{6 + 2 + 2 + 5 + 2 + 3} = \frac{96}{20} = 4.8$$

١٠-٣ من مائة رقم 20 أربعة ، 40 خمسة ، 30 ستة والباقي كانوا سبعة . أوجد الوسط الحسابي لهذه الأرقام .

$$\bar{x} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{(20)(4) + (40)(5) + (30)(6) + (10)(7)}{100} = \frac{530}{100} = 5.30$$

١١-٣ إذا كانت درجات طالب في الرياضة والطبيعة واللغة الإنجليزية والصحة العامة هي على الترتيب 82 , 86 , 90 , 70 .

إذا كانت معاملات الترجيح (عدد ساعات المحاضرات الأسبوعية) لهذه المقررات هي 1, 3, 5, 3 أوجد متوسط الدرجات بالتقريب .

الحل :

تستخدم الوسط الحسابي المرجح والأوزان المستخدمة لكل درجة هي معاملات الترجيح لكل مادة . إذن

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{(3)(82) + (5)(86) + (3)(90) + (1)(70)}{3 + 5 + 3 + 1} = 85$$

- ٣-١٢ في شركة بها 80 عاملا ، 60 يحصلون على \$3.0 في الساعة ، 20 يحصلون على \$2.00 في الساعة .
 (أ) أوجد متوسط دخولهم في الساعة (ب) هل الإجابة على (أ) لن تتغير إذا كان الـ 60 عاملا متوسط دخلهم في الساعة هو \$3.00 والـ 20 عاملا متوسط دخلهم في الساعة هو \$2.00 ؟ حقق اجابتك ؟
 (ج) هل تعتقد أن متوسط أجر الساعة يمثل للأجور ؟

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{(60)(\$3.00) + (20)(\$2.00)}{60 + 20} = \frac{\$220.00}{80} = \$2.75 \quad (1)$$

- (ب) نعم ، النتيجة واحدة . لإثبات ذلك افرض أن f_1 رقم لها وسط m_1 و f_2 رقم لها وسط m_2 . يجب أن نثبت أن وسط جميع الأرقام هو

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2}{f_1 + f_2}$$

إذا كان مجموع الـ f_1 رقم هو M_1 والـ f_2 رقم هو M_2 . فإنه من تعريف الوسط الحسابي .

$$m_1 = \frac{M_1}{f_1} \quad m_2 = \frac{M_2}{f_2}$$

أو $M_1 = f_1 m_1$ ، $M_2 = f_2 m_2$ وبما أن مجموع الـ $(f_1 + f_2)$ رقم هو $(M_1 + M_2)$ فإن الوسط الحسابي لجميع الأرقام هو

$$\bar{X} = \frac{M_1 + M_2}{f_1 + f_2} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2}{f_1 + f_2}$$

وهو المطلوب . ومن السهل تعميم النتيجة .

- (ج) من الممكن أن نقول أن \$2.75 « مثل » لأجر الساعة بمعنى أن أغلب العاملين يحصلون على \$3.00 في الساعة والذي لا يبعد كثيرا عن \$2.75 ويجب أن نذكر أنه عند تلخيص البيانات الرقية في رقم واحد (كما هو الحال في الوسط) فإننا معرضين للوقوع في بعض الخطأ ومن المؤكد أن النتيجة ليست مضللة كما في المسألة ٣ - ٨

والواقع وحتى نكون في جانب الحرس فإن بعض التقدير « لتشتت » أو « التغير » في البيانات حول الوسط (أو الأوساط الأخرى) يجب أن يعطى . وهذا يسمى بالتشتت في البيانات . وسوف يعطى في الفصل الرابع مقاييس مختلفة له .

- ٣-١٣ أربع مجموعات من الطلبة مكونة من 18, 10, 20, 15 شخصا وكان متوسط أطوالهم 1.62, 1.48, 1.53, 1.40 metres على الترتيب أوجد متوسط الطول لكل الطلبة .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(15)(1.62) + (20)(1.48) + (10)(1.53) + (18)(1.40)}{15 + 20 + 10 + 18} = 1.50 \text{ m}$$

١٤-٣ إذا كان متوسط الدخل السنوي للعالم الزراعيين والعامل غير الزراعيين في الولايات المتحدة هو \$3500, \$4500 على الترتيب ، فهل متوسط الدخل السنوي للمجموعتين معا يمكن أن يكون \$4000 ؟

الحل :

من الممكن أن يكون \$4000 في حالة ما إذا كان عدد العمال الزراعيين والعمال غير الزراعيين متساويا . لتحديد متوسط الدخل السنوي الحقيقي فيجب أن نعرف عدد العمال في كل مجموعة . فإذا كان ، على سبيل المثال مقابل كل عامل زراعي ١١ عاملا غير زراعي فإن المتوسط يصبح :

$$\bar{X} = \frac{(1)(\$3500) + (11)(\$4500)}{1 + 11} = \$4400$$

إلى أقرب \$100 . وهذا هو الوسط الحسابي المرجح .

١٥-٣ استخدم التوزيع التكراري للأوزان الموضح بالجدول في صفحة ٤٥ لإيجاد متوسط أوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ

الحل :

الحل موضح بالجدول ١-٣ . لاحظ أن كل الطلبة الذين أوزانهم 60—62 kg, 63—65 kg, etc. اعتبروا أن أوزانهم 61 و 64 kg, etc. بهذا فإن المشكلة اختصرت لتصبح الحصول على متوسط وزن 100 طالب إذا كان 5 طلبة أوزانهم 61 kg ، 18 أوزانهم 64 kg وهكذا .

جدول ١ - ٣

الأوزان (kg)	مراكز الفئات (X)	التكرار (f)	(fX)
60 - 62	61	5	305
63 - 65	64	18	1152
66 - 68	67	42	2814
69 - 71	70	27	1890
72 - 74	73	8	584
		$N = \sum f = 100$	$\sum fX = 6745$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{6745}{100} = 67.45 \text{ kg}$$

والعمليات الحسابية المطلوبة لحل قد تصبح مملة وخاصة إذا كانت الأرقام كبيرة والفئات كثيرة . وتوجد أساليب لتقليل من العمل المطلوب في مثل هذه الحالات . أنظر المسائل ٣-٢٠ و ٣-٢١ كأشلة .

خصائص الوسط الحسابي :

١٦-٣ أثبت أن مجموع انحرافات X_1, X_2, \dots, X_N عن وسطها \bar{X} يساوى صفراً .

الحل :

إذا كان $d_1 = X_1 - \bar{X}, d_2 = X_2 - \bar{X}, \dots, d_N = X_N - \bar{X}$ انحرافات X_1, X_2, \dots, X_N عن وسطها \bar{X} فإن

$$\begin{aligned} \text{مجموع الانحرافات} &= \sum d_j = \sum (X_j - \bar{X}) = \sum X_j - N\bar{X} \\ &= \sum X_j - N \left(\frac{\sum X_j}{N} \right) = \sum X_j - \sum X_j = 0 \end{aligned}$$

حيث استخدمنا \sum بدلاً من $\sum_{j=1}^N$ ومن الممكن إذا أردنا حذف الدليل j في X_j على شرط أن يكون ذلك مفهوماً .

١٧-٣ إذا كان $Z = \bar{X} + \bar{Y}$ أثبت أن $Z_1 = X_1 + Y_1, Z_2 = X_2 + Y_2, \dots, Z_N = X_N + Y_N$

الحل :

$$\text{بالتعريف} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}, \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N}, \bar{Z} = \frac{\sum Z}{N} \quad \text{إذن}$$

$$Z = \frac{\sum Z}{N} = \frac{\sum (X + Y)}{N} = \frac{\sum X + \sum Y}{N} = \frac{\sum X}{N} + \frac{\sum Y}{N} = \bar{X} + \bar{Y}$$

حيث حذفنا الدليل j في X, Y, Z و \sum تسمى $\sum_{j=1}^N$

١٨-٣ (١) إذا كان N من الأعداد X_1, X_2, \dots, X_N لها انحرافات عن أى رقم A مطاة على الترتيب كالاتي :

$$d_1 = X_1 - A, d_2 = X_2 - A, \dots, d_N = X_N - A$$

أثبت أن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N} = A + \frac{\sum d}{N}$$

(ب) إذا كانت تكرارات X_1, X_2, \dots, X_K هي على الترتيب f_1, f_2, \dots, f_K وكانت

$d_1 = X_1 - A, \dots, d_K = X_K - A$ أثبت أن النتيجة في (١) يحل بدلاً منها

$$\sum_{j=1}^K f_j = \sum f = N \quad \text{حيث} \quad \bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = A + \frac{\sum f d}{N}$$

الطريقة ١ :

بما أن $X_j = A + d_j$, $d_j = X_j - A$ فإن

$$\bar{X} = \frac{\sum X_j}{N} = \frac{\sum (A + d_j)}{N} = \frac{\sum A + \sum d_j}{N} = \frac{NA + \sum d_j}{N} = A + \frac{\sum d_j}{N}$$

حيث استخدمنا \sum بدلا من $\sum_{j=1}^N$ للاختصار

الطريقة ٢ :

بما أن $d = X - A$ أو $X = A + d$ حيث حذفنا الدليل في d والـ X ، وبهذا ، باستخدام المسألة

١٧-٣ .

$$\bar{X} = \bar{A} + \bar{d} = A + \frac{\sum d}{N}$$

حيث أن متوسط عدد من الثوابت كلها تساوى A هو A .

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = \frac{\sum f_j X_j}{N} = \frac{\sum f_j (A + d_j)}{N} = \frac{\sum A f_j + \sum f_j d_j}{N} = \frac{A \sum f_j + \sum f_j d_j}{N} \quad (ب) \\ &= \frac{AN + \sum f_j d_j}{N} = A + \frac{\sum f_j d_j}{N} = A + \frac{\sum f d}{N} \end{aligned}$$

لاحظ أن النتيجة حصلنا عليها أساسا من (١) بإحلال $f_j d_j$ بدلا من d_j والتجميع من $j = 1$ إلى K بدلا من

$j = 1$ إلى N . النتيجة مكافئة لـ $\bar{X} = A + \bar{d}$ حيث $\bar{d} = (\sum f d)/N$.

حساب الوسط الحسابي من بيانات مجمعة :

١٩-٣ استخدم طريقة المسألة ١٨-٣ (١) لإيجاد الوسط الحسابي للأرقام 5, 8, 11, 9, 12, 6, 14, 10 مستخدما

« وسط » تخميني A قيمته (١) 9 (ب) 20 .

الحل :

(١) انحرافات الأرقام المعطاة عن 9 هي 1 و 5 و 3 و 0 و 2 و 1 و 4 - ومجموع الانحرافات

هو $\sum d = 1 + 5 + 3 + 0 + 2 + 1 - 4 = 3$ إذن .

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 9 + \frac{3}{8} = 9.375$$

(ب) انحرافات الأرقام المعطاة عن 20 هي 10 - ، 6 - ، 14 - ، 8 - ، 11 - ، 9 - ، 12 - ، 15 -

و $\sum d = -85$. إذن .

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 20 + \frac{(-85)}{8} = 9.375$$

٢٠-٣ استخدم طريقة المسألة ٣-١٨ (أ) لإيجاد الوسط الحسابي لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر المسألة ١٥-٣).

الحل :

جدول ٣-٢

مركز الفئة X	انحرافات $d = X - A$	تكرارات f	fd
61	-6	5	-30
64	-3	18	-54
$A \rightarrow 67$	0	42	0
70	3	27	81
73	6	8	48
		$N = \sum f = 100$	$\sum fd = 45$

يمكن أن ينظم الحل كما في الجدول ٣-٢. أخذنا كوسط تخميني A مركز الفئة 67 (المقابل لأكبر تكرار)، على الرغم من أن أي مركز فئة يمكن استخدامه كوسط تخميني. لاحظ أن الحسابات أسهل بما في المسألة ٣-١٥. ولاختصار العمل فن الممكن أن نسير كما في المسألة ٣-١٢ حيث استفدنا من أن الانحرافات (العمود الثاني في الجدول) هي أرقام صحيحة مضاعفة لطول الفئة

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 67 + \frac{45}{100} = 67.45 \text{ kg}$$

٢١-٣ إذا كانت $d_j = X_j - A$ هي انحرافات مركز أي فئة X_j في توزيع تكراري عن مركز فئة ما A . أثبت أنه إذا كانت كل الفئات لها نفس الطول c فإن (أ) الانحرافات مضاعفات لـ c بمعنى $d_j = cu_j$ حيث $u_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ب) الوسط الحسابي يمكن حسابه من الصيغة

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c$$

الحل :

يمكن تمثيل النتيجة بجدول المسألة ٣-٢٠ حيث نلاحظ أن الانحرافات في العمود الثاني كلها مضاعفات لطول الفئة $c = 3 \text{ kg}$.

ولنتثبت أن النتيجة صحيحة على وجه العموم، لاحظ أنه إذا كانت X_1, X_2, X_3, \dots مراكز فئات متتالية فإن الفرق المشترك في هذه الحالة يساوي c . بحيث $X_2 = X_1 + c$, $X_3 = X_1 + 2c$ وبشكل عام $X_j - X_1 = (j - 1)c$. وبهذا فالفرق بين مركزي فئتين X_p ، X_q على سبيل المثال هو

$$X_p - X_q = [X_1 + (p - 1)c] - [X_1 + (q - 1)c] = (p - q)c$$

وهو مضاعف للرقم c .

(ب) باستخدام النتيجة في (أ) فإن انحرافات كل مراكز الفئات عن مركز فئة ما هي مضاعفات c بمعنى $d_j = cu_j$ وباستخدام المسألة ٣-١٨ فإن

$$\bar{X} = A + \frac{\sum f d_j}{N} = A + \frac{\sum f (cu_j)}{N} = A + c \frac{\sum f u_j}{N} = A + \left(\frac{\sum f u}{N} \right) c$$

لاحظ أن هذا يكافئ النتيجة $\bar{X} = A + c \bar{u}$ والتي يمكن الحصول عليها من $\bar{X} = A + \bar{d}$ بوضع $d = cu$ وملاحظة أن $\bar{d} = c \bar{u}$ (أنظر المسألة ٣-١٨).

جدول ٣-٣

X	u	f	fu
61	2	5	10
64	1	18	18
$A \rightarrow 67$	0	42	0
70	1	27	27
73	2	8	16
$N = 100$			$\sum fu = 15$

٣-٢٢ استخدم نتائج المسألة ٣-٢١ لإيجاد متوسط

أوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر

المسألة ٣-٢٠).

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٣-٣ هذه

الطريقة تسمى « طريقة الترميز » ويجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c = 67 + \left(\frac{15}{100} \right) (3) = 67.45 \text{ kg}$$

٣-٢٣ احسب متوسط الأجر الشهري للخمسة وستين عاملاً في شركة P and R من التوزيع التكراري في صفحة ٤٥ باستخدام

(أ) الطريقة المطولة (ب) طريقة الترميز.

الحل :

جدول ٣-٥

(ب)

X	u	f	fu
£55.00	-2	8	-16
65.00	-1	10	-10
$A \rightarrow 75.00$	0	16	0
85.00	1	14	14
95.00	2	10	20
105.00	3	5	15
115.00	4	2	8
$N = 65$			$\sum fu = 31$

جدول ٣-٤

(أ)

X	f	fX
£55.00	8	£440.00
65.00	10	650.00
75.00	16	1200.00
85.00	14	1190.00
95.00	10	950.00
105.00	5	525.00
115.00	2	230.00
$N = 65$		$\sum fX = £5185.00$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum fu}{N} \right) c = £75.00 + \left(\frac{31}{65} \right) (£10.00) = £79.77$$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{£5185.00}{65} = £79.77$$

قد يكون من الممكن افتراض أن هناك خطأ أدخل في الجداول السابقة حيث أن مراكز الفئات الفعلية هي £64.995, £54.995 بدلا من £65.00, £55.00 وإذا استخلفنا في الجدول ٣ - ٤ مراكز الفئات الحقيقية فإن \bar{X} سيصبح £79.76 بدلا من £79.77 والفرق يمكن إهماله.

الجدول ٣ - ٦

X	f	fX
£55.00	8	£440.00
65.00	10	650.00
75.00	16	1200.00
85.00	15	1275.00
95.00	10	950.00
110.00	8	880.00
150.00	3	450.00
	$N = 70$	$\Sigma fX = £5845.00$

٣ - ٢٤ أوجد متوسط أجور الـ 70 عاملا في شركة P and R

باستخدام الجدول (ث) في صفحة ٦١ .

الحل :

في هذه الحالة أطوال الفئات غير متساوية وعليه يجب أن نستخدم الطريقة المطولة كما هو موضح بالجدول ٣ - ٦ .

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{£5845.00}{70} = £83.50$$

الوسيط :

٣ - ٢٥ درجات طالب في ستة امتحانات كانت 78, 87, 68, 72, 91, 84 . أوجد وسيط هذه الدرجات .

الحل :

بترتيب الدرجات في منظومة تصبح 68, 72, 78, 84, 87, 91 .

وبما أن عدد الدرجات زوجي فإن هناك قيمتين في المنتصف 78, 84 وسطهما الحسابي $\frac{1}{2}(78 + 84) = 81$

هو الوسيط المطلوب . قارن بالمسألة ٣ - ٦ حيث الوسيط الحسابي = 80

٣ - ٢٦ الأجر بالساعة لخمس عاملين في مكتب هو \$3.75, \$9.20, \$3.28, \$3.96, \$2.52 . أوجد .

(أ) وسيط أجر الساعة (ب) متوسط أجر الساعة .

الحل :

(أ) بترتيب الأجر في منظومة تصبح \$2.52, \$3.28, \$3.75, \$3.96, \$9.20 . وبما أن هناك عدداً فردياً من

القيم فإن هناك قيمة واحدة في المنتصف وهي \$3.75 وهي الوسيط المطلوب .

$$(ب) \text{ الوسيط الحسابي هو } \frac{2.52 + \$3.96 + \$3.28 + \$9.20 + \$3.75}{5} = \$4.54$$

لاحظ أن الوسيط لم يتأثر بالقيمة المتطرفة \$9.20 بينما تأثر الوسط بها . وفي هذه الحالة فإن الوسيط يعطي دلاً

أفضل على معدل أجر الساعة عن الوسط .

٣ - ٢٧ إذا رتب (أ) 85 ، (ب) 150 رقماً في منظومة ، كيف يمكن الحصول على وسيط هذه الأرقام ؟

الحل :

(أ) بما أن هناك 85 عنصراً ، وهو رقم فردي ، فإن هناك قيمة وسطى وحيدة حيث يوجد قبلها 42 رقم وبعدها 42 رقم . وبهذا فإن الوسيط هو الرقم الذي ترتيبه الثالث والأربعين في المنظومة .

(ب) بما أن هناك 150 عنصراً ، وهو رقم زوجي ، فإن هناك قيمتين في الوسط حيث يوجد قبلهما 74 رقم وبعدهما 74 رقماً . وهاتان القيمتان ترتيبهما الخامس والسبعون والسادس والسبعون في المنظومة ووسطها الحسابي هو الوسيط المطلوب .

٣ - ٢٨ أوجد وسيط أطوال 40 من أوراق نبات الغار (أنظر المسألة ٢ - ٨ ، صفحة ٥٧) باستخدام (أ) التوزيع الثنائي للمسألة ٢ - ٨ والذي أعدنا كتابته هنا (ب) البيانات الأصلية

الحل :

جدول ٣ - ٧

الطول (mm)	التكرار
118-126	3
127-135	5
136-144	9
145-153	12
154-162	5
163-171	4
172-180	2
	المجموع 40

(أ) الطريقة الأولى ، باستخدام الاستكمال :

الأطوال في الجدول التكراري المبين على اليمين يفترض فيها أنها تتوزع توزيعاً متصلًا . في هذه الحالة فإن الوسيط هو هذا الطول الذي يقع نصف التكرار الكلي أعلاه $(40/2 = 20)$ والنصف الآخر بعده .

وحيث أن مجموع تكرارات الفئات الثلاث الأولى هو $3 + 5 + 9 = 17$ وحتى نحصل على الرقم المطلوب 20 فإننا نريد 3 أرقام من الفئة الرابعة الموجودة في الفئة الرابعة .

وبما أن الفئة الرابعة 153 — 145 هي في الحقيقة تقابل الأطوال 153.5 to 144.5 فإن الوسيط يقع في $\frac{3}{12}$ المسافة بين 153.5, 144.5 أي أن الوسيط هو

$$144.5 + \frac{3}{12} (153.5 - 144.5) = 144.5 + \frac{3}{12} (9) = 146.8 \text{ mm}$$

الطريقة ٢ ، باستخدام القانون :

بما أن مجموع التكرارات المقابلة للفئات الثلاث الأولى والفئات الأربع الأولى هي على الترتيب $3 + 5 + 9 = 17$ ، $3 + 5 + 9 + 12 = 29$ فإن الوسيط يقع في الفئة الرابعة والتي هي بالتالي الفئة الوسيطة . وبهذا :

$$L_1 = \text{الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطة} = 144.5 =$$

$$N = \text{عدد العناصر في البيانات} = 40 =$$

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 9 &= 17 = (\Sigma f)_1 & \text{مجموع التكرارات لجميع الفئات قبل الفئة الوسيطة} \\ 12 &= f_{\text{median}} & \text{تكرار الفئة الوسيطة} \\ 9 &= c & \text{طول الفئة الوسيطة} \end{aligned}$$

وهذا فإن

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\Sigma f)_1}{f_{\text{median}}} \right) c = 144.5 + \left(\frac{40/2 - 17}{12} \right) (9) = 146.8 \text{ mm}$$

(ب) بترتيب الأطوال الأصلية في منظومة تصبح

119, 125, 126, 128, 132, 135, 135, 135, 136, 138, 138, 140, 140, 142, 142, 144, 144, 145, 145, 146, 146, 147, 147, 148, 149, 150, 150, 152, 153, 154, 156, 157, 158, 161, 163, 164, 165, 168, 173, 176

الوسيط هو الوسط الحسابي للطول العشرين والواحد والعشرين في المنظومة ويساوي 146 mm .

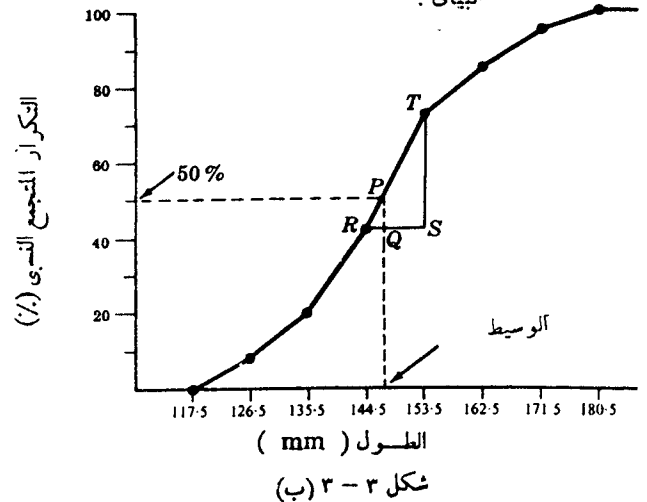
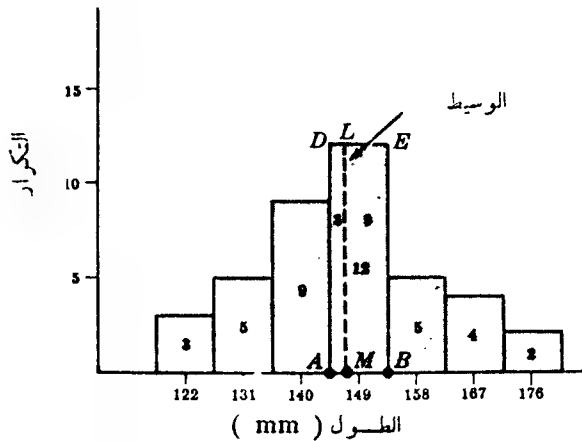
٣ - ٢٩ وضع كيف يمكن الحصول على وسيط الطول في المسألة السابقة باستخدام

(أ) المدرج التكراري (ب) المنحنى التكراري المتجمع النسبي .

الحل :

(أ) في الشكل ٣ - ٣ (أ) يوضح المدرج التكراري المقابل للأطوال في المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثي السيني للنقط LM الذي يقسم المدرج التكراري إلى مساحتين متساويتين وحيث أن المساحة تقابل التكرار في المدرج التكراري ، فإن النقط LM يقسم المساحة الكلية بحيث يكون التكرارات على يمينه والتكرارات على يساره مساوية لنصف التكرار الكلي أو 20 . مثلا المساحة $AMLD$ تناظر التكرار 3 والمساحة $MBEL$ تناظر التكرار 9 .

وهذا فإن $AM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (9) = 2.25$ ، وقيمة الوسيط هي $144.5 + 2.25 = 146.75$ ، ويمكن قراءة القيمة بشكل تقريبي مباشرة من الرسم البياني .



(ب) الشكل ٣ - ٣ (ب) يوضح المضلع التكرارى المتجمع النسبى المقابل للأوزان فى المسألة السابقة . والوسيط هو الأحداثى السبئى للنقطة P على المنحنى التكرارى المتجمع والتى أحداثها الصادى 50% . وللحصول على قيمتها فإننا نلاحظ من المثلثات المماثلة PQR و RST أن

$$\frac{RQ}{RS} = \frac{PQ}{ST} \text{ or } \frac{RQ}{9} = \frac{50\% - 42.5\%}{72.5\% - 42.5\%} = \frac{1}{4} \text{ so that } RQ = \frac{9}{4} = 2.25$$

وهذا فإن

$$\text{الوسيط} = 144.5 + RQ = 144.5 + 2.25 = 146.75 \text{ mm}$$

أو 146.8 mm إلى أقرب عشر المليمتر . وهذه القيمة يمكن قراءتها بالتقريب من الرسم البيانى .

٣٠ - ٣ أوجد وسيط أجور الـ 65 عاملا فى شركة P and R (أنظر الفصل الثانى والمسألة ٢ - ٣ صفحة ٥٣)

الحل :

هنا $N = 65$, $N/2 = 32.5$. وبما أن مجموع الفئتين الأولى والثانية هما $18 = 10 + 8$ ومجموع

الفئات الثلاث الأولى هو $34 = 16 + 10 + 8$ فإن الفئة الوسيطة هى الفئة الثالثة . باستخدام الصيغة .

$$\text{الوسيط} = L_1 + \left(\frac{N/2 - (\sum f)_1}{f_{\text{median}}} \right) c = £69.995 + \left(\frac{32.5 - 18}{16} \right) (£10.00) = £79.06$$

المتوال :

٣١ - ٣ أوجد الوسط والوسيط والمتوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6

(ب) 50.3, 49.5, 48.9, 51.6, 48.7

الحل :

(أ) بترتيب الأرقام فى منظومة لتصير 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

الوسيط = $\frac{1}{2} (2 + 2 + 3 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 8 + 9) = 5.1$

الوسيط = الوسط الحسابى للقيمتين فى المنتصف = $\frac{1}{2} (5 + 5) = 5$

المتوال = الرقم الأكثر شيوعاً = 5.

(ب) بترتيب الأرقام في منظومة لتصير 48.7, 48.9, 49.5, 50.3, 51.6

$$\text{الوسط} = 49.8 = (48.7 + 48.9 + 49.5 + 50.3 + 51.6)$$

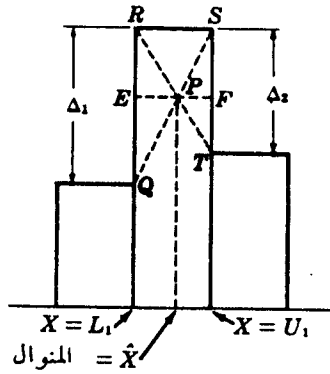
$$\text{الوسيط} = \text{الرقم في الوسط} = 49.5$$

النوال = الرقم الأكثر شيوعاً ، ولا يوجد في هذه الحالة

٣-٣٢ أوجد صيغة لتحديد النوال من بيانات معبر عنها في توزيع تكرارى .

الحل :

افترض أن الشكل ٣-٤ يمثل ثلاثة مستطيلات من المدرج التكرارى لهذا التوزيع التكرارى ويمثل المستطيل الأوسط الفئة المنوالية . افترض أيضاً أن طول الفئات متساو .



شكل ٣-٤

ويعرف النوال بأنه النقطة \hat{X} على المحور السينى المقابلة للنقطة P وهى نقطة تقاطع الخطين RT , QS إذا كانت $X = U_1$, $X = L_1$ تمثل الحدود الدنيا والعليا للفئة المنوالية Δ_1, Δ_2 يمثلان على الترتيب الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التى على يسارها والفئة التى على يمينها فإنه من المثلثات المتشابهة PST

$$\frac{\hat{X} - L_1}{\Delta_1} = \frac{U_1 - \hat{X}}{\Delta_2} \quad , \quad \frac{EP}{RQ} = \frac{PF}{ST} \quad \text{نجد } PQR \text{ و}$$

إذن

$$\Delta_2(\hat{X} - L_1) = \Delta_1(U_1 - \hat{X}), \quad \Delta_2\hat{X} - \Delta_2L_1 = \Delta_1U_1 + \Delta_1\hat{X}, \quad (\Delta_1 + \Delta_2)\hat{X} = \Delta_1U_1 + \Delta_2L_1$$

أو

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1U_1 + \Delta_2L_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

وبما أن $U = L_1 + c$ حيث c هو طول الفئة ، فإننا نجد أن

$$\hat{X} = \frac{\Delta_1(L_1 + c) + \Delta_2L_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)L_1 + \Delta_1c}{\Delta_1 + \Delta_2} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c$$

وهذه النتيجة لها تفسير ذو أهمية فإذا رسمنا قطعاً مكافئاً بحيث يمر بمنتصف قمة المستطيلات في الشكل فإن النقطة على المحور الرأسى المقابلة لنقطة النهاية المعظمى لهذا القطع المكافئ هي المتوال كما حصلنا عليه أعلاه .

٢-٣٣ أوجد متوال أجور الـ 65 عاملاً في شركة P and R (انظر المسألة المسألة ٣-٢٢) باستخدام الصيغة التي حصلنا عليها في المسألة ٣-٣٢ .

الحل :

هنا $L_1 = £69.995$, $\Delta_1 = 16 - 10 = 6$, $\Delta_2 = 16 - 14 = 2$, $c = £10.00$ وهذا فإن

$$\text{المتوال} = L_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) c = £69.995 + \left(\frac{6}{2+6} \right) (£10.00) = £77.50$$

علاقة اعتبارية بين الوسط والوسيط والمتوال :

٢-٣٤ (أ) استخدم العلاقة الاعتبارية : الوسط - المتوال = ٣ (الوسط - الوسيط) لإيجاد متوال أجور الـ 65 عاملاً في شركة P and R .

(ب) قارن نتائجك بالمتوال الذي حصلت عليه في المسألة ٣-٣٢ .

الحل :

(أ) من المسألة ٣-٣٣ نجد أن الوسط = £79.77 والوسيط = £79.06 إذن

المتوال = الوسط - ٣ (الوسط - الوسيط)

$$= £79.77 - 3(£79.77 - £79.06) = £77.64$$

(ب) من المسألة ٣-٣٣ متوال الأجور £77.50 بحيث يتفق بشكل جيد مع العلاقة الاعتبارية في هذه الحالة .

الوسط الهندسى :

٢-٣٥ أوجد (أ) الوسط الهندسى (ب) الوسط الحسابى الأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 مفترضاً أن هذه الأرقام دقيقة .

(أ) الوسط الهندسى = $\sqrt[7]{(3)(5)(6)(6)(7)(10)(12)}$ باستخدام اللوغاريتمات المعتادة

$$\log G = \frac{1}{7} \log 453600 = 0.8081 \text{ and } G = 6.43 \quad (\text{ إلى أقرب جزء من المائة})$$

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{7} (\log 3 + \log 5 + \log 6 + \log 6 + \log 7 + \log 10 + \log 12) \\ &= \frac{1}{7} (0.4771 + 0.6990 + 0.7782 + 0.7782 + 0.8451 + 1.0000 + 1.0792) \\ &= 0.8081, \quad G = 6.43 \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$\bar{X} = \frac{1}{4}(3 + 5 + 6 + 6 + 7 + 10 + 12) = 7 \quad \text{(ب) الوسط الحسابي =}$$

وهذا يوضح الحقيقة أن الوسط الهندسي لمجموعة من أرقام موجبة غير متساوية أقل من وسطها الحسابي .

٣٦-٣ الأرقام X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K حيث $f_1 + f_2 + \dots + f_K = N$ هو التكرار الكلي .

(أ) أوجد الوسط الهندسي G للأرقام

(ب) امنتج صيغة لـ $\log G$

(ج) كيف يمكن استخدام النتائج للحصول على الوسط الهندسي لبيانات مجمعة في توزيع تكراري ؟

الحل :

$$G = \sqrt[N]{\underbrace{X_1 X_1 \dots X_1}_{f_1 \text{ times}} \underbrace{X_2 X_2 \dots X_2}_{f_2 \text{ times}} \dots \underbrace{X_K X_K \dots X_K}_{f_K \text{ times}}} = \sqrt[N]{X_1^{f_1} X_2^{f_2} \dots X_K^{f_K}} \quad (1)$$

حيث $N = \sum f_i$ ، هذا يسمى أحياناً بالوسط الهندسي المرجح .

$$\begin{aligned} \log G &= \frac{1}{N} \log (X_1^{f_1} X_2^{f_2} \dots X_K^{f_K}) = \frac{1}{N} (f_1 \log X_1 + f_2 \log X_2 + \dots + f_K \log X_K) \quad (ب) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^K f_i \log X_i = \frac{\sum f \log X}{N} \end{aligned}$$

حيث انظرنا أن جميع الأرقام موجبة ، عدا ذلك فإن اللوغاريتم غير معرف .

لاحظ أن لوغاريتم الوسط الهندسي لمجموعة من الأرقام الموجبة هو الوسط الحسابي للوغاريتمات هذه الأرقام .

(ج) يمكن استخدام النتيجة لإيجاد الوسط الهندسي لبيانات المجموعة بأخذ X_1, X_2, \dots, X_K كراكز الفئات و f_1, f_2, \dots, f_K كالتكرارات المقابلة لها .

٣٧-٣ في خلال أحد السنين كانت نسبة سعر لتر البن إلى سعر رغيف الخبز هو 3.00 ، بينما خلال العام التالي كانت النسبة 2.00 .

(أ) أوجد الوسط الحسابي لهذه النسب لفترة العامين .

(ب) أوجد الوسط الحسابي لنسب أسعار الخبز إلى أسعار البن لفترة العامين .

(ج) ناقش التوصية باستخدام الوسط الحسابي للحصول على متوسط النسب .

(د) ناقش ملامحة الوسط الهندسي للحصول على متوسط النسب .

الحل :

$$(أ) \text{ متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز } = 2.50 = \frac{1}{2}(3.00 + 2.00)$$

(ب) بما أن نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز في السنة الأولى هي 3.00 فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن هو

$$1/3.00 = 0.333 \text{ كذلك فإن نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن في السنة الثانية هي } 1/2.00 = 0.500$$

وبهذا فإن

$$\text{متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن } = 0.417 = \frac{1}{2}(0.333 + 0.500)$$

(ج) من الملائم أن نتوقع أن متوسط نسبة سعر اللبن إلى سعر الخبز هو مقلوب متوسط نسبة سعر الخبز إلى سعر اللبن

$$\text{وذلك إذا كان المتوسط متوسطاً ملائماً. ولكن } 2.50 \neq 1/0.417 = 2.40 .$$

وهنا يظهر أن الوسط الحسابي يعد متوسطاً غير جيد عند استخدام النسب .

$$(د) \text{ الوسط الهندسي لنسب سعر اللبن إلى سعر الخبز } = \sqrt{(3.00)(2.00)} = \sqrt{6.00}$$

$$\text{الوسط الهندسي لنسب سعر الخبز إلى سعر اللبن } = 1/\sqrt{6.00} = \sqrt{0.0167} = \sqrt{(0.333)(0.500)}$$

وبما أن هذه المتوسطات كل منها مقلوب الآخر ، فإننا نستنتج أن الوسط الهندسي أكثر ملائمة من الوسط الحسابي

للحصول على وسط النسب في مثل هذا النوع من المسائل .

٣ - ٣٨ عدد البكتريا في مزرعة معينة تزايدت من 1000 إلى 4000 خلال ثلاثة أيام . ما هو متوسط الزيادة النسبية في اليوم ؟

الحل :

بما أن الزيادة من 1000 إلى 4000 هي 300% ، فإن هذا قد يؤدي إلى استنتاج أن متوسط نسبة الزيادة اليومية يجب أن يكون $100\% = 300\%/3$ وهذا يتضمن أنه في خلال اليوم الأول فإن العدد ارتفع من 1000 إلى 2000 وفي خلال اليوم الثاني ارتفع من 2000 إلى 4000 . وفي خلال اليوم الثالث من 4000 إلى 8000 وهذا يناقض الحقيقة .

ولتحديد متوسط الزيادة النسبية ، ونرمز لها بالرمز r . فإن

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد يوم } = 1000(1 + r) + 1000 = 1000 + 1000r$$

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد يومين } = 1000(1 + r)^2 + 1000(1 + r)r = 1000(1 + r)^2$$

$$\text{مجموع عدد البكتريا بعد ثلاثة أيام } = 1000(1 + r)^3 + 1000(1 + r)^2r + 1000(1 + r)r^2 = 1000(1 + r)^3$$

والتعبير الأخير يجب أن يساوي 4000 بحيث

$$1000(1 + r)^3 = 4000, (1 + r)^3 = 4, 1 + r = \sqrt[3]{4} \text{ and } r = \sqrt[3]{4} - 1$$

$$\text{باستخدام اللوغاريتمات نجد أن } \sqrt[3]{4} = 1.587 \text{ بحيث أن } r = 0.587 = 58.7\%$$

وبشكل عام إذا بدأنا بكمية P وزدناها بمعدل ثابت r لكل وحدة زمن فإننا سوف نحصل بعد n وحدة زمن على الكمية :

$$A = P(1 + r)^n$$

وهذه تسمى بصيغة الفائدة المركبة . أنظر المسائل ٣ - ٩٤ و ٣ - ٩٥

الوسط التوافقي :

٣ - ٣٩ أوجد الوسط التوافقي H للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} &= \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X} = \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{7} \left(\frac{140 + 84 + 70 + 70 + 60 + 42 + 35}{420} \right) \\ &= \frac{501}{2940} \text{ and } H = \frac{2940}{501} = 5.87 \end{aligned}$$

وغالاً ما يكون من الأسهل التعبير عن الكسور في الصورة العشرية أولاً .

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} &= \frac{1}{7} (0.3333 + 0.2000 + 0.1667 + 0.1667 + 0.1429 + 0.1000 + 0.0833) \\ &= \frac{1}{7} (1.1929) \text{ and } H = 7/1.1929 = 5.87 \end{aligned}$$

بالمقارنة بالمسألة ٣ - ٣٥ تتضح حقيقة أن الوسط التوافقي لمجموعة من الأرقام الموجبة والتي لا تتساوى كلها في القيمة

أقل من الوسط الهندسي والذي بدوره أقل من الوسط الحسابي .

٣ - ٤٠ في خلال أربع سنوات متتالية اشترى صاحب منزل بترول لتدفئة المنزل بتكلفة 1.6, 1.8, 2.1, 2.5 للتر ، على الترتيب . فما هو متوسط تكلفة البترول في خلال مدة السنوات الأربع ؟

الحل :

الحالة ١ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل اشترى نفس الكمية في كل عام وليكن 1000 لتر .

إذن .

$$\begin{aligned} \text{التكلفة الكلية} \\ \text{الكمية الكلية المشتراة} &= \frac{\text{متوسط التكلفة}}{\text{الكمية الكلية المشتراة}} = \frac{£16 + £18 + £21 + £25}{4000 \text{ litres}} = 2.00 \text{ p/l} \end{aligned}$$

وهذا يساوى الوسط الحسابي لتكلفة اللتر ، بمعنى ، $\frac{1}{4}(16 + 18 + 18 + 21 + 25) = 2.0 \text{ p/l}$ ،

ولن تختلف النتيجة حتى ولو كان x من اللترات استخدم في كل سنة .

الحالة ٢ :

إذا افترضنا أن صاحب المنزل انفق نفس المبلغ كل سنة ، وليكن £ 200

إذن .

$$\text{المتوسط التوافقي لتكلفة التبر} = \frac{\text{التكلفة الكلية}}{\text{الكمية الكلية المشتراة}} = \frac{£800}{12500 + 11111 + 9524 + 8000 \text{ litres}} = 1.94p/h$$

$$\frac{4}{\frac{1}{12500} + \frac{1}{11111} + \frac{1}{9524} + \frac{1}{8000}} = 1.94p/h, \text{ بمعنى ، } £y \text{ قد انفق في كل سنة .}$$

وعملية الحصول على المتوسط في الحالتين سليمة ، وقد حسب كل متوسط تحت شروط من الشائع استخدامها . ويجب ملاحظة أنه في حالة ما إذا اختلف عد اللترات المستخدمة من سنة إلى أخرى بدلا من بقائها ثابتة ، يستبدل الوسط الحسابي العادي في الحالة ١ بالوسط الحسابي المرجح . كذلك فإنه إذا تغيرت القيمة الكلية المنفقة من سنة إلى أخرى ، يستبدل الوسط التوافقي العادي في الحالة ٢ بالوسط التوافقي المرجح .

٣ - ٤ إذا انتقل شخص من A إلى B بمتوسط سرعة 30 km/h وعاد من B إلى A مستخدماً نفس الطريق بمتوسط سرعة 60 km/h . أوجد متوسط السرعة للمرحلة كلها .

الحل :

افترض أن المسافة من A إلى B هي 60 km (على الرغم من أنه يمكن فرض أى مسافة أخرى) . وبهذا

$$\text{وقت الذهاب من A إلى B} = \frac{60 \text{ km}}{30 \text{ km/h}} = 2 \text{ h,}$$

$$\text{الوقت من B إلى A} = \frac{60 \text{ km}}{60 \text{ km/h}} = 1 \text{ h}$$

$$\text{المتوسط التوافقي للسرعة} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الوقت الكلي}} = \frac{120 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 40 \text{ km/h.}$$

والوسط السابق هو الوسط التوافقي للرقين 30, 60 . بمعنى $\frac{2}{1/30 + 1/60} = 40 \text{ km/h.}$ إذا كانت المسافات المقطوعة ليست كلها متساوية . فإنه يمكن استخدام الوسط التوافقي المرجح للسرعات حيث الاوزان هي المسافات .

(أنظر المسألة ٣ - ١٠٢) لاحظ أن استخدام الوسط الحسابي للرقين 30 و 60 km/h وهو 45 km/h خطأ .

الوسط التربيعي أو جذر متوسط المربعات :

٣ - ٤ أوجد الوسط التربيعي للأرقام 3, 5, 6, 6, 7, 10, 12 .

الحل :

$$\text{الوسط التربيعي} = \text{R.M.S.} = \sqrt{\frac{3^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2}{7}} = \sqrt{57} = 7.55$$

٣ - ٤ أثبت أن الوسط التربيعي لرقين موجبين غير متساويين a, b أكبر من وسطهما الهندسي .

الحل :

المطلوب إثبات أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{ab}$. إذا كان ذلك صحيحاً فإنه بتربيع الطرفين $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > ab$ بحيث أن $(a - b)^2 > 0$, or $a^2 - 2ab + b^2 > 0$, ولكن المتباينة الأخيرة سليمة بما أن مربع أى مقدار حقيقى لا يساوى الصفر يجب أن يكون موجباً . يتضمن الإثبات إثباتات عكس الخطوات السابقة . نبدأ بـ $(a - b)^2 > 0$ وهذه من المعروف أنها صحيحة ومنها $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) > ab$ وفى النهاية $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} > \sqrt{ab}$. وهو المطلوب .

لاحظ أن $\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} = \sqrt{ab}$ فى حالة وحيدة إذا كانت $a = b$

الربيعات والعشيرات والمئينات :

٣ - ٤ أوجد (أ) الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 و (ب) العشيرات D_1, D_2, \dots, D_9 لأجور الـ 65 عاملاً فى شركة Pand R (أنظر المسألة ٣ - ٢ والفصل الثانى) .

الحل :

(أ) الربيع الأول Q_1 هو هذا الأجر الذى يمكن الحصول عليه بعملية حصر $N/4 = 65/4 = 16.25$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (أو الدنيا) بما أن الفئة الأولى تحتوى على 8 حالات فإنه يجب أن نأخذ $8.25 = (8 - 16.25)$ من الـ 10 حالات بالفئة الثانية . باستخدام طريقة الاستكمال الخطئى ، نجد :

$$Q_1 = £59.995 + \frac{8.25}{10} (£10.00) = £68.25$$

الربيع الثانى Q_2 نحصل عليه بحصر الـ $2N/4 = N/2 = 65/2 = 32.5$ الأولى من الحالات . بما أن الفئتين الأولى والثانية تحتوى على 18 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $14.5 = 32.5 - 18$ من الـ 16 حالة بالفئة الثالثة إذن :

$$Q_2 = £69.995 + \frac{14.5}{16} (£10.00) = £79.06$$

لاحظ أن Q_2 هو الوسيط

الرابع الثالث Q_3 نحصل عليه بحصر $3N/4 = \frac{3}{4}(65) = 48.75$ الأولى من الحالات . بما أن الفئات الأولى تحتوى على 48 حالة ، فإننا يجب أن نأخذ $48 - 48.75 = 0.75$ من 10 حالات بالفئة الخامسة إذن .

$$Q_3 = £89.995 + \frac{0.75}{10} (£10.00) = £90.75$$

ومن ثم فإن 25% من العاملين يحصلون على دخل £68.25 أو أقل ، 50% يحصلون على دخل £79.06 أو أقل و 75% يحصلون على دخل £90.75 أو أقل .

(ب) العشر الأولى والثاني . . . والتاسع نحصل عليه بحصر $N/10, 2N/10, \dots, 9N/10$ من الحالات بادئين بالفئة الأولى (الدنيا) . وهذا فإن

$$D_1 = £49.995 + \frac{6.5}{8} (£10.00) = £58.12$$

$$D_6 = £79.995 + \frac{5}{14} (£10.00) = £83.57$$

$$D_2 = £59.995 + \frac{5}{10} (£10.00) = £65.00$$

$$D_7 = £79.995 + \frac{11.5}{14} (£10.00) = £88.21$$

$$D_3 = £69.995 + \frac{1.5}{16} (£10.00) = £70.94$$

$$D_8 = £89.995 + \frac{4}{10} (£10.00) = £94.00$$

$$D_4 = £69.995 + \frac{8}{16} (£10.00) = £75.00$$

$$D_9 = £99.995 + \frac{0.5}{5} (£10.00) = £101.00$$

$$D_5 = £69.995 + \frac{14.5}{16} (£10.00) = £79.06$$

ومن ثم فإن 10% من العاملين دخلهم £58.12 أو أقل ، 20% دخلهم £65.00 أو أقل ، ، 90% دخلهم £101.00 أو أقل .

لاحظ أن العشر الخامس هو الوسيط والعشر الثاني والرابع والسادس والثامن والذين يقسمون التوزيع إلى خمسة أجزاء متساوية تسمى بالخميسات والتي تستخدم في بعض الأحيان من الناحية العملية .

٣ - ٥ حدد (أ) المئين 35 (ب) المئين 60 . للتوزيع بالمسألة السابقة .

الحل :

(أ) المئين 35 ويرمز له بالرمز P_{35} نحصل عليه بحصر $35N/100 = 35(65)/100 = 22.75$ الأولى من الحالات اعتباراً من الفئة الأولى (الدنيا) . إذن ، كما في المسألة ٣ - ٤ ،

$$P_{35} = £69.995 + \frac{4.75}{16} (£10.00) = £72.97.$$

وهذا يعنى أن 35% من العاملين يحصلون على دخل £72.97 أو أقل .

(ب) المئين 60 وهو $P_{60} = £79.995 + \frac{5}{14} (£10.00) = £83.57$. لاحظ أنه يساوى العشر السادس أو الخميس الثالث .

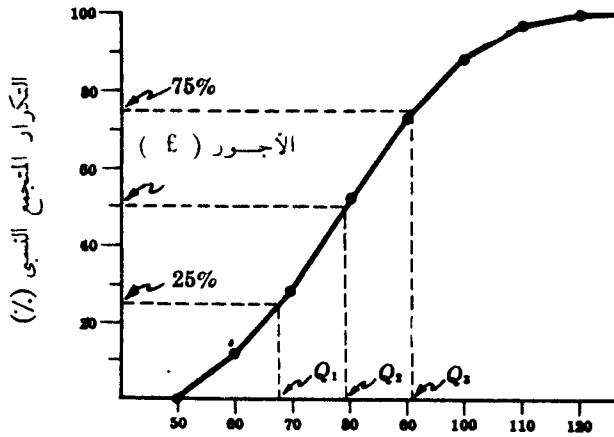
٣ - ٤٦ وضع كيف يمكن الحصول على نتائج المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ من المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

الحل :

المنحنى التكرارى المتجمع النسبى لبيانات المسائل ٣ - ٤٤ ، ٣ - ٤٥ معطى أدناه .

الربيع الأول هو الاحداثى السينى للنقطة على المنحنى التى أحداثها الصادى هو 25% . كذلك فإن الربيع الثانى والثالث هو الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 50% و 75% على الترتيب .

العشيرات والمئينات يمكن الحصول عليها بطريقة مماثلة . وعلى سبيل المثال فالعشير السابع والمئين الخامس والثلاثين هما الاحداثى السينى للنقط على المنحنى والتى أحداثها الصادى هو 70% و 35% على الترتيب .



شكل ٣ - ٥

مسائل اضافية

رمز التجميع :

٣ - ٤٧ اكتب الحدود لكل من رموز التجميع التالية .

$$\sum_{j=1}^5 U_j (U_j + 6) \quad (ج)$$

$$\sum_{j=1}^5 f_j X_j^2 \quad (ب)$$

$$\sum_{j=1}^4 (X_j + 2) \quad (أ)$$

$$\sum_{j=1}^4 4X_j Y_j \quad (هـ)$$

$$\sum_{k=1}^N (Y_k^2 - 4) \quad (د)$$

ج :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + 8 \quad (أ)$$

$$U_1(U_1 + 6) + U_2(U_2 + 6) + U_3(U_3 + 6) \quad (ج) \quad f_1X_1^2 + f_2X_2^2 + f_3X_3^2 + f_4X_4^2 + f_5X_5^2 \quad (ب)$$

$$4X_1Y_1 + 4X_2Y_2 + 4X_3Y_3 + 4X_4Y_4 \quad (أ) \quad Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_N^2 - 4N \quad (د)$$

٣-٤٨ عبر عمايل باستخدام رموز التجميع :

$$f_1(Y_1 - a)^2 + f_2(Y_2 - a)^2 + \dots + f_{15}(Y_{15} - a)^2 \quad (ب) \quad (X_1 + 3)^3 + (X_2 + 3)^3 + (X_3 + 3)^3 \quad (أ)$$

$$(2X_1 - 3Y_1) + (2X_2 - 3Y_2) + \dots + (2X_N - 3Y_N) \quad (ج)$$

$$\frac{f_1a_1^2 + f_2a_2^2 + \dots + f_{12}a_{12}^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_{12}} \quad (أ) \quad (X_1/Y_1 - 1)^2 + (X_2/Y_2 - 1)^2 + \dots + (X_N/Y_N - 1)^2 \quad (د)$$

ج :

$$\sum_{j=1}^N (2X_j - 3Y_j) \quad (ج) \quad \sum_{j=1}^{15} f_j(Y_j - a)^3 \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^3 (X_j + 3)^3 \quad (أ)$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{12} f_j a_j^3}{\sum_{j=1}^{12} f_j} \quad (أ) \quad \sum_{j=1}^3 \left(\frac{X_j}{Y_j} - 1 \right)^4 \quad (د)$$

$$\sum_{j=1}^N (X_j - 1)^3 = \sum_{j=1}^N X_j^3 - 2 \sum_{j=1}^N X_j + N \quad \text{أثبت أن } ٣-٤٩$$

٣-٥٠ أثبت أن $\Sigma(X+a)(Y+b) = \Sigma XY + a\Sigma Y + b\Sigma X + Nab$ حيث a, b ثوابت . ماهو رمز الدليل المتضمن هنا ؟

$$V_1 = -4, U_3 = 5, U_2 = -2, U_1 = 3 \quad \text{ياخذان القيم } V, U \quad ٣-٥١$$

$$\Sigma(U+3)(V-4) \quad (ب) \quad \Sigma UV \quad (أ) \quad V_2 = -1, V_3 = 6 \quad \text{علا الترتيب . احسب}$$

$$\Sigma(U_2 - 2V^2 - 2) \quad (و) \quad \Sigma UV^2 \quad (أ) \quad (\Sigma U)(\Sigma V)^2 \quad (د) \quad \Sigma V^2 \quad (ج)$$

$$\Sigma(U/V) \quad (ز)$$

ج :

$$-62 \quad (و) \quad 226 \quad (أ) \quad 6 \quad (د) \quad 53 \quad (ج) \quad -37 \quad (ب) \quad 20 \quad (أ)$$

$$25/12 \quad (ز)$$

$$\sum_{j=1}^4 X_j = 7, \quad \sum_{j=1}^4 = -5 \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^4 X_j Y_j = 5, \quad \text{إذا كان } ٣-٥٢$$

$$\sum_{j=1}^4 (X_j - 3)(2Y_j + 1) \quad (ب) \quad \sum_{j=1}^4 (2X_j + 5Y_j) \quad (أ)$$

ج :

$$23 \quad (ب) \quad -1 \quad (أ)$$

الوسط الحسابى :

٢ - ٥٣ حصل طالب على الدرجات 96, 82, 93, 76, 85 فى خمس مواد أوجد الوسط الحسابى للدرجات .

ج : 86

٢ - ٥٤ زمن رد الفعل لشخص ما لمثير خارجى قيس بواسطة محلل نفسى وكان 0.52, 0.49, 0.50, 0.46, 0.53 .
0.55 and 0.44 ثانية على الترتيب . أوجد متوسط زمن رد فعل الشخص للمثير الخارجى .

ج : 0.50 s

٣ - ٥٥ مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات وسبع سبعات وثمانى ثمانيات وتسع تسعات وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابى للأرقام ؟

ج : 8.25

٣ - ٥٦ درجات طالب فى المعمل ، المحاضرات والشفوى فى مقرر الطبيعة هى 89, 78, 71 على الترتيب .

(أ) إذا كانت الأوزان المقررة لهذه الأجزاء هى 5, 4, 2 على الترتيب ماهو الوسط الملائم للدرجات ؟

(ب) ما هو وسط الدرجات إذا استخدمنا أوزاناً متساوية ؟

ج : (أ) 82 (ب) 79

٣ - ٥٧ ثلاثة من مدرسى الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم 82, 74, 79 فى فصولهم المكونة من 17, 25, 32 طالباً على الترتيب . أوجد متوسط الدرجات فى جميع الفصول .

ج : 78

٣ - ٥٨ متوسط الأجر السنوى لجميع العاملين فى شركة هو £1500 . وكان متوسط الأجر السنوى الممنوح للذكور والإناث العاملين فى الشركة هو £1260 و £1560 على الترتيب . أوجد نسبة الذكور إلى الإناث العاملين بالشركة .

ج : 20%, 80%

٣ - ٥٩ الجدول ٣ - ٨ يبين توزيع الحمل الأعظم بالكيلو المنقول خلال كابلات من إنتاج شركة . أوجد متوسط الحمل الأعظم باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز

ج : 110.9 kN

الوسط الحسابي :

٣ - ٥٣ حصل طالب على الدرجات 96, 82, 93, 76, 85 في خمس مواد أوجد الوسط الحسابي للدرجات .

ج : 86

٣ - ٥٤ زمن رد الفعل لشخص ما لمثير خارجي قيس بواسطة محلل نفسي وكان 0.52, 0.49, 0.50, 0.46, 0.53 . ثانية على الترتيب . أوجد متوسط زمن رد فعل الشخص للمثير الخارجي .

ج : 0.50 s

٣ - ٥٥ مجموعة من الأرقام مكونة من ست ستات وسبع سبعمات وثمانى ثمانيات وتسع تسعات وعشر عشرات . ما هو الوسط الحسابي للأرقام ؟

ج : 8.25

٣ - ٥٦ درجات طالب في العمل ، المحاضرات والشفوى في مقرر الطبيعة هي 89, 78, 71 على الترتيب .

(أ) إذا كانت الأوزان المقررة لهذه الأجزاء هي 5, 4, 2 على الترتيب ماهو الوسط الملائم للدرجات ؟

(ب) ما هو وسط الدرجات إذا استخدمنا أوزاناً متساوية ؟

ج : (أ) 82 (ب) 79

٣ - ٥٧ ثلاثة من مدرسى الاقتصاد أعطوا متوسط درجات امتحاناتهم 82, 74, 79 في فصولهم المكونة من 17, 25, 32 طالباً على الترتيب . أوجد متوسط الدرجات في جميع الفصول .

ج : 78

٣ - ٥٨ متوسط الأجر السنوى لجميع العاملين في شركة هو £1500 . وكان متوسط الأجر السنوى الممنوح للذكور والإناث العاملين في الشركة هو £1260 و £1560 على الترتيب . أوجد نسبة الذكور إلى الإناث العاملين بالشركة .

ج : 20%, 80%

٣ - ٥٩ الجدول ٣ - ٨ يبين توزيع الحمل الأعظم بالكيلو المنقول خلال كابلات من إنتاج شركة . أوجد متوسط الحمل الأعظم باستخدام

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز

ج : 110.9 kN

جدول ٣ - ٨

٣ - ٩٠ أوجد \bar{X} للبيانات بالجدول ٣ - ٩ باستخدام

عدد الكابلات	الحمل الأعظم (kN)
2	93 - 97
5	98 - 102
12	103 - 107
17	108 - 112
14	113 - 117
6	118 - 122
3	123 - 127
1	128 - 132
60 المجموع	

(أ) الطريقة المطولة

(ب) طريقة الترميز .

ج : 501.0

جدول ٣ - ٩

X	462	480	498	516	534	552	570	588	606	624
f	98	75	56	42	30	21	15	11	6	2

٣ - ٩١ الجدول ١٠ - ١ أذنأ يظهر توزيع أقطار رؤوس مسامير برشام منتجة بواسطة شركة . احسب متوسط القطر .

ج : 7.2642 mm

جدول ٣ - ١١

جدول ٣ - ١٠

التكرارات	الفترات
2	7.247 - 7.249
6	7.250 - 7.252
8	7.253 - 7.255
15	7.256 - 7.258
42	7.259 - 7.261
68	7.262 - 7.264
49	7.265 - 7.267
25	7.268 - 7.270
18	7.271 - 7.273
12	7.274 - 7.276
4	7.277 - 7.279
1	7.280 - 7.282
250 المجموع	

التكرارات	القطر (mm)
3	10 - under 15
7	15 - under 20
16	20 - under 25
12	25 - under 30
9	30 - under 35
5	35 - under 40
2	40 - under 45
54 المجموع	

٣ - ٩٢ احسب متوسط من بيانات الجدول ٣ - ١١ أعلاه

ج : 26.2

٣ - ٩٣ احسب متوسط العمر الانتاجي للأنايب المنتجة بواسطة شركة L and M للأنايب بالمسألة ٢ - ٢٠ الفصل الثاني .

ج . 715 ساعة

- ٢ - ٦٤ (أ) استخدام التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى المسألة ٢ - ٢٧ ، الفصل الثانى ، لحساب متوسط قطر رولمان البلى (ب) احسب المتوسط مياهرة من البيانات الأصلية وقارن بـ (أ) ، فسر أى اختلاف يمكن حدوثه .

ج : 7.349 mm

الوسيط :

٢ - ٦٥ : أوجد للوسط والوسيط لمجموعة الأرقام :

(أ) 5, 4, 8, 3, 7, 2, 9 (ب) 18.3, 20.6, 19.3, 22.4, 20.2, 18.8, 19.7, 20.0

ج : (أ) الوسط = 5.4 ، الوسيط = 5.5

(ب) الوسط = 19.19 ، الوسيط = 19.85

٢ - ٦٦ : أوجد وسيط الدرجات للمسألة ٢ - ٥٣

ج : 85 .

٢ - ٦٧ : أوجد وسيط زمن رد الفعل بالمسألة ٢ - ٥٤

ج : 0.51 ثانية

٢ - ٦٨ : أوجد وسيط الأرقام فى المسألة ٢ - ٥٥ .

ج : 8

٢ - ٦٩ : أوجد وسيط الحمل الأعظم للكابلات فى المسألة ٢ - ٥٩

ج : 110.7 kN

٢ - ٧٠ : أوجد الوسيط \bar{X} للتوزيع فى المسألة ٢ - ٦٠

ج : 490.6

٢ - ٧١ : أوجد وسيط أنظار مسامير البرشام فى المسألة ٢ - ٦١

ج : 7.2638 mm

٢ - ٧٢ : أوجد وسيط التوزيع فى المسألة ٢ - ٦٢

ج : 25.4

٢ - ٧٣ : أوجد وسيط التوزيع أعمار أرباب المائتات فى الولايات المتحدة خلال سنة 1957

(أ) أوجد وسيط التمر

(ب) لماذا يعد الوسيط أكثر ملاءمة من الوسط كقياس للنزعة المركزية فى هذه الحالة ؟

جدول ٣ - ١٢

ج : 45.1

العدد (بالمليون)	سن رب العائلة (بالسنين)
2-22	Under 25
4-05	25-29
5-08	30-34
10-45	35-44
9-47	45-54
6-63	55-64
4-16	65-74
1-66	75 and over
المجموع 43.72	

٣ - ٧٤ أوجد وسيط الدخل للبيانات بالمسألة ٣ - ٣١ ، الفصل الثاني

ج : \$3608

٣ - ٧٥ أوجد وسيط العمر الانتاجي للأنابيب في المسألة ٣ - ٢٠ ،

الفصل الثاني

ج : 708.3 ساعة

المصدر : مكتب التعدادات

المنوال :

٣ - ٧٦ أوجد الوسط والوسيط والمنوال لمجموعة الأرقام :

(أ) 7, 4, 10, 9, 15, 12, 7, 9, 7

(ب) 8, 11, 4, 3, 2, 5, 10, 6, 4, 1, 10, 8, 12, 6, 5, 7

ج : (أ) الوسط = 8.9 ، الوسيط = 9 ، والمنوال = 7

(ب) الوسط = 6.4 ، الوسيط = 6 . وبما أن كلا من الأرقام 4, 5, 6, 8, 10

يتكرر مرتين فمن الممكن اعتبار أن هناك خمسة مناويل . وقد يكون من الأصوب الانتهاء في مثل هذه الحالة إلى القول بعدم وجود منوال .

٣ - ٧٧ أوجد منوال الدرجات في المسألة ٣ - ٥٣

ج : لا يوجد .

٣ - ٧٨ أوجد منوال وقت رد الفعل في المسألة ٣ - ٥٤

ج : 0.53

٣ - ٧٩ أوجد منوال مجموعة الأرقام في المسألة ٣ - ٥٥

ج : 10

٣ - ٨٠ أوجد منوال الحمل الأعظم للكابلات في المسألة ٣ - ٥٩

ج : 110.6 kN

٨١ - ٣ أوجد المنوال \hat{X} لتوزيع في المسألة ٣ - ٦٠

ج : 462

٨٢ - ٣ أوجد منوال أقطار مسامير البرشام في المسألة ٣ - ٦١

ج : 7.2632 mm

٨٣ - ٣ أوجد منوال التوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢

ج : 23.5

٨٤ - ٣ أوجد منوال العمر الانتاجي للذنايب في المسألة ٢ - ٢٠ ، الفصل الثاني

ج : 668.7 ساعة .

٨٥ - ٣ هل من الممكن تحديد المنوال للتوزيعات في :

(١) المسألة ٣ - ٧٣ في هذا الفصل .

(ب) المسألة ٢ - ٣١ في الفصل الثاني ؟ أذكر الأسباب في إجابتك .

٨٦ - ٣ استخدم العلاقة الاعتبارية ، الوسط - المنوال = ٣ (الوسط - الوسيط) لحساب المنوال لتوزيعات (١) المسألة ٣ - ٩٥

(ب) المسألة ٣ - ٦٠ . (ج) المسألة ٣ - ٦١ (د) المسألة ٣ - ٦٢ (هـ) المسألة ٢ - ٢٠ في الفصل الثاني .

قارن النتائج بتلك التي نحصل عليها من الصيغة (٩) ، صفحة ٧٦ ، فسر أى اتفاق أو عدم اتفاق .

٨٧ - ٣ أثبت التعمير الذي أعطى في نهاية المسألة ٣ - ٣٢ .

الوسطى الهندسي :

٨٨ - ٣ أوجد الوسط الهندسي للأرقام (١) 4.2, 16.8 (ب) 6.00 ، 3.00

ج : (١) 8.4 (ب) 4.23

٨٩ - ٣ أوجد (١) الوسط الهندسي G (ب) الوسط الحسابي \bar{X} للأرقام 2, 4, 8, 16, 32

ج : (١) $G = 8$ (ب) $\bar{X} = 12.4$

٩٠ - ٣ أوجد الوسط الهندسي للأرقام (١) 3, 5, 8, 3, 7, 2 (ب) 28.5, 73.6, 47.2, 31.5, 64.8

ج : (١) 4.14 (ب) 45.8

٩١ - ٣ أوجد الوسط الهندسي للتوزيعات في (١) المسألة ٥٩ و (ب) المسألة ٦٠ . أثبت أن الوسط الهندسي أقل

الوسط الحسابي في هذه الحالات .

ج : (١) 110.7 kN (ب) 499.5

٩٢-٣ إذا كانت أسعار سلعة تتضاعف في فترة 4 سنوات ، ما هو متوسط نسبة الزيادة في السنة .

ج : 18.9 %

٩٣-٣ في سنة 1950 ، 1960 كان عدد سكان الولايات المتحدة (متضمنة الاسكا وهاواي) 151.3 ، 179.3 مليون على الترتيب .

(١) ما هو متوسط نسبة الزيادة في السنة ؟

(ب) قدر عدد السكان في 1954

(ج) إذا كان متوسط نسبة الزيادة من سنة 1960 إلى 1970 كما في (١) ماذا يكون عليه عدد السكان 1970 ؟

ج : (١) 1.71% (ب) 161.9 مليون (ج) 212.5 مليون .

٩٤-٣ رأسمال قدره £1000 استثمر بمعدل فائدة 4% سنوياً . ما هو المبلغ الإجمالي بعد 6 سنوات إذا لم يسحب رأس المال الأصلي ؟

ج : £1265.30

٩٥-٣ في المسألة السابقة إذا كانت الفائدة تضاف إلى رأس المال كل ربع سنة (بمعنى أن هناك 1% زيادة في المبلغ كل ثلاثة شهور) ، ما هو المبلغ الإجمالي بعد 6 سنوات

ج : £1269.70

٩٦-٣ أوجد رقمين وسطهما الحسابي 9.0 ووسطهما الهندسي 7.2

ج : 3.6 ، 14.4

الوسط التوافقي :

٩٧-٣ أوجد الوسط التوافقي للأرقام (١) 2 ، 3 ، 6 (ب) 3.2 ، 5.2 ، 4.8 ، 6.1 ، 4.2

ج : (١) 3.0 (ب) 4.48

٩٨-٣ أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الوسط الهندسي . (ج) الوسط التوافقي للأرقام 0 ، 2 ، 4 ، 6

ج : (١) 3 ، (ب) 0 ، (ج) 0

١٠٩-٣ إذا كانت X_1, X_2, X_3, \dots تمثل مراكز الفئات في توزيع تكرارى ويقابلها التكرارات f_1, f_2, f_3, \dots على الترتيب ، أثبت أن الوسط التوافقي H للتوزيع يعطى من العلاقة .

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N} \left(\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \frac{f_3}{X_3} + \dots \right) = \frac{1}{N} \sum \frac{f}{X}$$

$$N = f_1 + f_2 + \dots = \sum f \quad \text{حيث}$$

١٠٠-٣ باستخدام المسألة السابقة أوجد الوسط التوافقي للتوزيعات في (١) المسألة ٣-٥٩ (ب) المسألة ٣-٦٠ . قارن بالمسألة ٩١-٣

$$\text{ج : (١) } 110.4 \quad \text{(ب) } 498.2$$

١٠١-٣ المدن A, B, C متساوية في بعدها عن بعضها . سافر راكب دراجة من A إلى B بسرعة 30 km/h ومن B إلى C بسرعة 40 km/h ومن C إلى A بسرعة 50 km/h . حدد متوسط سرعته في الرحلة كلها .

$$\text{ج : } 38.3 \text{ km/h}$$

١٠٢-٣ (١) طائرة تسافر المسافات $d_1, d_2, d_3 \text{ km}$ بسرعات $v_1, v_2, v_3 \text{ km/h}$ على الترتيب . أثبت أن متوسط السرعة يعطى بـ V حيث $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{V} = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \frac{d_3}{v_3}$ وهذا هو الوسط التوافقي المرجح .

$$\text{(ب) أوجد } V \text{ إذا كانت } d_1 = 2500, d_2 = 1200, d_3 = 500, v_1 = 500, v_2 = 400, v_3 = 250$$

$$\text{ج : (ب) } 420 \text{ km/h}$$

١٠٣-٣ أثبت أن الوسط الهندسى للرقين الموجبين a, b هو :

(١) أقل من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقي لهذه الأرقام

هل يمكن تعميم الإثبات ليشمل أكثر من رقين ؟

الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات :

١٠٤-٣ أوجد الوسط التربيعى أو وسط جذر المربعات للأرقام .

$$\text{(١) } 11, 23, 35 \quad \text{(ب) } 2.7, 3.8, 3.2, 4.3$$

$$\text{ج : (١) } 25 \quad \text{(ب) } 3.55$$

١٠٥-٣ أثبت أن جذر متوسط المربعات لرقين موجبين a, b هو

(١) أكبر من أو يساوى الوسط الحسابى .

(ب) أكبر من أو يساوى الوسط التوافقي .

هل يمكن تعميم الإثبات لأكثر من رقين ؟

١٠٩-٣ أمنتج صيغة يمكن إستخدامها للحصول على الوسط التربيى للبيانات المجمة . طبق هذه الصيغة على أحد التوزيعات التكرارية التى سبق دراستها .

الربيعات والعشيرات والمئينات :

١٠٧-٣ جدول ٣-١٣ يوضح التوزيع التكرارى للدرجات التى حصل عليها الطلبة فى امتحان الكلية النهائى فى الجبر .

الدرجة	عدد الطلبة
90-100	9
80-89	32
70-79	43
60-69	21
50-59	11
40-49	3
30-39	1
المجموع	120

جدول ٣-١٣

(أ) أوجد ربيعات التوزيع .

(ب) فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) الربيع الأدنى $Q_1 = 67$

الربيع الأوسط $Q_2 = 75$ = الوسيط

الربيع الأعلى $Q_3 = 83$

(ب) 25% سجلوا 67 أو أقل (أو 75% سجلوا 67 أو أكبر)

50% سجلوا 75 أو أقل (أو 50% سجلوا 75 أو أكبر)

75% سجلوا 83 أو أقل (أو 25% سجلوا 83 أو أكبر) .

١٠٨-٣ أوجد الربيعات Q_1, Q_2, Q_3 للتوزيعات فى (أ) المسألة ٣-٥٩

(ب) مسألة ٣-٦٠ (ج) المسألة ٣-٣١ فى الفصل الثانى .

فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) $Q_1 = 105.5, Q_2 = 110.7, Q_3 = 115.7$ kN

(ب) $Q_1 = 469.3, Q_2 = 490.6, Q_3 = 523.3$

(ج) $Q_1 = \$1667, Q_2 = \$3608, Q_3 = \$5268$

١٠٩-٣ أوجد (أ) المشير الثانى (ب) المشير الرابع (ج) المئين التسمين (د) المئين الثامن والستون ، لبيانات

المسألة ٣-٣٧ ، فسر بوضوح دلالة كل منها .

ج : (أ) 32.4 (ب) 40.9 (ج) 68.5 (د) 53.4

١١٠-٣ أوجد (أ) P_{10} (ب) P_{90} (ج) P_{25} (د) P_{75} لبيانات المسألة ٣-٥٩ ، فسر

بوضوح دلالة كل منها .

(أ) 10.15 (ب) 11.78 (ج) 10.55 (د) 11.57 kN

١١١-٣ (١) هل يمكن التعبير عن الريبعات والمشيريات بدلالة المئينات ؟

(ب) هل يمكن التعبير عن جميع قيم التقسيمات الجزئية بدلالة المئينات ؟

وضح .

١١٢-٣ لبيانات المسألة ٣-١٠٧ أوجد (١) أصغر درجة سجلت بواسطة الـ 25% الأول في الفصل (ب) أعلى درجة سجلت بواسطة الـ 20% الأقل درجات في الفصل . فسر إجابتك باستخدام المئينات .

ج : (١) 83 (ب) 64

١١٣-٣ عبر عن نتائج المسألة ٣-١٠٧ بالرسم البياني باستخدام .

(١) المدرج التكرارى النسبى .

(ب) المضلع التكرارى النسبى .

(ج) المنحنى التكرارى المتجمع النسبى .

١١٤-٣ أجب على السؤال ٣-١١٣ باستخدام نتائج المسألة ٣-١٠٨ .

١١٥-٣ (١) أوجد صيغة مشابهة لتلك المعرفة بالمعادلة (٨) صفحة ٧٥ ، لحساب المئينات لأى توزيع تكرارى .

(ب) وضح استخدام الصيغة بتطبيقها للحصول على نتائج المسألة ٣-١١٠ .

الفصل الرابع

الانحراف المعياري والمقاييس الأخرى للتشتت

التشتت أو التغير :

الدرجة التي تتجه بها البيانات الرقمية للانتشار حول قيمة وسطى تسمى تشتت أو تغير البيانات . وهناك عديد من مقاييس التشتت أو التغير يمكن استخدامها وإن كان الأكثر شيوعاً هو المدى ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعي ، مدى المئينات والانحراف المعياري .

المدى :

مدى مجموعة من الأرقام هو الفرق بين أكبر رقم وأقل رقم في المجموعة .

مثال : مدى المجموعة 2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12 هو $10 = 12 - 2$. في بعض الأحيان يعطى المدى بذكر أقل وأكبر رقم . في المثال السابق على سبيل المثال يمكن تحديد المدى من 2 إلى 12 أو $12 - 2$.

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات :

الانحراف المتوسط أو متوسط الانحرافات لمجموعة N من الأرقام X_1, X_2, \dots, X_N يعرف بما يلي

$$(1) \quad \text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^N |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|}$$

حيث \bar{X} هو الوسط الحسابي للأرقام و $|X_j - \bar{X}|$ هو القيمة المطلقة لانحراف القيمة X_j عن \bar{X} (القيمة المطلقة لرقم هو الرقم بدون الإشارة المرافقة له ويعبر عن ذلك بخطين رأسيين يوضعان حول الرقم) وعلى هذا فإن $|-4| = 4, |3| = 3, |6| = 6, |-0.84| = 0.84$.

مثال : أوجد متوسط الانحرافات لمجموعة الأرقام 2, 3, 6, 8, 11

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{X} = \frac{2+3+6+8+11}{5} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} &= \frac{|2-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |11-6|}{5} \\ &= \frac{|-4| + |-3| + |0| + |2| + |5|}{5} = \frac{4+3+0+2+5}{5} = 2.8 \end{aligned}$$

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب ، فإن الانحراف المتوسط يمكن كتابته على صورة

$$(٢) \quad \text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j |X_j - \bar{X}|}{N} = \frac{\sum f |X - \bar{X}|}{N} = \overline{|X - \bar{X}|}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$. وهذه الصيغة مفيدة للبيانات المجمعة حيث X_j 's تمثل مراكز الفئات و f_j 's يمثل التكرارات المقابلة لها .

في بعض الأحيان يعرف الانحراف المتوسط بدلالة القيمة المطلقة للانحرافات عن الوسيط أو غيره من المتوسطات بدلا من الوسط . خاصية هامة للمجموع $\sum_{j=1}^N |X_j - a|$ أنه يكون أقل ما يمكن عندما تكون a هي الوسيط ، بمعنى أن متوسط انحرافات القيم عن الوسيط يكون أقل ما يمكن .

لاحظ أنه قد يكون من الأنسب استخدام التعبير ، متوسط القيم المطلقة للانحرافات عن التعبير الانحراف المتوسط .

نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي : لمجموعة من البيانات يعرف كالتالي :

$$(٣) \quad \text{نصف المدى الربيعي} = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

حيث Q_1 هو الربع الأول و Q_3 هو الربع الثالث للبيانات . أنظر المسائل ٤ - ٦ ، ٤ - ٧ . ويستخدم المدى الربيعي $Q_3 - Q_1$ في بعض الأحيان بدلا من نصف المدى الربيعي كمقياس شائع للتشتت .

مدى المئينات 10 — 90 لمجموعة من البيانات يعرف كالتالي :

$$(٤) \quad \text{مدى المئينات } 10 - 90 = P_{90} - P_{10}$$

حيث P_{90} و P_{10} المئين العاشر والمئين التسعين للبيانات (أنظر المسألة ٤ - ٨) . نصف المدى المئيني 10-90 ، $\frac{1}{2}(P_{90} - P_{10})$ يمكن أيضاً استخدامه ولكنه ليس شائع الاستخدام .

الانحراف المعياري : لمجموعة من N رقم X_1, X_2, \dots, X_N ويعبر عنها بالرمز s تعرف بما يلي

$$(٥) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{(X - \bar{X})^2}$$

حيث x تمثل انحرافات كل رقم X_j عن المتوسط \bar{X} .

وهل هذا فإن s هي جذر متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها ، ويسمى أحياناً جذر متوسط مربع الانحراف (أنظر صفحة ٧٧)

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_K تحدث بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب فإن الانحراف المعياري يمكن كتابته على صورة :

$$(٦) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f x^2}{N}} = \sqrt{(\bar{X} - \bar{X})^2}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \sum f$ وهذه الصيغة مفيدة في حالة البيانات المجمعة .

في بعض الأحيان يعرف الانحراف المعياري لبيانات من عينة بالقسمة على $(N - 1)$ بدلا من N في الصيغ (٥) ، (٦) لأن هذا يؤدي للحصول على تقدير أحسن للانحراف المعياري للمجتمع الذي سحبت منه العينة . ولقيم N الكبيرة (بالتأكيد $N > 30$) فإنه من الناحية العملية لا يوجد فرق حقيقي بين التعريفين . وكذلك في حالة ما إذا كنا في حاجة إلى التقدير الأحسن فإنه يمكن الحصول عليه بضرب الانحراف المعياري المحسوب بالتعريف الأول في $\sqrt{N/(N-1)}$. وبهذا فإننا سنثبت على استخدام التعريف المعطى أعلاه .

التباين :

تباين مجموعة من البيانات يعرف بأنه مربع الانحراف المعياري . وبهذا يعرف به s^2 في (٥) ، (٦) . وعندما يكون ضرورياً التمييز بين الانحراف المعياري للمجتمع والانحراف المعياري لعينة مسحوبة من هذا المجتمع ، فإننا نستخدم دائماً الرمز s للأخير والرمز σ للأول . وبهذا فإن s^2 ، σ^2 يمثلان تباين العينة وتباين المجتمع على الترتيب .

طريقة مختصرة لحساب الانحراف المعياري :

المعادلات (٥) ، (٦) يمكن كتابتها على الترتيب في الصيغ المكافئة .

$$(٧) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}$$

$$(٨) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{N} - \left(\frac{\sum f X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}$$

حيث \bar{X}^2 تمثل متوسط مربعات قيم X المختلفة ، بينما \bar{X}^2 يمثل مربع متوسط قيم X المختلفة . أنظر المسائل ٤ - ١٢ إلى ٤ - ١٤ .

إذا كانت $d_j = X_j - A$ هي انحرافات X_j عن ثابت اختياري A ، فالتناج (٧) ، (٨) تصبح على الترتيب .

$$(٩) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^N d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N} - \left(\frac{\sum d}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{d}^2 - \bar{d}^2}$$

$$(١٠) \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j d_j}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum f d^2}{N} - \left(\frac{\sum f d}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{d}^2 - \bar{d}^2}$$

أنظر المسائل ٤ - ١٥ ، ٤ - ١٧ .

وعندما تجمع البيانات في توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c ، فإن $d_j = cu_j$ or $X_j = A + cu_j$ و (١٠)

تصبح

$$(١١) \quad s = c \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j^2}{N} - \left(\frac{\sum_{j=1}^K f_j u_j}{N} \right)^2} = c \sqrt{\frac{\sum f u^2}{N} - \left(\frac{\sum f u}{N} \right)^2} = c \sqrt{u^2 - \bar{u}^2}$$

والصيغة الأخيرة تعطى طريقة مختصرة جداً لحساب الانحراف المعياري ويجب استخدامها للبيانات المجمعة إذا كانت أطوال الفئات متساوية . وهذه تسمى بطريقة الترميز وهي مماثلة بالضبط للطريقة المستخدمة في حساب الوسط الحسابي من البيانات المجمعة في الفصل الثالث . أنظر المسائل ٤ - ١٦ إلى ٤ - ١٩ .

خصائص الانحراف المعياري :

$$١ - \text{ الانحراف المعياري يمكن تعريفه كالآتي } s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (X_j - a)^2}{N}}$$

حيث a أى وسط بالإضافة إلى الوسط الحسابي . ومن كل هذه الانحرافات المعيارية ، نجد أن أصغرها يمكن الحصول عليه عندما نأخذ $a = \bar{X}$ هذا نظراً للخاصية (ب) ، الفصل الثالث صفحة ٧٤ . هذه الخاصية تمدنا بالسبب المهم لتعريف الانحراف المعياري كما سبق . لإثبات هذه الخاصية أنظر المسألة ٤ - ٢٧ .

٢ - في التوزيع الطبيعي (أنظر الفصل السابع) نجد أن :

$$(أ) \quad 68.27\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - s , \bar{X} + s$$

(بمعنى ، انحراف معياري واحد على كل جانب من الوسط)

$$(ب) \quad 95.45\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - 2s , \bar{X} + 2s$$

(بمعنى انحرافين معياريين على كل جانب من الوسط) .

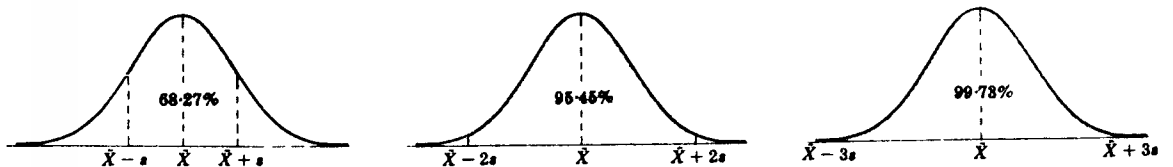
$$(ج) \quad 99.73\% \text{ من الحالات تقع بين } \bar{X} - 3s , \bar{X} + 3s$$

(بمعنى ثلاثة انحرافات معيارية على كل جانب من الوسط) .

كما هو موضح بالشكل ٤ - ١

وللتوزيعات متوسطة الالتواء فالنسب السابقة تتحقق بشكل تقريبي .

(أنظر المسألة ٢ - ٢٤) .



شكل ٤ - ١

٣ - إذا افترضنا أن مجموعتين مكونتان من N_1 ، N_2 رقم (أو توزيعان تكراريان ومجموع تكراراهما هي N_1 ، N_2) وتباينهما معطى بـ s_1^2 ، s_2^2 على الترتيب ولها نفس الوسط \bar{X} . فان التباين المشترك أو المجمع للمجموعتين (أو لتوزيعين التكرارين) هو

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} \quad (١٢)$$

لاحظ أن هذا هو الوسط الحسابي المرجح للتباينات . وهذه النتيجة يمكن تعميمها لحالة ثلاثة أو أكثر من التباينات .

طريقة شارلر للمراجعة :

طريقة شارلر لمراجعة حساب الوسط والانحراف المعياري باستخدام طريقة الترميز تستخدم المتطابقات :

$$\begin{aligned} \sum f(u+1) &= \sum fu + \sum f = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 &= \sum f(u^2 + 2u + 1) = \sum fu^2 + 2\sum fu + \sum f = \sum fu^2 + 2\sum fu + N \end{aligned}$$

أنظر المسألة ٤ - ٢٠ .

معامل شبرد لتصحيح التباين :

عند حساب الانحراف المعياري فإنه يكون معرضاً لبعض الخطأ الناتج عن تجميع البيانات في فئات (أخطاء التجميع) . ولتعديل هذا الخطأ فإننا نستخدم النتيجة .

$$\text{التباين المعدل} = \text{التباين من البيانات المجمعة} - c^2/12 \quad (١٣)$$

حيث c هو طول الفئة ومعامل التصحيح $c^2/12$ المطروح يسمى تصحيح شبرد ويستخدم في توزيعات المتغيرات المتصلة حيث « الأطراف » تقول تدريجياً إلى الصفر في كلا الاتجاهين .

ويختلف الإحصائيون في متى وما إذا كان تصحيح شبرد يجب تطبيقه .

وبالتأكيد فإنه يجب عدم استخدامه إلا بعد فحص دقيق للوضع . وهذا إلى أنه كثيراً ما يؤدي إلى مبالغة في التصحيح وهذا يؤدي إلى استبدال الخطأ القديم بخطأ جديد .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

للتوزيعات متوسطة الالتواء فإننا نحصل على هذه العلاقة الاعتبارية

$$\frac{4}{9} = \frac{\text{الانحراف المتوسط}}{(\text{الانحراف المعياري})^2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{(\text{الانحراف المعياري})}$$

وهذا ناتج من الحقيقة أنه بالنسبة للتوزيع الطبيعي فإن الانحراف المتوسط ونصف المدى الربيعي يساويان على الترتيب 0.6745 ، 0.7979 مضروباً في الانحراف المعياري .

التشتت المطلق والنسبي . معامل الاختلاف :

التغير الفعلي أو التشتت كما نحصل عليه من الانحراف المعياري أو غيره من مقاييس التشتت يسمى بالتشتت المطلق . ولكن تغير أو تشتت 1 متر عند قياس مسافة 1000 متر يختلف في تأثيره عن نفس تغير 1 متر في مسافة 20 متر . ومقياس لهذا التأثير نحصل عليه بالتشتت النسبي ويعرف بما يلي .

$$\frac{\text{التشتت المطلق}}{\text{المتوسط}} = \text{التشتت النسبي} \quad (١٤)$$

إذا كان التشتت المطلق هو الانحراف المعياري s والمتوسط هو الوسط \bar{X} فإن التشتت النسبي يسمى بمعامل الاختلاف أو معامل التشتت ويعرف كالتالي :

$$(١٥) \quad V = \frac{s}{\bar{X}} = \text{معامل الاختلاف}$$

وبشكل عام يعبر عنه كنسبة . وهناك طرق ممكنة أخرى (أنظر المسألة ٤ - ٣) لاحظ أن معامل الاختلاف مستقل عن الوحدات المستخدمة . ولهذا السبب فإنه يفيد عند مقارنة توزيعات ذات وحدات مختلفة . يصبح عديم الفائدة عندما تكون \bar{X} قريبة من الصفر .

المتغير المعياري والدرجات المعيارية :

$$(١٦) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} \quad \text{المتغير}$$

والذي يقيس الانحرافات عن الوسط بوحدات من الانحراف المعياري يسمى بالمتغير المعياري وهو كمية لا حجم لها (بمعنى أنها مستقلة عن الوحدات المستخدمة) .

إذا كانت الانحرافات عن الوسط مطاة بوحدات من الانحراف المعياري ، فإنه يقال أنه معبر عنها بوحدات معيارية أو درجات معيارية . وهذه لها قيمة كبيرة عند المقارنة بين التوزيعات (أنظر المسألة ٤ - ٣١) .

مسائل محلولة

المدى :

٤ - ١ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5 (ب) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18

الحل :

في كلتا الحالتين ، المدى = الرقم الأكبر - الرقم الأصغر = 15 - 3 = 18 .

ولكن ، كما هو واضح من منظومة (أ) ، (ب)

(أ) 3, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 18 (ب) 3, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 18

أن هناك تغيراً أو تشتتاً أكبر في (أ) عنه في (ب) . وفي الحقيقة (ب) تحتوي أساساً على 9's ، 8's

وبما أن المدى يظهر عدم وجود فروق بين المجموعتين فإنه لا يعد مقياساً جيداً في هذه الحالة . وبشكل عام فإنه في حالة وجود قيم متطرفة فإن المدى يعد مقياساً غير جيد للتشتت . ويمكن الوصول إلى تحسين له بإهمال الحالات المتطرفة 3، 18 ومن (أ) فإن المدى سيكون (10 = 15 - 5) بينما في (ب) فإن المدى سيكون (1 = 8 - 9) وهذا يظهر بوضوح أن (أ) أكثر تشتتاً من (ب) ولكن ليست هذه هي الطريقة التي يعرف بها المدى . ويمعم نصف المدى الربيعي والمدى المثني 90 - 10 لتحسين المدى بحذف الحالات المتطرفة .

٤ - ٢ أوجد مدى أوزان الطلبة في جامعة XYZ كما هو موضح بالجدول ٢ - ١ صفحة ٤٥ :

الحل :

هناك طريقتان لتعريف المدى في البيانات المجمعة .

الطريقة ١ :

المدى = مركز الفئة لأعلى فئة - مركز الفئة لأدنى فئة

$$73 - 61 = 12 \text{ kg}$$

الطريقة ٢ :

المدى = الحد الأعلى الحقيقي لأعلى فئة - الحد الأدنى الحقيقي لأدنى فئة .

$$74.5 - 59.5 = 15 \text{ kg}$$

الانحراف المتوسط :

٤ - ٣ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعة الأرقام في المسألة ٤ - ١ .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5 \quad (أ)$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|12 - 9.5| + |6 - 9.5| + |7 - 9.5| + |3 - 9.5| + |15 - 9.5| + |10 - 9.5| + |18 - 9.5| + |5 - 9.5|}{8}$$

$$= \frac{2.5 + 3.5 + 2.5 + 6.5 + 5.5 + 0.5 + 8.5 + 4.5}{8} = \frac{34}{8} = 4.25$$

$$\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9 \quad (ب)$$

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N}$$

$$= \frac{|9 - 9| + |3 - 9| + |8 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |8 - 9| + |9 - 9| + |18 - 9|}{8}$$

$$= \frac{0 + 6 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 9}{8} = 2.25$$

ويظهر الانحراف المتوسط أن المجموعة (ب) أقل تشتتاً من المجموعة (أ) ، كما هو بالفعل .

٤ - ٤ أوجد الانحراف المتوسط لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ (أنظر الجدول ٣ - ٢ صفحة ٨٨) .

الحل :

من المسألة ٣ - ٢٠ الفصل الثالث ، الوسط الحسابي $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ويمكن ترتيب الحل كما هو في الجدول

١ - ٤

جدول ٤ - ١

الأوزان (kg)	مركز الفئات X	$ X - \bar{X} = X - 67.45 $	التكرار	$f X - \bar{X} $
60-62	61	6.45	5	32.25
63-65	64	3.45	18	62.10
66-68	67	0.45	42	18.90
69-71	70	2.55	27	68.85
72-74	73	5.55	8	44.40
$\Sigma f X - \bar{X} = 226.50$		$N = \Sigma f = 100$		

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{M.D.} = \frac{\Sigma f|X - \bar{X}|}{N} = \frac{226.50}{100} = 2.26 \text{ kg}$$

ومن الممكن الوصول إلى طريقة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أنظر المسألة ٤ - ٤٧) .

٤ - ٥ حدد نسبة الطلبة في المسألة ٤-٤ والذي تقع أوزانهم في المدى

$$\bar{X} \pm \text{M.D.} \quad (أ) \quad \bar{X} \pm 2 \text{ M.D.} \quad (ب) \quad \bar{X} \pm 3 \text{ M.D.} \quad (ت)$$

الحل

$$\bar{X} \pm \text{M.D.} = 67.45 \pm 2.26 \quad (أ) \text{ هو المدى من } 65.19 \text{ kg إلى } 69.71 \text{ kg}$$

هذا المدى يتضمن كل الأشخاص في الفئة الثالثة + $\frac{1}{3}(65.5 - 65.19)$ من الطلبة في الفئة الثانية + $\frac{1}{3}(69.71 - 68.5)$ من الطلبة في الفئة الرابعة (نظرا لأن طول الفئة = 3 kg ، الحد الأعلى الحقيقي للفئة الثانية = 65.5 kg ، والحد الأدنى الحقيقي للفئة الرابعة = 68.5 kg) .

عدد الطلبة في المدى $\bar{X} \pm \text{M.D.}$ هو

$$42 + \frac{0.31}{3}(18) + \frac{1.21}{3}(27) = 42 + 1.86 + 10.89 = 54.75, \text{ or } 55$$

ويكون 55% من المجموع

$$\bar{X} \pm 2 \text{ M.D.} = 67.45 \pm 2(2.26) = 67.45 \pm 4.52 \quad (ب) \text{ هو المدى من } 62.93 \text{ kg إلى } 71.97 \text{ kg}$$

عدد الطلبة في المدى $\bar{X} \pm 2 \text{ M.D.}$ هو

$$18 - \left(\frac{62.93 - 62.5}{3} \right)(18) + 42 + 27 \left(\frac{71.97 - 71.5}{3} \right)(8) = 85.67, \text{ or } 86$$

ويكون 86% من المجموع .

(ج) 67.45 ± 6.78 $3(2.26) \pm 67.45$: 3 M.D. هو المدى من 60.67 kg إلى 74.23 kg .

عدد الطلبة في المدى $X \pm 3 \text{ M.D.}$ هو

$$5 - \left(\frac{60.67 - 59.5}{3} \right) (5) + 18 + 42 + 27 - \left(\frac{74.5 - 74.23}{3} \right) (8) = 97.33, \text{ or } 97$$

ويكون 97% من المجموع .

نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي :

٤ - ٦ أوجد نصف المدى الربيعي لتوزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ (أنظر الجدول ٤ - ١ في المسألة ٤-٤) .

الحل :

$$Q_1 = 65.5 + \frac{1}{2}(3) = 65.64 \text{ kg}, Q_3 = 68.5 + \frac{1}{2}(3) = 69.61 \text{ kg}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(69.61 - 65.64) = 1.98 \text{ kg}$$

لاحظ أن 50% من الحالات تقع بين Q_1 و Q_3 . بمعنى أن 50 طالبا أوزانهم بين 65.64 kg : 69.61 kg

من الممكن أن نأخذ $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = 67.63 \text{ kg}$ كقياس للنزعة المركزية بمعنى ، متوسط الأوزان .
ومن ذلك نجد أن 50% من الأوزان تقع في المدى $(67.63 \pm 1.98) \text{ kg}$.

٤ - ٧ أوجد نصف المدى الربيعي لأجور الـ 65 عاملا في شركة P and R . أنظر المسألة ٢ - ٣ الفصل الثاني ، صفحة ٥٣

الحل :

$$Q_1 = £68.25 \text{ and } Q_3 = £90.75 \text{ من المسألة ٣-٤ ، الفصل الثالث}$$

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(£90.75 - £68.25) = £11.25$$

وبما أن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) = £79.50$ فإنه يمكن أن نستنتج أن 50% من العاملين يحصلون على دخل يقع في المدى $£79.50 \pm £11.25$.

المدى المئيني 90 — 10 :

٤ - ٨ أوجد المدى المئيني 90 — 10 لأوزان الطلبة في جامعة XYZ ارجع للجدول ٢ - ١ ، صفحة ٤٥ .

الحل :

$$P_{10} = 62.5 + \frac{1}{8}(3) = 63.33 \text{ kg and } P_{90} = 68.5 + \frac{7}{8}(3) = 71.27 \text{ kg}$$

$$P_{90} - P_{10} = 71.27 - 63.33 = 7.94 \text{ kg} = 10 — 90$$

$$\frac{1}{2}(P_{10} + P_{90}) = 67.30 \text{ kg and } \frac{1}{2}(P_{90} - P_{10}) = 3.97 \text{ kg}$$

فإنه يمكننا أن نستنتج أن 80% من الطلبة تقع أوزانهم في المدى $(67.30 \pm 3.97) \text{ kg}$.

الانحراف المعياري :

٤ - ٩ أوجد الانحراف المعياري لمجموعات الأرقام في المسألة ٤ - ١

الحل

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5 \quad (١)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12 - 9.5)^2 + (6 - 9.5)^2 + (7 - 9.5)^2 + (3 - 9.5)^2 + (15 - 9.5)^2 + (10 - 9.5)^2 + (18 - 9.5)^2 + (5 - 9.5)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{23.75} = 4.87.$$

$$\bar{X} = \frac{9 + 3 + 8 + 8 + 9 + 8 + 9 + 18}{8} = \frac{72}{8} = 9 \quad (ب)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(9 - 9)^2 + (3 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (8 - 9)^2 + (9 - 9)^2 + (18 - 9)^2}{8}}$$

$$= \sqrt{15} = 3.87.$$

النتائج السابقة يمكن مقارنتها بنتائج المسألة ٤-٣. فنلاحظ أن الانحراف المعياري يشير إلى أن المجموعة

(ب) أقل تشتتاً من المجموعة (١).

ولكن هذا الواقع غير ظاهر نظراً لأن القيم المتطرفة تؤثر في الانحراف المعياري بدرجة أكبر من الانحراف

المتوسط. وهذا متوقع نظراً لأننا نربع الانحرافات عند حساب الانحراف المعياري.

٤-١٠ أوجد تباين مجموعات الأرقام في المسألة ٤ - ١.

الحل

التباين $s^2 = 23.75$ (١) $s^2 = 15$ (ب) $s^2 = 15$.

٤-١١ أوجد الانحراف المعياري لأوزان الـ 100 طالب في جامعة XYZ أنظر الجدول ٢-١ صفحة ٤٥.

الحل

من المسألة ٣ - ١٥، ٣ - ٢٠ بالفصل الثالث $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ويمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٢-٤ أدناه.

الجدول ٢ - ٤

الوزن (kg)	مراكز الفئات X	$X - \bar{X} = X - 67.45$	$(X - \bar{X})^2$	التكرار f	$f(X - \bar{X})^2$
60-62	61	-6.45	41.6025	5	208.0125
63-65	64	-3.45	11.9025	18	214.2450
66-68	67	-0.45	0.2025	42	8.5050
69-71	70	2.55	6.5025	27	175.5675
72-74	73	5.55	30.8025	8	246.4200
$\Sigma f(X - \bar{X})^2 = 852.7500$					$N = \Sigma f = 100$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{852.7500}{100}} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kilogrammes}$$

حساب الانحراف المعياري من البيانات المجمعة :

$$s = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} \quad (1) \quad ١٢-٤ \quad \text{أثبت أن}$$

(ب) استخدم الصيغة في (١) لإيجاد الانحراف المعياري للأرقام 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5 .

الحل

(١) بالتعريف

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} \\ s^2 &= \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum (X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\sum X^2 - 2\bar{X}\sum X + N\bar{X}^2}{N} \quad \text{إذن} \\ &= \frac{\sum X^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\sum X}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2 \\ &= \bar{X}^2 - \bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2 \\ s &= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} \quad \text{أو} \end{aligned}$$

لاحظ أن رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمت بالصورة المختصرة حيث استخدمنا X بدلا من X_j و \sum بدلا من $\sum_{j=1}^N$.

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} s^2 &= \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2} = \bar{X}^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 \\ &= \bar{X}^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \end{aligned}$$

$$\bar{X}^2 = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{(12)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (3)^2 + (15)^2 + (10)^2 + (18)^2 + (5)^2}{8} = \frac{912}{8} = 114 \quad (ب)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{12 + 6 + 7 + 3 + 15 + 10 + 18 + 5}{8} = \frac{76}{8} = 9.5$$

$$s = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} = \sqrt{114 - 90.25} = \sqrt{23.75} = 4.87 \quad \text{إذن}$$

هذه الطريقة يجب مقارنتها بنتيجة المسألة ١٢-٤ (١)

١٣-٤ عدل الصيغة بالمسألة ١٢-٤ (١) ليسمح بالتكرارات المقابلة للقيم المختلفة لـ X .

الحل :

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2} \quad \text{التعديل الملائم هو}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} \quad \text{وهذا يمكن إثباته كافي المسألة ١٢-٤ (١) حيث نبدأ بتعريف}$$

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N} = \frac{\sum f(X^2 - 2\bar{X}X + \bar{X}^2)}{N} = \frac{\sum fX^2 - 2\bar{X}\sum fX + \bar{X}^2\sum f}{N} \quad \text{إذن} \\
 &= \frac{\sum fX^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\sum fX}{N} + \bar{X}^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2 \\
 &= \frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2 \quad \text{or} \quad s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2}
 \end{aligned}$$

لاحظ أننا في رموز التجميع المستخدمة أعلاه استخدمنا الصيغة المختصرة حيث f, X استخدمت بدلا من f_i و X_i ،

$$\sum_{i=1}^K f_i = N \quad \cdot \quad \sum_{i=1}^K X_i = N \cdot \bar{X}$$

١٤-٤ باستخدام صيغة المسألة ١٣-٤ ، أوجد الانحراف المعياري لبيانات المسألة ١١-٤ .

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما في الجدول ٣-٤

جدول ٣-٤

الأوزان (kg)	مراكز الفئات X	X^2	التكرار f	fX^2
60-62	61	3721	5	18 605
63-65	64	4096	18	73 728
66-68	67	4489	42	188 538
69 71	70	4900	27	132 300
72-74	73	5329	8	42 632
		$\sum fX^2 = 455 803$	$N = \sum f = 100$	

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{455 803}{100} - (67.45)^2} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kg}$$

حيث $\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = 67.45 \text{ kg}$ مطابق لما حصلنا عليه في المسألة ١٥-٣ ، الفصل الثالث .

لاحظ أنه في هذه المسألة كما في المسألة ١١-٤ تجرى عمليات حسابية مطولة . في المسألة ١٧-٤ سنوضح كيف أن طريقة الترميز تبسط الحسابات بشكل كبير جدا .

١٥-٤ إذا كانت $d = X - A$ انحرافات X عن ثابت اختياري A ، أثبت أن

$$s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

الحل :

بما أن $d = X - A$ ، $X = A + d$ ، $\bar{X} = A + \bar{d}$ ، $X = A + d$ ، $\bar{X} = A + \bar{d}$ ، $X - \bar{X} = (A + d) - (A + \bar{d}) = d - \bar{d}$

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f(d - \bar{d})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2} \quad \text{حيث}$$

باستخدام نتائج المسألة ١٣-٤ حيث أبدلنا \bar{X} و X بـ \bar{d} و d على الترتيب

طريقة أخرى :

$$\begin{aligned} s^2 &= \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{(d - \bar{d})^2} = \overline{d^2 - 2d\bar{d} + \bar{d}^2} \\ &= \bar{d}^2 - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \bar{d}^2 - \bar{d}^2 = \frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N} \right)^2 \end{aligned}$$

ونحصل على النتيجة بأخذ الجذر الموجب .

١٦-٤ بين أنه لو قمنا بترميز كل مركز فئة X في توزيع تكرارى طول فئاته متساوية وتساوى c بالقيمة u طبقاً للعلاقة $X = A + cu$ حيث A أحد مراكز الفئات فإن الانحراف المعياري يمكن كتابته على الصورة .

$$s = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2} = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2}$$

الحل :

نحصل على ذلك مباشرة من المسألة السابقة . بما أن $d = X - A = cu$ وبما أن c ثابت

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(cu)^2}{N} - \left(\frac{\sum f(cu)}{N} \right)^2} = \sqrt{c^2 \frac{\sum fu^2}{N} - c^2 \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2} = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2}$$

طريقة أخرى :

من الممكن اثبات النتيجة مباشرة بدون استخدام المسألة ١٥-٤ .

اذن

$$X = A + cu, \bar{X} = A + c\bar{u} \text{ and } X - \bar{X} = c(u - \bar{u}). \quad \text{بما أن}$$

$$s^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \overline{c^2(u - \bar{u})^2} = c^2 \overline{(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2)} = c^2(\bar{u}^2 - 2\bar{u}^2 + \bar{u}^2) = c^2(\bar{u}^2 - \bar{u}^2)$$

$$s = c \sqrt{\bar{u}^2 - \bar{u}^2} = c \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2}$$

١٧-٤ أوجد الانحراف المعياري لأوزان الطلبة في جامعة XYZ باستخدام (١) الصيغة المستنتجة في المسألة ١٥-٤

(ب) طريقة الترميز المستخدمة في المسألة ١٦-٤ .

الحل :

في الجداول ٤-٤ ، ٥-٤ ، فإننا أخذنا بشكل اختياري A تساوى مركز الفئة 67 . لاحظ أنه في الجدول ٤-٤ ؛ الانحرافات $d = X - A$ مضاعفات لطول الفئة c . هذا العامل حذف في الجدول ٥-٤ . وهذا أدى إلى تبسيط الحسابات بشكل كبير في الجدول ٥-٤ . ويجب مقارنة هذه الجداول بتلك في المسائل ١١-٤ ، ١٤-٤ . ولهذه الأسباب فإن طريقة الترميز يجب استخدامها كلما كان ذلك ممكناً .

الجدول ٤-٤ :

(١)

fd	التكرارات f	$d = X - A$	مراكز الفئات X
-30	5	-6	61
-54	18	-3	64
0	42	0	67
81	27	3	70
48	8	6	73
$\sum fd = 45$	$N = \sum f = 100$		

$$= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N} \right)^2} = \sqrt{\frac{873}{100} - \left(\frac{45}{100} \right)^2} = \sqrt{8.5275} = 2.92 \text{ kg}$$

جدول ٤-٥

(ب)

fu^2	fu	التكرارات X	$u = \frac{X-A}{c}$	مراكز الفئات f
20	-10	61	-2	5
18	-18	64	-1	18
0	0	$A \rightarrow 67$	0	42
27	27	70	1	27
32	16	73	2	8
$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu = 15$			$N = \Sigma f = 100$

$$s = c \sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = 3 \sqrt{\frac{97}{100} - \left(\frac{15}{100}\right)^2} = \sqrt{0.9475} = 2.92 \text{ kg}$$

١٨-٤ أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري ، لتوزيع أجور الـ 65 عاملا في شركة P and R باستخدام طريقة الترميز (أنظر المسألة ٢-٣ ، الفصل الثاني) .

الحل :

يمكن ترتيب الحل كما هو موضح بالجدول ٤-٦

جدول ٤-٦

X	u	f	fu	fu^2
£55.00	-2	8	-16	32
65.00	-1	10	-10	10
$A \rightarrow 75.00$	0	16	0	0
85.00	1	14	14	14
95.00	2	10	20	40
105.00	3	5	15	45
115.00	4	2	8	32
		$N = \Sigma f = 65$	$\Sigma fu = 31$	$\Sigma fu^2 = 173$

$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = £75.00 + (£10.00) \left(\frac{31}{65}\right) = £79.99 \quad (١)$$

$$s = c \sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N}\right)^2} = (£10.00) \sqrt{\frac{173}{65} - \left(\frac{31}{65}\right)^2} = (£10.00) \sqrt{2.4341} = £15.60 \quad (ب)$$

١٩-٤ الجدول ٤-٧ يبين نسبة الذكاء I.Q لـ 480 تلميذ في مدرسة ابتدائية . أوجد (١) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري باستخدام طريقة الترميز .

جدول ٤-٧

Class mark X	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Frequency f	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

الحل

$$\text{نسبة الذكاء (I.Q.)} = \frac{\text{العمر العقلي}}{\text{العمر الزمني}} \text{ ، مبر عنه كنسبة مئوية .}$$

على سبيل المثال فإن طفلاً عمره 8 سنوات والذي طبقاً لأسلوب تعليمي معين له عقلية تكافئ طفلاً عمره 10 سنوات له نسبة ذكاء $I.Q. = 10/8 = 1.25 = 125\%$ أو ببساطة 125 ويكون مفهوماً أنها نسبة مئوية .

لتحصول على المتوسط والانحراف المعياري لنسب الذكاء فإن الحل يمكن أن يرتب كما في الجدول ٨-٤ .

جدول ٨-٤

X	u	f	fu	fu²
70	-6	4	-24	144
74	-5	9	-45	225
78	-4	16	-64	256
82	-3	28	-84	252
86	-2	45	-90	180
90	-1	66	-66	66
94	0	85	0	0
98	1	72	72	72
102	2	54	108	216
106	3	38	114	342
110	4	27	108	432
114	5	18	90	450
118	6	11	66	396
122	7	5	35	245
126	8	2	16	128
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$

$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 4 \left(\frac{236}{480} \right) = 95.97 \quad (1)$$

$$s = c\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N} \right)^2} = 4\sqrt{\frac{3404}{480} - \left(\frac{236}{480} \right)^2} = 4\sqrt{6.8499} = 10.47. \quad (ب)$$

طريقة شارلير للمراجعة :

٢٠-٤ استخدم طريقة شارلير للمراجعة لإثبات صحة حساب (١) الوسط (ب) الانحراف المعياري الذين تم حسابهما في المسألة ١٩-٤ .

ولتحصول على المراجعة المطلوبة ، فإننا نضيف أعمدة الجدول ٩-٤ إلى أعمدة الجدول ٨-٤ فيما عدا العمود الثاني حيث كررنا للتسهيل .

الحل :

$$(١) \text{ من الجدول ٩-٤ أدناه } \Sigma f(u+1) = 716$$

$$\text{من الجدول ٨-٤ السابق } \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716$$

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الوسط .

(ب) من الجدول ٩-٤ أدناه $\sum f(u+1)^2 = 4356$.

$$\sum fu^2 + 2 \sum fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356.$$

من الجدول ٨-٤ السابق

وهذا يعطى المراجعة المطلوبة على الانحراف المعياري .

جدول ٩-٤

$u+1$	f	$f(u+1)$	$f(u+1)^2$
-5	4	-20	100
-4	9	-36	144
-3	16	-48	144
-2	28	-56	112
-1	45	-45	45
0	66	0	0
1	85	85	85
2	72	144	288
3	54	162	486
4	38	152	608
5	27	135	675
6	18	108	648
7	11	77	539
8	5	40	320
9	2	18	162
$N = \sum f = 480$		$\sum f(u+1) = 716$	$\sum f(u+1)^2 = 4356$

معامل تصحيح شبرد للتباين :

٢١-٤ طبق تصحيح شبرد للحصول على الانحراف المعياري للبيانات في (أ) المسألة ١٧-٤ (ب) المسألة ١٨-٤ (ج) المسألة ١٩-٤

الحل :

$$s^2 = 8.5275, c = 3. (أ) \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 8.5275 - 3^2/12 = 7.7775$$

$$\sqrt{7.7775} = 2.79 \text{ kg.} \quad \text{التباين المصحح} = \sqrt{\text{التباين المصحح}} = \text{الانحراف المعياري المصحح}$$

$$s^2 = 243.41, c = 10. (ب) \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 243.41 - 10^2/12 = 235.08$$

$$\sqrt{235.08} = £15.33. \quad \text{الانحراف المعياري المصحح}$$

$$s^2 = 109.60, c = 4. (ج) \quad \text{التباين المصحح} = s^2 - c^2/12 = 109.60 - 4^2/12 = 108.27$$

$$\sqrt{108.27} = 10.41. \quad \text{الانحراف المعياري المصحح}$$

٢٢-٤ لتوزيع التكراري الثاني بالمسألة ٨-٢ ، الفصل الثاني ، صفحة ٥٧ ، أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري (ج) الانحراف المعياري مستخدماً تصحيح شبرد (د) الانحراف المعياري الفعلي من البيانات الخام .

الحل :

الحل موضح بالجدول ١٠-٤

الجدول ١٠-٤

X	u	f	fu	fu^2
122	-3	3	-9	27
131	-2	5	-10	20
140	-1	9	-9	9
149	0	12	0	0
158	1	5	5	5
167	2	4	8	16
176	3	2	6	18
		$N = \Sigma f = 40$	$\Sigma fu = -9$	$\Sigma fu^2 = 95$

$$\bar{X} = A + c\bar{u} = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = 149 + 9 \left(\frac{-9}{40} \right) = 147.0 \text{ mm} \quad (1)$$

$$s = c\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\Sigma fu^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fu}{N} \right)^2} = 9\sqrt{\frac{95}{40} - \left(\frac{-9}{40} \right)^2} = 9\sqrt{2.324375} = 13.7 \text{ mm} \quad (ب)$$

$$s^2 - c^2/12 = 188.27 - 9^2/12 = 181.52 = \text{التباين المصحح} \quad (ج)$$

$$13.5 \text{ mm} = \text{الانحراف المعياري المصحح}$$

(د) لحساب الانحراف المعياري من الأطوال الفعلية للأوراق المطعاة في المسألة ، قد يكون من الأنسب طرح رقم مناسب ، وليكن $A = 150 \text{ mm}$ من كل الأطوال ثم نستخدم طريقة المسألة ١٠-٤ . الانحرافات $d = X - A = X - 150$ مطعاة في الجدول التالي .

-12	14	0	-18	-6	-25	-1	7
-4	8	-10	-3	-14	-2	2	-6
18	-24	-12	26	13	-31	4	15
-4	23	-8	-3	-15	3	-10	-15
11	-5	-15	-8	0	6	-5	-22

$$\text{ومنها نجد أن } \Sigma d = -128 , \Sigma d^2 = 7052 \text{ إذن}$$

$$s = \sqrt{d^2 - \bar{d}^2} = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N} - \left(\frac{\Sigma d}{N} \right)^2} = \sqrt{\frac{7052}{40} - \left(\frac{-128}{40} \right)^2} = \sqrt{166.06} = 12.9 \text{ mm}$$

هذا فإن تصحيح شبرد نتج عنه بعض التحسين في هذه الحالة .

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٢٣-٤ ناقش مدى صلاحية العلاقات الاعتبارية

(أ) الانحراف المتوسط = $s/4$ (الانحراف المعياري)

(ب) نصف المدى الربيعي = $s/2$ (الانحراف المعياري)

وذلك في توزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ

الحل :

$$(أ) \text{ من المسائل ٤-٤ ، ١١-٤ ، } \frac{\text{الانحراف المتوسط}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{2.26}{2.92} = 0.77 \text{ وهو قريب من } 4/5$$

$$(ب) \text{ من المسائل ٤-٦ ، ١١-٤ ، } \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{1.98}{2.92} = 0.68 \text{ وهو قريب من } 2/3$$

وبهذا فإن العلاقة الاعتبارية صالحة في هذه الحالة .

ملحوظة : لم نقم باستخدام تصحيح شيرد للانحراف المعياري للبيانات المجمعة في الحل أعلاه نظرا لعدم استخدام تصحيح مقابل للانحراف المتوسط أو نصف المدى الربيعي .

خصائص الانحراف المعياري :

٤-٢٤ حدد النسبة المئوية لنسبة ذكاء « I.Q. » الطلبة في المسألة ٤-١٩ والتي تقع داخل المدى :

$$(أ) \bar{X} \pm s \quad (ب) \bar{X} \pm 2s \quad (ج) \bar{X} \pm 3s$$

الحل :

$$(أ) \bar{X} \pm s = 95.97 \pm 10.47 \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q من 85.5 إلى 106.4}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $(\bar{X} \pm s)$

$$339 = (38) \left(\frac{106.4 - 104}{4} \right) + 54 + 72 + 85 + 66 + (45) \left(\frac{88 - 85.5}{4} \right)$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm s = 339/480 = 70.6\%$

$$(ب) \bar{X} \pm 2s = 95.97 \pm 2(10.47) \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q من 75.0 إلى 116.9}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 2s$ هو

$$451 = (11) \left(\frac{116.9 - 116}{4} \right) + 18 + 27 + 38 + 54 + 72 + 85 + 66 + 45 + 28 + 16 + (9) \left(\frac{76 - 75.0}{4} \right)$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 2s = 451/480 = 94.0\%$

$$(ج) \bar{X} \pm 3s = 95.97 \pm 3(10.47) \text{ هو مدى نسبة الذكاء I.Q من 64.6 إلى 127.4}$$

عدد الطلبة الذين تقع نسبة ذكائهم I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو

$$= 480 - \left(\frac{128 - 127.4}{4} \right) (2) = 479.7, \text{ or } 480$$

النسبة المئوية لنسبة الذكاء I.Q. في المدى $\bar{X} \pm 3s$ هو : $479.7/480 = 99.9\%$ أو من الناحية العملية 100% .

النسب المئوية في (أ) ، (ب) ، (ج) تتفق بشكل مناسب مع ما يتوقع من التوزيع الطبيعي ، بمعنى 99.73% ، 95.45% ، 68.27% على الترتيب .

لاحظ أننا لم نستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعياري . ولو استخدم في هذه الحالة فإن النتائج ستكون أكثر قرباً للنسب السابقة . لاحظ أيضاً أن النتائج أعلاه يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المسألة ٤-٣٢ .

٤-٢٥ أوجد لمجموعات الأرقام 2, 8, 14 و 2, 5, 8, 11, 14 ما يلي :

- (أ) الوسط لكل مجموعة (ب) التباين لكل مجموعة (ج) وسط المجموعة المكونة من دمج المجموعتين .
(د) تباين المجموعة المكونة من دمج المجموعتين معا .

الحل :

$$\begin{aligned} (أ) \text{ وسط المجموعة الأولى } &= \frac{1}{5}(2 + 5 + 8 + 11 + 14) = 8 \quad \text{وسط المجموعة الثانية} = \frac{1}{3}(2 + 8 + 14) = 8 \\ (ب) \text{ تباين المجموعة الأولى} &= s_1^2 = \frac{1}{5}[(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2] = 18 \\ \text{تباين المجموعة الثانية} &= s_2^2 = \frac{1}{3}[(2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2] = 24 \\ (ج) \text{ وسط المجموعات المندمجة} &= \frac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 2 + 8 + 14}{5 + 3} = 8 \end{aligned}$$

(د) تباين المجموعات المندمجة

$$s^2 = \frac{(2 - 8)^2 + (5 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (11 - 8)^2 + (14 - 8)^2 + (2 - 8)^2 + (8 - 8)^2 + (14 - 8)^2}{5 + 3} = 20.25$$

طريقة أخرى ، بالصيغة

$$s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2} = \frac{(5)(18) + (3)(24)}{5 + 3} = 20.25 = \text{تباين المجموعات المندمجة}$$

٤-٢٦ حل المسألة السابقة لمجموعات الأرقام 2, 5, 8, 11, 14 و 10, 16, 22

الحل

هنا وسط المجموعتين هو 8 و 16 على الترتيب ، بينما تباينهما هو نفسه تباين المجموعات في المسألة السابقة

$$s_1^2 = 18 \text{ و } s_2^2 = 24$$

$$\text{وسط المجموعات المندمجة} = \frac{2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 10 + 16 + 22}{5 + 3} = 11$$

تباين المجموعات المندمجة

$$\frac{(2 - 11)^2 + (5 - 11)^2 + (8 - 11)^2 + (11 - 11)^2 + (14 - 11)^2 + (10 - 11)^2 + (16 - 11)^2 + (22 - 11)^2}{5 + 3} = 35.25$$

لاحظ أن الصيغة $s^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2}$ والتي تعطي 20.25 غير صالحة للتطبيق في هذه الحالة حيث أن الوسط

الحسابي غير متساو في المجموعتين .

٢٧-٤ (١) أثبت أن $w^2 + pw + q$ حيث q ، p ثوابت معطاة ، نهاية صغرى عندما وعندما فقط $w = -\frac{1}{2}p$

(ب) باستخدام (١) أثبت أن $\frac{\sum_{j=1}^N (X_j - a)^2}{N}$ أو باختصار $\frac{\sum (X - a)^2}{N}$ نهاية صغرى عندما وعندما فقط

الحل :

(١) المقدار $w^2 + pw + q = (w + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$. وبما أن $(q + \frac{1}{4}p^2)$ ثابت ، فإن المقدار يكون أصغر ما يمكن (بمعنى أنه نهاية صغرى) عندما وعندما فقط $w + \frac{1}{2}p = 0$ أى $w = -\frac{1}{2}p$

$$\frac{\sum (X - a)^2}{N} = \frac{\sum (X^2 - 2aX + a^2)}{N} = \frac{\sum X^2 - 2a \sum X + Na^2}{N} = a^2 - 2a \frac{\sum X}{N} + \frac{\sum X^2}{N} \quad (ب)$$

بمقارنة هذا المقدار بـ $w^2 + pw + q$ نجد أن $w = a, p = -2 \frac{\sum X}{N}, q = \frac{\sum X^2}{N}$.
وبهذا فإن المقدار نهاية صغرى عندما $a = -\frac{1}{2}p = (\sum X)/N = \bar{X}$ باستخدام النتيجة

التشتت المطلق والتشتت النسبي . معامل الاختلاف :

٢٨-٤ مصنع لإنتاج لمبات التلفزيون ينتج نوعين منها A ، B والعمر الانتاجى لهما بالساعة هو $\bar{X}_B = 1875$ و $\bar{X}_A = 1495$. وانحرافهما المعياري بالساعة $s_B = 310$ و $s_A = 280$. ما هو النوع الذى له أكبر

(١) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبي

الحل :

(١) التشتت المطلق لـ $A = s_A = 280$ h .

التشتت المطلق لـ $B = s_B = 310$ h .

اللمبات B لها أكبر تشتت مطلق .

$$(ب) \text{ معامل اختلاف } A = \frac{s_A}{\bar{X}_A} = \frac{280}{1495} = 18.7\% \quad \text{معامل اختلاف } B = \frac{s_B}{\bar{X}_B} = \frac{310}{1875} = 16.5\%$$

وبهذا فإن اللمبات A لها أكبر تغير أو تشتت نسبي .

٢٩-٤ أوجد معاملات الاختلاف V للبيانات في (١) المسألة ٤ - ١٤ (ب) المسألة ٤ - ١٨ ، باستخدام الانحراف المعياري المصحح وغير المصحح .

الحل :

$$V \text{ (غير مصحح)} = \frac{s \text{ (غير مصحح)}}{\bar{X}} = \frac{2.92}{67.45} = 0.0433 = 4.3\% \quad (١)$$

$$V \text{ (مصحح)} = \frac{s \text{ (مصحح)}}{\bar{X}} = \frac{2.79}{67.45} = 0.0413 = 4.1\% \quad (١) \quad \text{من المسألة ٤ - ٢١}$$

$$V (\text{غير مصحح}) = \frac{s (\text{غير مصحح})}{\bar{X}} = \frac{15.60}{79.77} = 0.196 = 19.6\% \quad (\text{ب})$$

$$V (\text{مصحح}) = \frac{s (\text{مصحح})}{\bar{X}} = \frac{15.33}{79.77} = 0.192 = 19.2\% \quad (\text{ب}) \quad \text{من المسألة ٢١-٤}$$

- ٣٠-٤ (أ) عرف مقياساً للتشتت النسبي يمكن استخدامه لمجموعة من البيانات معلوم ربيعاتها .
 (ب) بين الحسابات اللازمة للحصول على القياس المعرف في (أ) باستخدام بيانات المسألة ٦-٤ .

الحل :

- (أ) إذا كانت Q_1 و Q_3 ممطاة لمجموعة من البيانات فإن $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ يعد مقياساً للزعة المركزية أو متوسطات لهذه البيانات بينما $Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي يعد مقياساً للتشتت لهذه البيانات .
 وبهذا يمكن تعريف مقياس للتشتت النسبي كالآتي :

$$V_Q = \frac{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

والذي يمكن تسميته بالمعامل الربيعي للاختلاف أو المعامل الربيعي للتشتت النسبي

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{69.61 - 65.64}{69.61 + 65.64} = \frac{3.97}{135.25} = 0.0293 = 2.9\% \quad (\text{ب})$$

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

- ٣١-٤ حصل طالب على الدرجة 84 في الامتحان النهائي للرياضة حيث كان متوسط الدرجات 76 وانحرافها المعياري 10 .
 في الامتحان النهائي للطبيعة حيث كان متوسط الدرجات 82 وانحرافها المعياري 16 ، حصل الطالب على الدرجة 90 .
 في أى الموضوعات كان درجة استيعابه أعلى ؟

الحل :

المتغير المعيارى $z = (X - \bar{X})/s$ يقيس انحرافات X عن الوسط \bar{X} معبراً عنها بالانحراف المعياري s .

في الرياضة ، $z = (84 - 76)/10 = 0.8$. في الطبيعة $z = (90 - 82)/16 = 0.5$.

وبهذا كانت رتبة الطالب 0.8 من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط في الرياضة بينما كانت 0.5 فقط من الدرجة المعيارية أعلى من الوسط في الطبيعة . وبهذا فإن استيعابه النسبي كان أعلى في الرياضة .

المتغير $z = (X - \bar{X})/s$ يستخدم غالباً في الاختبارات التربوية حيث يعرف بالدرجات المعيارية .

٣٢-٤ (أ) حول نسب الذكاء I.Q. في المسألة ٤ - ١٩ إلى درجات معيارية .

(ب) عبر بالرسم البياني عن التكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية .

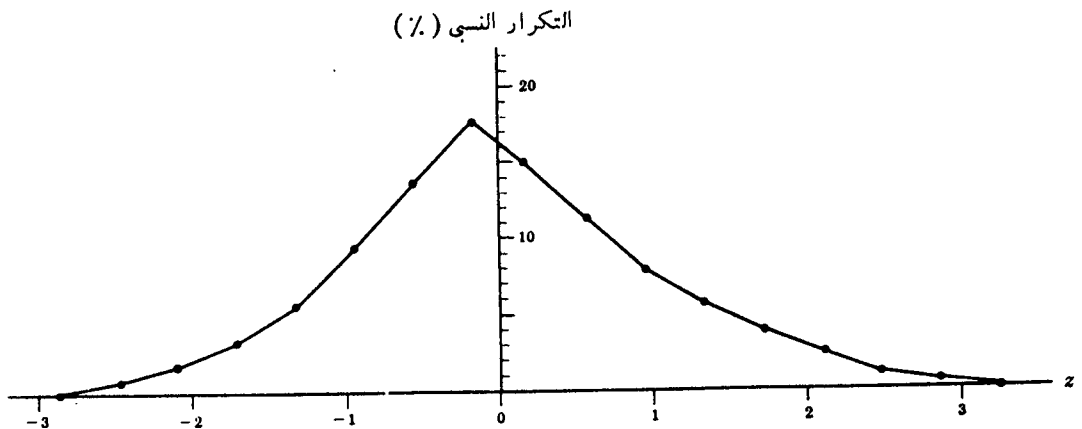
الحل :

(أ) خطوات العمل في التحويل إلى درجات معيارية يمكن ترتيبها كما في الجدول ٤ - ١١. في هذا الجدول أضفنا مركزي الفئة 66 و 130 والذان تكراراتهما صفر وذلك لاستخدامهما في حل (ب). كذلك لم يستخدم تصحيح شبرد للانحراف المعياري. الدرجات المعدلة في هذه الحالة من الناحية العملية هي نفسها المطبقة هنا إلى درجة الدقة الموضحة.

$$\bar{X} = 96.0, s = 10.5 \quad \text{الجدول ٤ - ١١}$$

L.Q. (X)	$X - \bar{X}$	$z = \frac{X - \bar{X}}{s}$	التكرار f	التكرار النسبي $f/N(\%)$
66	-30.0	-2.86	0	0.0
70	-26.0	-2.48	4	0.8
74	-22.0	-2.10	9	1.9
78	-18.0	-1.71	16	3.3
82	-14.0	-1.33	28	5.8
86	-10.0	-0.95	45	9.4
90	-6.0	-0.57	66	13.8
94	-2.0	-0.19	85	17.7
98	2.0	0.19	72	15.0
102	6.0	0.57	54	11.2
106	10.0	0.95	38	7.9
110	14.0	1.33	27	5.6
114	18.0	1.71	18	3.8
118	22.0	2.10	11	2.3
122	26.0	2.48	5	1.0
126	30.0	2.86	2	0.4
130	34.0	3.24	0	0.0
			480	100%

(ب) الشكل البياني للتكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية z (المضلع التكراري النسبي) المحور الأفقي مقياس بدلالة الانحراف المعياري s كوحدة. لاحظ أن التوزيع معتدل في عدم تماثله وهو ملتو التواءاً بسيطاً إلى اليمين.



شكل ٤ - ٢

مسائل اضافية

المدى :

٤ - ٣٣ أوجد مدى كل من مجموعات الأرقام :

(أ) 3, 4, 6, 7, 8, 5 (ب) 6.351, 9.434, 8.628, 10.624, 6.453, 8.772 .

ج : (أ) 9 (ب) 4.273

٤ - ٣٤ أوجد مدى الحمل الأعظم المعطى بالجدول ٣ - ٨ في المسألة ٣ - ٢٩ ، الفصل الثالث . ج : 40 kN

٤ - ٣٥ أوجد مدى أقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ - ١٠ في المسألة ٣ - ٦١ ، الفصل الثالث . ج : 0.036 mm

٤ - ٣٦ أكبر قيمة في 50 قياساً هو 8.34 kg . إذا كان المدى 0.46 kg أوجد أقل قيمة في القياسات .

ج : 7.88 kg

٤ - ٣٧ أوجد مدى البيانات في (أ) المسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث
(ج) المسألة ٢ - ٢٠ ، الفصل الثاني . ج : (أ) 35 (ب) غير محدد (ت) 900 hr

الانحراف المتوسط :

٤ - ٣٨ أوجد القيم المطلقة لـ (أ) 18.2 (ب) 3.58 (ج) 6.21 (د) 0 (هـ) $-\sqrt{2}$
(و) 3.52 - 2.36 - 4.00

ج : (أ) 18.2 (ب) 3.58 (ج) 6.21 (د) 0 (هـ) بالتقريب $\sqrt{2} = 1.414$ (و) 1.88

٤ - ٣٩ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام : (أ) 5, 7, 9, 3 (ب) 3.4, 4.1, 3.8, 1.6, 2.4 .

ج : (أ) 2 (ب) 0.85

٤ - ٤٠ أوجد الانحراف المتوسط لمجموعات الأرقام بالمسألة ٤ - ٣٣ .

ج : (أ) 2.2 (ب) 1.317

٤ - ٤١ أوجد الانحراف المتوسط للحمل الأعظم بالجدول ٣ - ٨ في المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث .

ج : 5.76 kN

٤ - ٤٢ أوجد الانحراف المتوسط (M.D.) لأقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ - ١٠ في المسألة ٣ - ٦١ ، الفصل الثالث . (ب) ماهي النسبة المئوية لأقطار مسامير البرشام التي تقع بين

$(\bar{X} \pm M.D.)$, $(\bar{X} \pm 2 M.D.)$, $(\bar{X} \pm 3 M.D.)$

ج : (أ) 37 mm 0.004 (ب) 96.4% ، 85.2% ، 60.0%

٤ - ٤٣ أوجد الانحراف المتوسط (أ) عن الوسط (ب) عن الوسيط لمجموعة الأرقام 2, 8, 4, 12, 9, 10, 8 . حقق أن الانحراف المتوسط عن الوسيط ليس أكبر من الانحراف المتوسط عن الوسط .

ج : (أ) 3.0 (ب) 2.8

- ٤ - ٤٤ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، للتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٠ ، الفصل الثالث .
استخدم نتيجة هذه المسألة وكذلك المسألة ٣ - ٧٠ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 31.2 (ب) 30.6
- ٤ - ٤٥ أوجد الانحراف المتوسط (أ) حول المتوسط (ب) حول الوسيط ، للتوزيع بالمسألة ٣ - ٦٢ ، الفصل الثالث .
استخدم نتيجة هذه المسألة وكذلك المسألة ٣ - ٧٢ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.0 (ب) 6.0
- ٤ - ٤٦ وضح لماذا يكون الانحراف المتوسط مقياساً ملائماً أو غير ملائم للتباين لتوزيع المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .
- ٤ - ٤٧ أوجد صيغة للترميز لحساب الانحراف المتوسط (أ) حول الوسيط (ب) حول الوسيط ، من توزيع تكرارى .
طبق هذه الصيغة للتحقق من النتائج فى المسائل ٤ - ٤٤ ، ٤ - ٤٥ .

نصف المدى الربيعى أو الانحراف الربيعى :

- ٤ - ٤٨ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٤ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث .
فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .
ج : (أ) 5.1 kN (ب) 27.0 (ج) 12
- ٤ - ٤٩ أوجد نصف المدى الربيعى للتوزيعات فى (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث ، فسر بوضوح النتائج فى كل حالة . وضح مزايا نصف المدى الربيعى لمثل هذا النوع من التوزيعات على غيره من مقاييس التشتت .
ج : (أ) \$1801 (ب) 10.8 سنة .
- ٤ - ٥٠ وضح أنه بالنسبة لأى توزيع تكرارى فإن إجمالى نسبة الحالات التى تقع فى الفترة $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$ هى 50% . هل هذا أيضاً صحيح للفترة $(Q_2 \pm \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1))$ ؟ إشرح إجابتك .
- ٤ - ٥١ (أ) وضح كيف يمكن التعبير بيانياً عن نصف المدى الربيعى المقابل لتوزيع تكرارى معين ؟
(ب) ماهى العلاقة بين نصف المدى الربيعى والتكرار المتجمع النسبى للتوزيع ؟

المدى المئينى 90 — 10 :

- ٤ - ٥٢ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث . (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث .
فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .
ج : (أ) 16.3 kN (ب) 33.6 or 34
- ٤ - ٥٣ أوجد المدى المئينى 90 — 10 لتوزيعات (أ) المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثانى ، (ب) المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .
فسر بوضوح النتائج فى كل حالة .
- ماهى مزايا المدى المئينى 90 — 10 على المقاييس الأخرى للتشتت ؟ وماهى عيوبه ؟
ج : (أ) \$7402 (ب) 40.8

- ٤ - ٥٤ ماهى المزايا أو العيوب التى يمكن أن تكون للمدى المئينى 80 — 20 بالمقارنة بالمدى المئينى 90 — 10 ؟

- ٤ - ٥٥ أجب على المسألة ٤ - ٥١ بالرجوع إلى (أ) المدى المئيني 10 - 90 (ب) المدى المئيني 20 - 80 . (ج) المدى المئيني 25 - 75 .
ما هي العلاقة بين (ج) ونصف المدى الربيعي ؟

الانحراف المعياري :

- ٤ - ٥٦ أوجد الانحراف المعياري للأرقام
(أ) 3, 6, 2, 1, 7 5 (ب) 3.2, 4.6, 2.8, 5.2, 4.4 (ج) 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1 .
ج : (أ) 2.16 (ب) 0.90 (ج) 0.484
- ٤ - ٥٧ (أ) بإضافة 5 إلى كل من الأرقام في المجموعة 3, 6, 2, 1, 7, 5 نحصل على 8, 11, 7, 6, 12, 10 . بين أن المجموعتين لهما نفس الانحراف المعياري ولكن يختلفان في المتوسط . ماهي العلاقة بين المتوسطين ؟
(ب) بضرب كل من الأرقام 3, 6, 2, 1, 7, 5 بالرقم 2 ثم إضافة 5 نحصل على المجموعة 11, 17, 9, 7, 19, 15 . ماهي العلاقة بين الانحرافات المعيارية والأوساط الحسابية للمجموعتين ؟
(ج) ماهي خصائص الوسط والانحراف المعياري المتمثلة في مجموعات الأرقام المحددة في (أ) ، (ب) ؟
- ٤ - ٥٨ أوجد الانحراف المعياري لمجموعة الأرقام في المتوالية الحسابية 4, 10, 16, 22, ... , 154 ج : 45
- ٤ - ٥٩ أوجد الانحراف المعياري للتوزيعات في (أ) المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث (ب) المسألة ٣ - ٦٠ ، الفصل الثالث (ج) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 7.33 kN (ب) 38.60 (ج) 12.1
- ٤ - ٦٠ وضح كيف تستخدم طريقة شارلير للمراجعة في كل جزء من المسألة ٤ - ٥٩ .
- ٤ - ٦١ أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المسألة ٢ - ١٧ ، بالفصل الثاني ، موضعاً دلالة النتائج التي حصلت عليها .
ج : (أ) $\bar{X} = 2.47$ (ب) $s = 1.11$
- ٤ - ٦٢ (أ) وضح لماذا لايمد الانحراف المعياري مقياساً ملائماً للتشتت للتوزيع بالمسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني (ب) ماهو مقياس التشتت الذي يمكن استخدامه بدلا منه ؟ وضح إجابتك بالأمثلة .
- ٤ - ٦٣ (أ) أوجد الانحراف المعياري s لأقطار مسامير البرشام بالجدول ٣ - ١٠ في المسألة ٣ - ٦١ ، الفصل الثالث .
(ب) ماهي النسبة المئوية لأقطار مسامير البرشام التي تقع بين $(\bar{X} \pm 3s)$, $(\bar{X} \pm 2s)$, $(\bar{X} \pm s)$ ؟
(ج) قارن النسبة المئوية في (ب) بتلك التي يمكن توقعها من الناحية النظرية إذا كان التوزيع توزيعاً طبيعياً ، فسر .
كلا من الاختلافات المشاهدة
- ج : (أ) 0.00576 mm (ب) 99.76% ، 93.3% ، 72.1%
- ٤ - ٦٤ طبق تصحيح شيرد لكل من الانحرافات المعيارية بالمسألة ٤ - ٥٩ . في كل حالة ناقش ما إذا كان هذا التطبيق يمكن أو لايمكن تبريره .
ج : (أ) 7.19 (ب) 38.24 (ج) 11.8

٤ - ٦٥ ما هي التمديلات التي تحدث بالمسألة ٤ - ٦٣ عندما نطبق تصحيح شبرد ؟

ج : (أ) 0.00569 mm (ب) 99.68% , 93.0% , 71.6%

٤ - ٦٦ (أ) أوجد الوسط والانحراف المعياري لبيانات المسألة ٢ - ٨ ، الفصل الثاني .

(ب) كون توزيعاً تكرارياً للبيانات وأوجد الانحراف المعياري .

(ج) قارن النتائج في (ب) بتلك التي في (أ) . حدد ما إذا كان تطبيق تصحيح شبرد يؤدي إلى نتائج أحسن .

ج : (أ) 12.9 mm ، 146.8 mm

٤ - ٦٧ حل المسألة ٤ - ٦٦ باستخدام بيانات المسألة ٣ - ٢٧ ، الفصل الثاني .

ج : (أ) 0.0495 mm ، 7.349 mm

٤ - ٦٨ (أ) من مجموع N رقم ، الكسر p أرقام واحد والكسر $q = 1 - p$ أصفار . أثبت أن الانحراف المعياري

لمجموعة الأرقام هو \sqrt{pq} . (ب) طبق نتيجة (أ) على المسألة ٤ - ٥٦ (ج) .

٤ - ٦٩ (أ) أثبت أن تباين مجموعة مكونة من n رقم $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$ (متوالية عددية

حدها الأول a والفرق المشترك d) معطى بالصيغة $\frac{1}{12}(n^2 - 1)d^2$ (ب) استخدم (أ) في المسألة ٤ - ٥٨

ملحوظة : استخدم

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1), 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

٤ - ٧٠ عم واثبت الخاصية ٣ بالصفحة ١١٦

علاقة اعتبارية بين مقاييس التشتت :

٤ - ٧١ بمقارنة الانحراف المعياري الذي حصلت عليه في المسألة ٤ - ٥٩ بالانحراف المتوسط في المسائل ٤ - ٤١ ، ٤ - ٤٢

٤ - ٤٤ ، حدد مدى تحقق العلاقة الاعتبارية :

الانحراف المتوسط $= \sqrt{s/5}$ (الانحراف المعياري) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ - ٧٢ بمقارنة الانحراف المعياري الذي حصلت عليه في المسألة ٤ - ٥٩ بنصف المدى الربيعي في المسألة ٤ - ٤٨ ، حدد مدى

تحقق العلاقة الاعتبارية :

نصف المدى الربيعي $= \frac{2}{3}$ (الانحراف المعياري) . ناقش أية اختلافات يمكن حدوثها .

٤ - ٧٣ ما هي العلاقة الاعتبارية والتي يمكنك توقع وجودها بين نصف المدى الربيعي والانحراف المتوسط للتوزيع ذي الشكل

الناقوسي المعتدل الالتواء ؟

ج : نصف المدى الربيعي $= \frac{5}{6}$ (الانحراف المتوسط)

٤ - ٧٤ في توزيع تكراري يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي كان نصف المدى الربيعي ١٥ ما هي القيمة التي تتوقعها (أ) الانحراف

المعياري (ب) الانحراف المتوسط

ج : (أ) ١٥ (ب) ١٢

التشتت المطلق والتشتت النسبي • معامل الاختلاف :

٤ - ٧٥ في الامتحان النهائي في الاحصاء كان متوسط الدرجات لمجموعة من 150 طالباً هو 78 وانحرافها المعياري 8.0 وفي الجبر كان متوسط الدرجات للمجموعة هو 73 وانحرافها المعياري 7.6 . في أى الموضوعات كان هناك أكبر .

(أ) تشتت مطلق (ب) تشتت نسبي ج : (أ) الاحصاء (ب) الجبر

٤ - ٧٦ أوجد معامل الاختلاف لبيانات (أ) المسألة ٣ - ٥٩ ، الفصل الثالث (ب) المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث .
ج : (أ) 6.6% (ب) 19.0%

٤ - ٧٧ (أ) ما السبب في عدم امكانية حساب معامل الاختلاف لتوزيع المسألة ٢ - ٣١ ، الفصل الثاني ؟
(ب) احسب المعامل الربيعي للتشتت النسبي لهذا التوزيع (أنظر المسألة ٣ - ١٠٨ (ج) بالفصل الثالث وكذلك المسألة ٤ - ٣٠) .

ج : 51.9%

٤ - ٧٨ (أ) أوجد مقياس التشتت النسبي الذي يستخدم نصف المدى الربيعي .
(ب) وضح كيفية حساب هذا المقياس باستخدام بيانات المسألة ٣ - ٧٣ ، الفصل الثالث .

المتغيرات المعيارية والدرجات المعيارية :

٤ - ٧٩ في الامتحانات المشار إليها في المسألة ٤ - ٧٥ ، حصل طالب على الدرجة 75 في الاحصاء و 71 في الجبر في أى امتحان يعد مستوى استيمابه أعلى ؟
ج : الجبر

٤ - ٨٠ حول مجموعة الأرقام 5, 7, 8, 2, 6 إلى درجات معيارية .

ج : 0.29, — 1.75, 1.17, 0.68, — 0.19

٤ - ٨١ أثبت أن متوسط مجموعة من الدرجات المعيارية هو صفر وانحرافها المعياري هو واحد . وضح ذلك باستخدام المسألة ٤ - ٨٠ .

٤ - ٨٢ (أ) حول الدرجات في المسألة ٣ - ١٠٧ ، الفصل الثالث إلى درجات معيارية .

(ب) كون شكلاً بيانياً للتكرار النسبي مقابل الدرجات المعيارية .

الفصل الخامس

العزوم ، الالتواء ، والتفرطح

العزوم :

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_N تمثل N قيمة يمكن أن يأخذها المتغير X ، فإننا نعرف الكمية

$$(1) \quad \bar{X}^r = \frac{X_1^r + X_2^r + \dots + X_N^r}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j^r}{N} = \frac{\Sigma X^r}{N}$$

وتسمى بالعزم الرأى . العزم الأول حيث $r = 1$ هو الوسط الحسابى \bar{X}

العزم الأول حول الوسط الحسابى \bar{X} يعرف كالاتى :

$$(2) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r}$$

إذا كانت $r = 1$ فإن $m_1 = 0$ (انظر المسألة ٣-١٦ ، الفصل الثالث) .

إذا كانت $r = 2$ فإن $m_2 = s^2$ التباين .

العزم الرأى حول أية نقطة أصل A يعرف كالاتى :

$$(3) \quad m_{r'} = \frac{\sum_{j=1}^N (X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma (X - A)^r}{N} = \frac{\Sigma d^r}{N} = \overline{(X - A)^r}$$

حيث $d = X - A$ هى انحرافات X عن A . إذا كانت $A = 0$ فإن (٣) تقول إلى (١) . ولهذا تسمى
فى أغلب الأحيان بالعزم الرأى حول الصفر .

العزوم للبيانات المجمعة :

إذا حدثت X_1, X_2, \dots, X_K بتكرارات f_1, f_2, \dots, f_K على الترتيب فإن العزوم السابقة تعرف كما يلي :

$$(٤) \quad \bar{X}' = \frac{f_1 X_1' + f_2 X_2' + \dots + f_K X_K'}{N} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j'}{N} = \frac{\Sigma f X'}{N}$$

$$(٥) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - \bar{X})^r}{N} = \frac{\Sigma f (X - \bar{X})^r}{N} = \overline{(X - \bar{X})^r}$$

$$(٦) \quad m_r = \frac{\sum_{j=1}^K f_j (X_j - A)^r}{N} = \frac{\Sigma f (X - A)^r}{N} = \overline{(X - A)^r}$$

حيث $N = \sum_{j=1}^K f_j = \Sigma f$ وهذه الصيغ ملائمة لحساب العزوم من البيانات المجمعة .

العلاقة بين العزوم :

تتحقق العلاقات التالية بين العزوم حول الوسط m_r والعزوم حول نقطة أصل اختيارية m_r'

$$(٧) \quad \begin{cases} m_2 = m_2' - m_1'^2 \\ m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 \\ m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \end{cases}$$

(أنظر المسألة ه - ه) لاحظ أن $m_1' = \bar{X} - A$

حساب العزوم للبيانات المجمعة :

طريقة الترميز التي استخدمت في حساب الوسط والانحراف المعياري والمطواة في الفصل السابق يمكن استخدامها كطريقة مختصرة لحساب العزوم . هذه الطريقة تستخدم الحقيقة أن $X_j = A + cu_j$ (أو باختصار $X = A + cu$) بحيث نحصل باستخدام المعادلة (٦) على

$$(٨) \quad m_r' = c^r \frac{\Sigma f u^r}{N} = c^r \bar{u}^r$$

والتي يمكن استخدامها للحصول على m_r بتطبيق المعادلة (٧) .

طريقة شارلي للمراجعة ومعامل شبرد لتصحيح :

تستخدم طريقة شارلي للمراجعة عند حساب العزوم بطريقة الترميز المتطابقات الآتية :

$$(٩) \quad \begin{cases} \sum f(u+1) = \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^2 = \sum fu^2 + 2 \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^3 = \sum fu^3 + 3 \sum fu^2 + 3 \sum fu + N \\ \sum f(u+1)^4 = \sum fu^4 + 4 \sum fu^3 + 6 \sum fu^2 + 4 \sum fu + N \end{cases}$$

معامل تصحيح شبرد للعزوم (بتعميم الأفكار بصفحة ١١٦) هو كالآتي :

$$(m_2 \text{ مصحح}) = m_2 - \frac{1}{12}c^2,$$

$$(m_4 \text{ مصحح}) = m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{7}{240}c^4$$

العزمان m_1 ، m_3 لا يحتاجان إلى تصحيح .

العزوم في شكل غير مميز :

حتى تتلاقى وحدات معينة فإنه يمكننا تعريف العزوم في شكل غير مميز حول الوسط الحسابي

$$(١٠) \quad a_r = \frac{m_r}{s^r} = \frac{m_r}{(\sqrt{m_2})^r} = \frac{m_r}{\sqrt{m_2}^r}$$

حيث $s = \sqrt{m_2}$ وهو الانحراف المعياري . بما أن $m_1 = 0$ و $m_2 = s^2$ فإن $a_1 = 0$ و $a_2 = 1$.

الالتواء :

الالتواء هو درجة تماثل أو البعد عن التماثل لتوزيع . إذا كان المنحنى التكراري لتوزيع (المدرج التكراري الممهد) له « ذيل » أكبر إلى يمين مركز النهاية العظمى عنه إلى يسارها يسمى التوزيع بأنه ملتو إلى اليمين أو موجب الالتواء . أما إذا كان العكس صحيحاً فيقال أنه ملتو إلى اليسار أو سالب الالتواء .

في التوزيعات الملتوية يقع الوسط على نفس جانب المنوال وذلك على نفس جانب الطرف الأطول (أنظر الأشكال ٣ - ١ ، ٣ - ٢ الفصل الثالث) . و كقياس للتأثر تأخذ الفرق (الوسط - المنوال) . وهذا المقياس يمكن تخليصه من الوحدات بقسمته على مقياس للتشتت ، مثل الانحراف المعياري ، مما يؤدي إلى التعريف التالي :

$$(١١) \quad \frac{\bar{X} - \text{mode}}{s} = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{\text{الانحراف المعياري}} = \text{الالتواء}$$

ولتحاشي استخدام المتوال ، من الممكن استخدام الصيغة الاعتبارية (١٠) صفحة ٤٨ ونعرف

$$(١٢) \quad \frac{3(\bar{X} - \text{median})}{s} = \frac{3(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}} = \text{الالتواء}$$

والمقياسان السابقان يسميان على الترتيب معامل بيرسون الأول للالتواء ومعامل بيرسون الثاني للالتواء .

وهناك مقاييس أخرى للالتواء معرفة بدلالة الربيعات والمثنيات وهي كالآتي :

$$(١٣) \quad \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \text{معامل الالتواء الربيعي}$$

$$(١٤) \quad \frac{(P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10})}{P_{90} - P_{10}} = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \text{معامل الالتواء المثنئي}$$

وهناك مقياس مهم آخر للالتواء باستخدام العزم الثالث حول الوسط الحسابي معبراً عنه بصيغة غير مميزة ويعرف كالآتي :

$$(١٥) \quad a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}} = \text{معامل الالتواء باستخدام العزم}$$

طرق أخرى لقياس الالتواء تستخدم أحياناً $b_1 = a_3^2$ وللمنحنيات تامة التماثل مثل المنحنى الطبيعي تكون كلا من b_1 ، a_3 يساوي الصفر .

التفرطح :

التفرطح هو درجة تدبب قة التوزيع ، ويؤخذ عادة بالقياس إلى التوزيع الطبيعي . التوزيع ذو القمة العالية نسبياً مثل المنحنى المعطى بالشكل ١ - ٥ (أ) يسمى منحنى مدبباً بينما المنحنى بالشكل ١ - ٥ (ب) حيث قته مسطحة يسمى مفطحاً . التوزيع الطبيعي المعطى ١ - ٥ (ج) حيث قته ليست مدببة ولا مفطحية يسمى متوسط التفرطح .

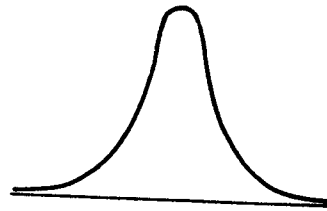


(ج) متوسط التفرطح



(ب) مفطح

شكل ١ - ٥



(أ) مدبب

أحد مقاييس التفرطح تستخدم العزم الرابع حول الوسط الحسابي على الصورة غير المميزة ويعرف بالآتي :

$$(١٦) \quad a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \text{معامل التفرطح باستخدام العزم}$$

والذي يرمز له غالباً بالرمز b_2 . وفي التوزيع الطبيعي $b_2 = a_4 = 3$. ولهذا السبب فإن التفرطح يعرف أحياناً بـ $(b_2 - 3)$ حيث يصير موجباً للتوزيع المدبب وسالباً للتوزيع المفطح ؛ وصفرأً للتوزيع الطبيعي .

يستخدم أيضاً مقياس آخر للتفرطح يعتمد على الريبعات والمنثنيات ويعطى بـ

$$(١٧) \quad \kappa = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

حيث $Q = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$ نصف المدى الربيعي . وسوف نشير إلى هذا المقياس بمعامل التفرطح المثنى . للتوزيع الطبيعي تكون قيمة هذا المعامل 0.263 . (انظر المسألة ٥ - ١٤) .

عزوم ، التواء وتفرطح المجتمع :

عندما يكون من المطلوب التفرقة بين عزوم ومقاييس الالتواء والتفرطح لعينة من تلك التي تقابلها في المجتمع الذي نحيت منه هذه العينة ، فإنه من المعتاد استخدام الرموز اللاتينية للأولى والرموز اليونانية للأخيرة . فإذا كانت عزوم العينة يرمز لها بالرموز m_r ، m_r' فإن الرموز اليونانية المقابلة هي μ_r ، μ_r' ، (μ هو الحرف اليوناني « ميو ») . أما الدليل فتستخدم دائماً الحروف اللاتينية . كذلك فإنه إذا كانت مقاييس الالتواء والتفرطح للعينة يرمز لها بالرموز a_3 و a_4 على الترتيب ؛ فإن التواء وتفرطح المجتمع يرمز له بالرموز α_3 ، α_4 (هو الحرف اليوناني « ألفا ») .

وقد سبق أن ذكرنا أن الانحراف المعياري للعينة وللمجتمع يرمز لها بالرموز σ ، s على الترتيب .

مسائل محلولة :

العزوم :

٥ - أوجد العزم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع . لمجموعة الأرقام 2 ، 3 ، 7 ، 8 ، 10 :

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{2 + 3 + 7 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6 \quad (\text{أ}) \text{ العزم الأول أو الوسط الحسابي}$$

$$X^2 = \frac{\sum X^2}{N} = \frac{2^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2}{5} = \frac{226}{5} = 45.2 \quad (\text{ب}) \text{ العزم الثاني}$$

$$X^3 = \frac{\sum X^3}{N} = \frac{2^3 + 3^3 + 7^3 + 8^3 + 10^3}{5} = \frac{1890}{5} = 378 \quad (\text{ج}) \text{ العزم الثالث}$$

$$X^4 = \frac{\sum X^4}{N} = \frac{2^4 + 3^4 + 7^4 + 8^4 + 10^4}{5} = \frac{16594}{5} = 3318.8 \quad (\text{د}) \text{ العزم الرابع}$$

٥ - ٢ أوجد المزوم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع حول الوسط الحسابي لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ - ١

الحل :

$$m_1 = \overline{(X - \bar{X})} = \frac{\sum (X - \bar{X})}{N} = \frac{(2 - 6) + (3 - 6) + (7 - 6) + (8 - 6) + (10 - 6)}{5} = \frac{0}{5} = 0 \quad (أ)$$

m_1 دائماً تساوى صفراً نظراً لأن $\bar{X} - \bar{X} = \bar{X} - \bar{X} = 0$. (أنظر المسألة ٣ - ١٦ ، الفصل الثالث)

$$m_2 = \overline{(X - \bar{X})^2} = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N} = \frac{(2 - 6)^2 + (3 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (10 - 6)^2}{5} = \frac{46}{5} = 9.2 \quad (ب)$$

لاحظ أن m_2 هو التباين s^2 .

$$m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \frac{\sum (X - \bar{X})^3}{N} = \frac{(2 - 6)^3 + (3 - 6)^3 + (7 - 6)^3 + (8 - 6)^3 + (10 - 6)^3}{5} = \frac{-18}{5} = -3.6 \quad (ج)$$

$$m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \frac{\sum (X - \bar{X})^4}{N} = \frac{(2 - 6)^4 + (3 - 6)^4 + (7 - 6)^4 + (8 - 6)^4 + (10 - 6)^4}{5} = \frac{610}{5} = 122 \quad (د)$$

٥ - ٣ أوجد المزوم (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول النقطة 4 لمجموعة الأرقام بالمسألة ٥ - ١

الحل :

$$(a) m_1' = \overline{(X - 4)} = \frac{\sum (X - 4)}{N} = \frac{(2 - 4) + (3 - 4) + (7 - 4) + (8 - 4) + (10 - 4)}{5} = 2 \quad (أ)$$

$$m_2' = \overline{(X - 4)^2} = \frac{\sum (X - 4)^2}{N} = \frac{(2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (7 - 4)^2 + (8 - 4)^2 + (10 - 4)^2}{5} = \frac{66}{5} = 13.2 \quad (ب)$$

$$m_3' = \overline{(X - 4)^3} = \frac{\sum (X - 4)^3}{N} = \frac{(2 - 4)^3 + (3 - 4)^3 + (7 - 4)^3 + (8 - 4)^3 + (10 - 4)^3}{5} = \frac{298}{5} = 59.6 \quad (ج)$$

$$m_4' = \overline{(X - 4)^4} = \frac{\sum (X - 4)^4}{N} = \frac{(2 - 4)^4 + (3 - 4)^4 + (7 - 4)^4 + (8 - 4)^4 + (10 - 4)^4}{5} = \frac{1650}{5} = 330 \quad (د)$$

٥ - ٤ باستخدام نتائج المسائل ٥ - ٢ ، ٥ - ٣ ، حقق العلاقة بين العزوم

$$m_4 - 4m_1'm_3' + 6m_1'^2m_2' - 3m_1'^4. \quad (ج) \quad m_3 = m_3' - 3m_1'm_2' + 2m_1'^3 \quad (ب) \quad m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (أ)$$

الحل :

من المسألة ٥ - ٣ : $m_1' = 2, m_2' = 13.2, m_3' = 59.6, m_4' = 330$ إذن

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 13.2 - (2)^2 = 13.2 - 4 = 9.2 \quad (أ)$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 59.5 - 3(2)(13.2) + 2(2)^3 = 59.6 - 79.2 + 16 = -3.6 \quad (ب)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 330 - 4(2)(59.6) + 6(2)^2(13.2) - 3(2)^4 = 122 \quad (ج)$$

تتفق مع نتائج المسألة ٥ - ٢ .

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (أ) \quad m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 \quad (ب)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \quad (ج)$$

الحل :

$$(أ) \quad \text{إذا كانت } d = X - A \text{ فإن } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d \text{ ، } \bar{X} = A + d$$

$$m_1 = \overline{(X - \bar{X})^1} = \overline{(d - \bar{d})^1} = \overline{d^1 - 2d\bar{d} + \bar{d}^1} \\ = \bar{d}^1 - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \bar{d}^1 - \bar{d}^2 = m_1' - m_1'^2$$

$$m_3 = \overline{(X - \bar{X})^3} = \overline{(d - \bar{d})^3} = \overline{(d^3 - 3d^2\bar{d} + 3d\bar{d}^2 - \bar{d}^3)} \quad (ب) \\ = \bar{d}^3 - 3\bar{d}^2\bar{d} + 3\bar{d}^3 - \bar{d}^3 = \bar{d}^3 - 3\bar{d}^2\bar{d} + 2\bar{d}^3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3$$

$$m_4 = \overline{(X - \bar{X})^4} = \overline{(d - \bar{d})^4} = \overline{(d^4 - 4d^3\bar{d} + 6d^2\bar{d}^2 - 4d\bar{d}^3 + \bar{d}^4)} \quad (ج) \\ = \bar{d}^4 - 4\bar{d}^3\bar{d} + 6\bar{d}^2\bar{d}^2 - 4\bar{d}^4 + \bar{d}^4 = \bar{d}^4 - 4\bar{d}^3\bar{d} + 6\bar{d}^2\bar{d}^2 - 3\bar{d}^4 \\ = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4$$

حساب العزوم من البيانات المجمعة :

٥ - ٦ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط لتوزيع الأوزان في المسألة ٣ - ٢٢ ، الفصل الثالث .

جدول ٥ - ١

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
61	-2	5	-10	20	-40	80
64	-1	18	-18	18	-18	18
67	0	42	0	0	0	0
70	1	27	27	27	27	27
73	2	8	16	32	64	128
		$N = \Sigma f = 100$	$\Sigma fu = 15$	$\Sigma fu^2 = 97$	$\Sigma fu^3 = 33$	$\Sigma fu^4 = 253$

إذن

$$m_1' = c \frac{\Sigma fu}{N} = (3) \left(\frac{15}{100} \right) = 0.45$$

$$m_3' = c^3 \frac{\Sigma fu^3}{N} = (3)^3 \left(\frac{33}{100} \right) = 8.91$$

$$m_2' = c^2 \frac{\Sigma fu^2}{N} = (3)^2 \left(\frac{97}{100} \right) = 8.73$$

$$m_4' = c^4 \frac{\Sigma fu^4}{N} = (3)^4 \left(\frac{253}{100} \right) = 204.93$$

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0 \\
 m_2 &= m_2' - m_1'^2 = 8.73 - (0.45)^2 = 8.5275 \\
 m_3 &= m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 8.91 - 3(0.45)(8.73) + 2(0.45)^3 = 2.6932 \\
 m_4 &= m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \\
 &= 204.93 - 4(0.45)(8.91) + 6(0.45)^2(8.73) - 3(0.45)^4 = 199.3759
 \end{aligned}$$

بحيث

٥ - ٧ أوجد (أ) m_1' (ب) m_2' (ج) m_3' (د) m_4' (هـ) m_1 (و) m_2 (ز) m_3 (ح) m_4
 (ط) X (ى) s (ك) X^2 (ل) X^3 للتوزيع بالمسألة ٤ - ١٩ ؛ الفصل الرابع .

الحل :

جول ٥ - ٢

X	u	f	fu	fu^2	fu^3	fu^4
70	-6	4	-24	144	-864	5184
74	-5	9	-45	225	-1125	5625
78	-4	16	-64	256	-1024	4096
82	-3	28	-84	252	-756	2268
86	-2	45	-90	180	-360	720
90	-1	66	-66	66	-66	66
94	0	85	0	0	0	0
98	1	72	72	72	72	72
102	2	54	108	216	432	864
106	3	38	114	342	1026	3078
110	4	27	108	432	1728	6912
114	5	18	90	450	2250	11 250
118	6	11	66	396	2376	14 256
122	7	5	35	245	1715	12 005
126	8	2	16	128	1024	8192
		$N = \Sigma f = 480$	$\Sigma fu = 236$	$\Sigma fu^2 = 3404$	$\Sigma fu^3 = 6428$	$\Sigma fu^4 = 74 588$

$$m_3' = c^3 \frac{\Sigma fu^3}{N} = (4)^3 \left(\frac{6428}{480} \right) = 857.0667 \quad (ج) \quad m_1' = c \frac{\Sigma fu}{N} = (4) \left(\frac{236}{480} \right) = 1.9667 \quad (أ)$$

$$m_4' = c^4 \frac{\Sigma fu^4}{N} = (4)^4 \left(\frac{74588}{480} \right) = 39 780.2667 \quad (د) \quad m_2' = c^2 \frac{\Sigma fu^2}{N} = (4)^2 \left(\frac{3404}{480} \right) = 113.4667 \quad (ب)$$

$$m_1 = 0 \quad (هـ)$$

$$m_2 = m_2' - m_1'^2 = 113.4667 - (1.9667)^2 = 109.5988 \quad (و)$$

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 = 857.0667 - 3(1.9667)(113.4667) + 2(1.9667)^3 = 202.8158 \quad (ز)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 = 35 627.2853 \quad (ح)$$

$$\bar{X} = (\bar{A} + d) = A + m_1' = A + c \frac{\Sigma fu}{N} = 94 + 1.9667 = 95.97 \quad (ط)$$

$$s = \sqrt{m_2} = \sqrt{109.5988} = 10.47 \quad (ى)$$

$$\begin{aligned}\bar{x}^2 &= (\bar{A} + \bar{d})^2 = (\bar{A}^2 + 2\bar{A}\bar{d} + \bar{d}^2) = \bar{A}^2 + 2\bar{A}\bar{d} + \bar{d}^2 = \bar{A}^2 + 2\bar{A}m_1' + m_2' \\ &= (94)^2 + 2(94)(1.9667) + 113.4667 = 9319.2063, \text{ or } 9319.\end{aligned}\quad (\text{ك})$$

$$\begin{aligned}\bar{x}^3 &= (\bar{A} + \bar{d})^3 = (\bar{A}^3 + 3\bar{A}^2\bar{d} + 3\bar{A}\bar{d}^2 + \bar{d}^3) = \bar{A}^3 + 3\bar{A}^2\bar{d} + 3\bar{A}\bar{d}^2 + \bar{d}^3 \quad (\text{ل}) \\ &= \bar{A}^3 + 3\bar{A}^2m_1' + 3\bar{A}m_2' + m_3' = 915\,571.9597, \text{ or } 915\,600\end{aligned}$$

طريقة شارلي للمراجعة :

٥ - ٨ وضع كيفية استخدام طريقة شارلي للمراجعة للحسابات بالمسألة ٥ - ٧ :

الحل :

للحصول على المراجعة المطلوبة فإننا نضيف الأعمدة التالية إلى تلك التي بالمسألة ٥ - ٧ باستثناء العمود الثاني حيث كرر هنا للتسهيل .

جدول ٥-٣

$u + 1$	f	$f(u + 1)$	$f(u + 1)^2$	$f(u + 1)^3$	$f(u + 1)^4$
-5	4	-20	100	-500	2500
-4	9	-36	144	-576	2304
-3	16	-48	144	-432	1296
-2	28	-56	112	-224	448
-1	45	-45	45	-45	45
0	66	0	0	0	0
1	85	85	85	85	85
2	72	144	288	576	1152
3	54	162	486	1458	4374
4	38	152	608	2432	9728
5	27	135	675	3375	16 875
6	18	108	648	3888	23 328
7	11	77	539	3773	26 411
8	5	40	320	2560	20 480
9	2	18	162	1458	13 122
$N = \Sigma f = 480$		$\Sigma f(u - 1) = 716$	$\Sigma f(u + 1)^2 = 4356$	$\Sigma f(u + 1)^3 = 17\,828$	$\Sigma f(u + 1)^4 = 122\,148$

في كل من المجموعات التالية أخذ الصف الأول من الجدول ٥-٣ والثاني من الجدول ٥-٢ بالمسألة ٥-٧ . تساوى النتائج يعطى المراجعة المطلوبة .

$$\begin{cases} \Sigma f(u+1) = 716 \\ \Sigma fu + N = 236 + 480 = 716 \\ \Sigma f(u+1)^2 = 4356 \\ \Sigma fu^2 + 2 \Sigma fu + N = 3404 + 2(236) + 480 = 4356 \\ \Sigma f(u+1)^3 = 17828 \\ \Sigma fu^3 + 3 \Sigma fu^2 + 3 \Sigma fu + N = 6428 + 3(3404) + 3(236) + 480 = 17828 \\ \Sigma f(u+1)^4 = 122148 \\ \Sigma fu^4 + 4 \Sigma fu^3 + 6 \Sigma fu^2 + 4 \Sigma fu + N = 74588 + 4(6428) + 6(3404) + 4(236) + 480 = 122148 \end{cases}$$

تصحيح شبرد للمزوم :

٥-٩ طبق تصحيح شبرد لإيجاد المزوم حول الوسط للبيانات في (١) المسألة ٥-٦ (ب) المسألة ٥-٧ .

الحل :

$$\begin{aligned} m_2 (\text{المصحح}) &= m_2 - c^2/12 = 8.5275 - 3^2/12 = 7.7775 \quad (١) \\ &= m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{7}{240}c^4 \\ &= 199.3759 - \frac{1}{2}(3)^2(8.5275) + \frac{7}{240}(3)^4 \\ m_4 (\text{المصحح}) &= 163.3646 \end{aligned}$$

لا يحتاجان إلى تصحيح .

$$\begin{aligned} m_2 (\text{المصحح}) &= m_2 - c^2/12 = 109.5988 - 4^2/12 = 108.2655 \quad (ب) \\ &= m_4 - \frac{1}{2}c^2m_2 + \frac{7}{240}c^4 \\ &= 35627.2853 - \frac{1}{2}(4)^2(109.5988) + \frac{7}{240}(4)^4 \\ m_4 (\text{المصحح}) &= 34757.9616 \end{aligned}$$

الالتواء :

٥-١٠ أوجد معامل التواء بيرسون (١) الأول (ب) الثاني لاجور الـ 65 عاملا في شركة P and R . أنظر المسألة ٤-٤ ، الفصل الثالث والمسألة ٤-١٨ ، الفصل الرابع .

الحل :

$$\text{الوسط } £79.76 , \text{ الوسيط } £79.06 , \text{ الانحراف المعياري } s = £15.60$$

$$\frac{£79.76 - £77.50}{£15.60} = 0.1448, \text{ or } 0.14. = \frac{\text{الوسيط} - \text{المنوال}}{s} = (١) \text{ المعامل الأول للتفرطح}$$

$$\frac{3(£79.76 - £79.06)}{£15.60} = 0.1346, \text{ or } 0.13. = \frac{3(\text{الوسط} - \text{الوسيط})}{s} = (ب) \text{ المعامل الثاني للتفرطح}$$

إذا استخدمنا الانحراف المعياري المصحح (أنظر المسألة ٤-٢١ (١) ، الفصل الرابع) فإن هذه المعاملات تصبح ، على الترتيب ،

$$\frac{£79.76 - £77.50}{£15.33} = 0.1474 \text{ or } 0.15 = \frac{\text{الوسط} - \text{المنوال}}{s \text{ (المصحح)}} \quad (١)$$

$$\frac{3(£79.76 - £79.06)}{£15.33} = 0.1370, \text{ or } 0.14 = \frac{3 \text{ (الوسط - الوسيط)}}{s \text{ (المصحح)}} \quad (ب)$$

بما أن المعاملات موجبة فإن التوزيع ملئ التواء موجب ، بمعنى ، ملئ إلى اليمين .

١١-٥ أوجد (١) معامل الالتواء الربيعي (ب) معامل الالتواء المثني لتوزيع المسألة ٥-١٠ (أنظر المسألة ٣-٤٤ ، الفصل الثالث) .

الحل :

$$Q_1 = £68.25, Q_2 = P_{50} = £79.06, Q_3 = £90.75, P_{10} = D_1 = £58.12, P_{90} = D_9 = £101.00.$$

$$(١) \text{ معامل الالتواء الربيعي } = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{£90.75 - 2(£79.06) + £68.25}{£90.75 - £68.25} = 0.0391$$

$$(ب) \text{ معامل الالتواء المثني } = \frac{P_{90} - 2P_{50} + P_{10}}{P_{90} - P_{10}} = \frac{£101.00 - 2(£79.06) + £58.12}{£101.00 - £58.12} = 0.0233$$

١٢-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام المزوم a_3 ، لكل من (١) توزيع أوزان الطلبة في جامعة XYZ (أنظر المسألة ٥-٦) .

(ب) نسب الذكاء I.Q: لطلبة المدرسة الابتدائية (المسألة ٥-٧)

الحل :

(١)

$$m_2 = s^2 = 8.5275, m_3 = -2.6932.$$

$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{8.5275})^3} = 0.1413, \text{ or } -0.14. \quad \text{إذن}$$

إذا استخدم تصحيح شبرد للبيانات المجعة (أنظر المسألة ٥-٩ (١)) إذن

$$a_3 \text{ (المصحح)} = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{-2.6932}{(\sqrt{7.7775})^3} = -0.1242 \text{ or } -0.12$$

$$a_3 = \frac{m_3}{s^3} = \frac{m_3}{(\sqrt{m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{109.5988})^3} = 0.1768, \text{ or } 0.18 \quad (\text{ب})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد للبيانات المججمة (أنظر المسألة ٩-٥ (أ)) فإن

$$a_3 (\text{المصحح}) = \frac{m_3}{(\sqrt{\text{corrected } m_2})^3} = \frac{202.8158}{(\sqrt{108.2655})^3} = 0.1800, \text{ or } 0.18$$

لاحظ أن كلا التوزيعين ملتو التواء بسيطاً ، (أ) إلى اليسار (سالب) ، (ب) إلى اليمين (موجب) .

التوزيع (ب) أكثر التواء من (أ) ، بمعنى أن (أ) أكثر تماثلاً من (ب) ويدل على ذلك الحقيقة أن القيمة الرقية أو القيمة المطلقة لمعامل الالتواء في (ب) أكبر منها في (أ) .

التفرطح :

١٣-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزوم ، a_4 ، لبيانات (أ) المسألة ٩-٥ (ب) المسألة ٧-٥ .

الحل :

$$a_4 = \frac{m_4}{s^4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{199.3759}{(8.5275)^2} = 2.7418, \text{ or } 2.74. \quad (\text{أ})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٩-٥ (أ)) ، فإن

$$a_4 (\text{المصحح}) = \frac{m_4 (\text{المصحح})}{(a_4 (\text{المصحح}))^2} = \frac{163.3646}{(7.7775)^2} = 2.7007, \text{ or } 2.70$$

$$a_4 = \frac{m_4}{s_4} = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{35.627.2853}{(109.5988)^2} = 2.9660, \text{ or } 2.97. \quad (\text{ب})$$

إذا استخدم تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٩-٥ (ب)) ، فإن

$$a_4 (\text{المصحح}) = \frac{m_4 (\text{المصحح})}{(m_2 (\text{المصحح}))^2} = \frac{34.757.9616}{(108.2655)^2} = 2.9653, \text{ or } 2.97$$

وبما أنه في التوزيع الطبيعي $a_4 = 3$ ، ينتج عن ذلك أن كلا التوزيعين (أ) ، (ب) مفرطحان وذلك بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (بمعنى أنه أقل تدبياً من التوزيع الطبيعي) .

إذا أخذنا خاصية التدب فإن التوزيع (ب) يقرب بالتوزيع الطبيعي أكثر من التوزيع (أ) ولكن ، من المسألة ١٢-٥ التوزيع (أ) أكثر تماثلاً من (ب) بحيث إذا أخذنا صفة التماثل فإن (أ) يقرب بالتوزيع أكثر من (ب) .

١٤-٥ (١) احسب معامل التفرطح المثني $\kappa = Q/(P_{90} - P_{10})$. لتوزيع المسألة ١١-٥ .

(ب) ما مدى قربه من التوزيع الطبيعي ؟

الحل :

$$Q = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(\pounds 90.75 - \pounds 68.25) = \pounds 11.25, P_{90} - P_{10} = \pounds 101.00 - \pounds 58.12 = \pounds 42.88 \quad (١)$$

$$\kappa = Q / (P_{90} - P_{10}) = 0.262 \quad \text{إذن}$$

(ب) بما أن κ للتوزيع الطبيعي هو 0.263 ، ينتج عن ذلك أن التوزيع المعطى متوسط التفرطح (بمعنى أن تحديه يقترب من التوزيع الطبيعي) . أى أن تفرطح التوزيع يماثل تقريبا تفلطح التوزيع الطبيعي مما يؤدي إلى الاعتقاد بأنه يمكن تقريبه بشكل جيد باستخدام التوزيع الطبيعي إذا أخذنا في الاعتبار تفرطحه .

مسائل إضافية

المزوم :

١٥-٥ أوجد المزوم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع لمجموعة الأرقام 4, 7, 5, 9, 8, 3, 6

ج : (١) 6 (ب) 40 (ج) 288 (د) 2188

١٦-٥ أوجد المزوم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول الوسط لمجموعة الأرقام بالمسألة ١٥-٥ .

ج : (١) 0 (ب) 4 (ج) 0 (د) 25.86

١٧-٥ أوجد المزوم (١) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع

حول الرقم 7 لمجموعة الأرقام بالمسألة ١٥-٥ .

ج : (١) -1 (ب) 5 (ج) -91 (د) 53

١٨-٥ باستخدام نتائج المسألة ١٦-٥ ، ١٧-٥ ، أثبت العلاقات بين المزوم

$$m_3 = m_3' - 3m_1' m_2' + 2m_1'^3 \quad (ب) \quad m_2 = m_2' - m_1'^2 \quad (١)$$

$$m_4 = m_4' - 4m_1' m_3' + 6m_1'^2 m_2' - 3m_1'^4 \quad (ح)$$

١٩-٥ أوجد المزوم الأربعة حول الوسط لمجموعة أرقام المتوالية الحسابية 2, 5, 8, 11, 14, 17 .

ج : 0, 26.25, 0, 1193.1

٢٠-٥ أثبت أن (١) $m_2' = m_2 + h^2$ (ب) $m_3' = m_3 + 3hm_2 + h_3$, (ج) $m_4' = m_4 + 4hm_3 + 6h^2m_2 + h^4$

حيث $h = m_1'$

٢١-٥ إذا كان المزوم الأول حول الرقم 2 هو 5 ، فما هو الوسط ؟

ج : 7

٢٢-٥ إذا كانت المزوم الأربعة الأولى حول الرقم 3 تساوى 2, 10, — 25, 50

أوجد المزوم المقابلة (١) حول الوسط (ب) حول الرقم 5 (ج) حول الصفر .

(ج) (١) 0, 6, 19, 42 (ب) 4, 22, — 117, 560 (ج) 1, 7, 38, 74

٢٣-٥ أوجد المزوم الأربعة الأولى حول الوسط للأرقام 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1.

ج : 0.02344, —0.0586, —0.0696

٢٤-٥ (١) أثبت أن $m_5 = m_5' - 5m_1'm_4' + 10m_1'^2m_3' - 10m_1'^3m_2' - 4m_1'^5$ (ب) أوجد صيغة مماثلة لـ m_6

٢٥-٥ من مجموع N عدد ، الكسر p يعبر عن الأرقام التي تأخذ القيمة واحد والكسر $q = 1 - p$ يعبر عن الأرقام التي تأخذ القيمة صفر . أوجد

(١) m_1 (ب) m_2 (ج) m_3 (د) m_4 لمجموعة الأرقام . قارن بالمسألة ٢٣-٥ .

ج : (١) $m_1 = 0$ (ب) $m_2 = pq$ (ج) $pq(q - p)$ (د) $dq(p^2 - pq + q^2)$

٢٦-٥ أثبت أن المزوم الأربعة الأولى حول الوسط في المتوالية العددية $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$ هي

$$m_1 = 0, m_2 = \frac{1}{12}(n^2 - 1)d^2, m_3 = 0, m_4 = \frac{1}{240}(n^2 - 1)(3n^2 - 7)d^4$$

قارن بالمسألة ١٩-٥ . أنظر أيضا المسألة ٦٩-٤ ، الفصل الرابع

ملحوظة : $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n - 1)^4 = \frac{1}{30}n(n - 1)(2n - 1)(3n^2 - 3n - 1).$

العزوم من البيانات المجمعة :

X	f
12	1
14	4
16	6
18	10
20	7
22	2

المجموع 30

٢٧-٥ احسب العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالجدول ٥-٤

$$m_1 = 0, m_2 = 5.97, m_3 = -0.397, m_4 = 89.22 \quad \text{ج :}$$

٢٨-٥ وضح كيفية استخدام طريقة شارليز للمراجعة عند إجراء الحسابات بالمسألة ٢٧-٥

جنول ٥-٤

٢٩-٥ طبق معادل تصحيح شبرد للعزوم التي حصلت عليها بالمسألة ٢٧-٥ .

$$\text{ج : } m_1 (\text{مصحح}) = 0, m_2 (\text{مصحح}) = 5.440, m_3 (\text{مصحح}) = -0.5920, m_4 (\text{مصحح}) = 76.2332$$

٣٠-٥ أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط للتوزيع بالمسألة ٣-٥٩ بالفصل الثالث .

(١) بدون تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد .

$$\text{ج : (١)} \quad m_1 = 0, m_2 = 53.743, m_3 = 61.853, m_4 = 8491.4$$

$$\text{(ب)} \quad m_1 (\text{مصحح}) = 51.660, m_2 (\text{مصحح}) = 7837.8$$

٣١-٥ أوجد (١) m_1 (ب) m_2 (ج) m_3 (د) m_4

$$\bar{X} \text{ (أ)} \quad s \text{ (و)} \quad \bar{X}^2 \text{ (ز)} \quad \bar{X}^3 \text{ (ح)} \quad \bar{X}^4 \text{ (ط)} \quad (\bar{X}+1)^3 \text{ (ى)}$$

لتوزيع المسألة ٣-٦٢ ، الفصل الثالث .

$$(١) \quad 0 \quad (ب) \quad 52.95 \quad (ج) \quad 92.35 \quad (د) \quad 7158.20 \quad (هـ) \quad 26.2 \quad (و) \quad 7.28 \quad (ز) \quad 739.58$$

$$(ج) \quad 22247.6 \quad (ط) \quad 706428 \quad (ى) \quad 24545$$

الالتواء :

٣٢-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٢٧-٥

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

$$\text{ج : (١)} \quad -0.2464 \quad (ب) \quad -0.2464$$

٣٣-٥ أوجد معامل الالتواء باستخدام العزوم ، a_3 ، لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث . أنظر المسألة ٣٠-٥ .

$$\text{ج : } 0.1570$$

٣٤-٥ العزم الثاني حول الوسط لتوزيعين هو 16,9 بينما العزم الثالث حول الوسط لهما هو 12.8 — ، 8.1 —
على الترتيب . أى التوزيعين أكثر التواء إلى اليسار ؟

ج : التوزيع الأول .

٣٥-٥ أوجد معامل التواء بيرسون (١) الأول (ب) الثاني . لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث عدد الفروق .
ج : (١) 0.040 (ب) 0.074

٣٦-٥ أوجد (١) معامل الالتواء الربيعي (ب) معامل الالتواء المثنى لتوزيع المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث ،
قارن النتيجة بنتيجة المسألة ٣٥-٥ واشرح .

(١) -0.02 (ب) -0.13

٣٧-٥ (١) وضح السبب في أن معامل بيرسون للالتواء غير مناسب لتوزيع المسألة ٢-٣١ الفصل الثاني :

(ب) أوجد معامل الالتواء الربيعي لهذا التوزيع وفسر النتيجة .

ج : (ب) -0.078

التفرطح :

٣٨-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزم a_4 ، لتوزيع المسألة ٥-٢٧

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد

ج : (١) 2.62 (ب) 2.58

٣٩-٥ أوجد معامل التفرطح باستخدام العزم لتوزيع المسألة ٣-٩٤ ، الفصل الثالث .

(١) بدون استخدام تصحيح شبرد (ب) باستخدام تصحيح شبرد . (أنظر المسألة ٥-٣٠) .

ج : (١) 2.94 (ب) 2.94

٤٠-٥ العزم الرابع حول الوسط لكلا من التوزيعين بالمسألة ٥-٣٤ هما 780 ، 230 على الترتيب . أى التوزيعين أكثر
تقريباً للتوزيع المعتدل لو نظرنا إلى

(١) تدبب القمة (ب) الالتواء

ج : (١) الثاني (ب) الأول

٤١-٥ أى من التوزيعات بالمسألة ٥-٤٠ (١) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (١) الثاني (ب) ليس أى منهما (ج) الأول .

٤٢-٥ الانحراف المعياري لتوزيع متماثل هو 5 . ماذا يجب أن يكون عليه العزم الرابع حول الوسط بحيث يكون التوزيع (أ) مدبب (ب) متوسط التفرطح (ج) مفرطح ؟

ج : (أ) أكبر من 1875 (ب) يساوي 1875 (ج) أقل من 1875

٤٣-٥ (أ) احسب معامل التفرطح المثني ، κ لتوزيع المسألة ٣-٥٩ الفصل الثالث .

(ب) قارن نتيجتك بالنتيجة النظرية 0.263 للتوزيع الطبيعي وفسر ذلك .

(ج) كيف يمكن التوفيق بين هذه النتيجة بتلك التي حصلت عليها من المسألة ٥-٣٩

ج . (أ) 0.313

الفصل السادس

اساسيات نظرية الاحتمالات

التعريف التقليدي للاحتمالات :

افترض أن الحدث E يمكن أن يحدث بـ h طريقة وكانت n عدد جميع الحالات الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الحدوث .
وبهذا فإن احتمال حدوث الحدث (يسمى نجاحه) يرمز له بالرمز .

$$p = \Pr\{E\} = \frac{h}{n}$$

واحتمال عدم حدوث الحدث (يسمى فشله) يرمز له بالرمز .

$$q = \Pr\{\text{not } E\} = \frac{n-h}{n} = 1 - \frac{h}{n} = 1 - p = 1 - \Pr\{E\}$$

وبهذا فإن $p+q=1$ أو $\Pr\{E\} + \Pr\{\text{not } E\} = 1$

والحدث "not E " يرمز له أحياناً بالرمز \bar{E} , $\sim E$ أو E^c

مثال :

E تمثل الحدث ظهور الأرقام 3 أو 4 في رمية زهرة طاولة مرة واحدة .

هناك ست طرق ممكنة لوقوع الزهر ينتج عنها ظهور الأرقام 1, 2, 3, 4, 5, 6 .

وإذا كانت الزهرة غير متميزة (بمعنى أنها غير مثقلة بالرصاصة بحيث تقع على عدد معين عند القائها - غير مغشوشة) . فإننا يمكن أن نفترض أن هذه الطرق الست متساوية الحدوث . وبما أن E يمكن أن تحدث في

$$p = \Pr\{E\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
 مرتين من هذه الطرق فإن

احتمال عدم الحصول على 3 أو 4 (بمعنى ، الحصول على 1, 2, 5, 6) هو

$$q = \Pr\{\bar{E}\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

لاحظ أن احتمال حدث هو رقم بين 0, 1 . إذا كان وقوع الحدث مستحيلاً ، فإن احتماله هو 0 . إذا كان الحدث لابد أن يقع ، بمعنى أن وقوعه مؤكد ، فإن احتماله هو 1 . إذا كان احتمال حدوث حدث هو p ، فإن الترجيح في صالح حدوثه هو $q : p$. (وتقرأ « p إلى q ») ، والترجيح في صالح عدم حدوثه هو $q : p$. بهذا فإن الترجيح في صالح عدم ظهور 3 أو 4 في رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة هو

$$q : p = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2:1$$

تعريف الاحتمال كتكرار نسبي :

يميب التعريف السابق للاحتمال أن كلمة « له نفس الفرصة في الحدوث » كلمة غامضة . وفي الواقع فإن هذه الكلمة تبدو أنها مرادفة لكلمة « متساوية الاحتمال » ، وبهذا فإن التعريف دائري حيث نعرف الاحتمال بدلالة نفسه . ولهذا السبب فإن البعض ، يستخدم تعريفاً إحصائياً للاحتمال . وطبقاً لهذا فإن الاحتمال المقدر ، أو الاحتمال الاعتباري . يحدث يؤخذ على أنه التكرار النسبي لحدوث هذا الحدث عندما تكون عدد المشاهدات كبيراً جداً . والاحتمال نفسه هو نهاية التكرار النسبي عندما يؤول عدد المشاهدات إلى ما لا نهاية .

مثال :

إذا قذفت عملة 1000 مرة وننتج عنها 529 صورة ، فإن التكرار النسبي للصورة هو $529/1000=0.529$. إذا قذفت العملة 1000 مرة أخرى وننتج عنها 493 صورة فإن التكرار النسبي في مجموع 2000 رمية هو $(529 + 493)/2000 = 0.511$. وطبقاً للتعريف الإحصائي ، فإنه بالاستمرار بهذا الشكل فإننا نصبح أقرب ثم أقرب إلى رقم نسميه احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة للعملة . من النتيجة التي حصلنا عليها هذا الرقم يجب أن يكون 0.5 إلى رقم معنوي واحد . للحصول على أرقام معنوية أكثر فإننا يجب أن نأخذ مشاهدات أخرى .

التعريف الإحصائي ، على الرغم من أنه مفيد من الناحية العملية ، إلا أن له صعوبات من وجهة النظر الرياضية ، حيث أن الرقم الذي يمثل النهاية قد لا يوجد بالفعل . لهذا السبب فإن نظرية الاحتمال الحديثة تبنى على أساس فروض حيث مفهوم الاحتمال غير معرف مثلما النقطة والخط غير معرفين في الهندسة .

الاحتمال الشرطي . الأحداث المستقلة والتابعة :

إذا كان E_1 و E_2 حدثين ، فإن احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلاً يعبر عنه $Pr \{ E_2 | E_1 \}$ أو $Pr \{ E_2 \text{ given } E_1 \}$ ويسمى بالاحتمال الشرطي لـ E_2 إذا كانت E_1 حدثت بالفعل .

إذا كان حدوث أو عدم حدوث E_1 لن يؤثر على احتمال حدوث E_2 فإن $Pr \{ E_2 | E_1 \} = Pr \{ E_2 \}$ ونقول في هذه الحالة أن E_1 و E_2 أحداث مستقلة ، وخلاف ذلك فإنهم أحداث تابعة .

إذا كانت $E_2 E_1$ تعبر عن الحدث « كلا من E_2, E_1 يحدثان منا » ونسعى في بعض الأحيان حدث مركب ، فإن

$$(١) \quad \Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\}$$

وعلى وجه الخصوص

$$(٢) \quad \Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} \quad \text{للأحداث المستقلة}$$

ولثلاثة أحداث E_1, E_2, E_3 فإن

$$(٣) \quad \Pr\{E_1 E_2 E_3\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\} \Pr\{E_3|E_1 E_2\}$$

بمعنى أن احتمال حدوث E_1, E_2, E_3 معاً يساوى احتمال حدوث E_1 مضروباً في احتمال حدوث E_2 علماً بأن E_1 قد حدث فعلاً ، مضروباً في احتمال حدوث E_3 علماً بأن كلا من E_2, E_1 قد حدثا بالفعل . وعلى وجه الخصوص .

$$(٤) \quad \Pr\{E_1 E_2 E_3\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} \Pr\{E_3\} \quad \text{للأحداث المستقلة}$$

وبشكل عام إذا كانت $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ عدد n من الأحداث المستقلة احتمالاتها على الترتيب

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ فإن احتمال حدوث $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ هو $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$

مثال ١ :

إذا كان الحدث E_1 يعبر عن « ظهور الصورة في الرمية الخامسة لعملة » والحدث E_2 يعبر عن « ظهور الصورة في الرمية السادسة للعملة » فإن الحدثين E_2, E_1 أحداث مستقلة ، وهذا فإن احتمال ظهور الصورة في كلا الرميتين الخامسة والسادسة هو ، بافتراض أن العملة « غير متحيزة » هو

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

مثال ٢ :

إذا كان احتمال أن يظل A على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.7 وإحتمال أن يظل B على قيد الحياة 20 عاماً هو 0.5 ، فإن احتمال أن يظل الإثنين على قيد الحياة 20 عاماً هو $0.35 = (0.7)(0.5)$.

مثال ٣ :

افترض أن صندوقاً يحتوي على 3 كور بيضاء و 2 كرة سوداء . الحدث E_1 هو « الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء » والحدث E_2 « الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء » علماً بأن الكرة التي سحبت لا تعاد مرة ثانية .

هنا E_2, E_1 أحداث تابعة .

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء $\Pr\{E_1\} = \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$ بينما أن احتمال

أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء علماً بأن الكرتى التي سحبت في المرة الأولى كانت سوداء

$$\Pr\{E_2|E_1\} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2|E_1\} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

الإحداث المتنافية :

في حدثين أو عدة أحداث إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر أو الآخرين فإنه يطلق عليها أحداث متنافية . بهذا إذا كانت E_1 و E_2 أحداث متنافية فإن $\Pr\{E_1 E_2\} = 0$.

إذا كان $E_1 + E_2$ يمثل الحدث بأن « أياً من E_1 أو E_2 أو كلاهما يحدثان » فإن

$$(٥) \quad \Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$$

وعلى وجه الخصوص

$$(٦) \quad \Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} \quad \text{للأحداث المتنافية}$$

وكتعميم لهذا إذا كانت E_1, E_2, \dots, E_n عدد n من الأحداث المتنافية احتمال حدوثها هو على الترتيب

p_1, p_2, \dots, p_n فإن احتمال حدوث

$$E_1 \text{ أو } E_2 \text{ أو } \dots \text{ أو } E_n \text{ هو } p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

مثال ١ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » الكوتشينة « والحدث E_2 يمثل « سحب ورقة عليها

صورة الملك » إذن $\Pr\{E_1\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ and $\Pr\{E_2\} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ احتمال سحب ورقة تكون إما آس

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} \quad \text{أو ملك هو}$$

حيث أن الملك والآس لا يمكن أن يظهر معاً في سحب واحد ولهذا فهما يمدان أحداثاً متنافية .

مثال ٢ :

E_1 يمثل الحدث « سحب آس من مجموعة أوراق اللعب » الكوتشينة « و E_2 يمثل الحدث « سحب ورقة عليها

صورة القلب » إذن E_1 و E_2 لا يمدان أحداثاً متنافية حيث يمكن أن تكون الورقة آس وعليها صورة

القلب . وبهذا فإن احتمال سحب ورقة وتكون آس وعليها صورة القلب أو كليهما هو

$$\begin{aligned} \Pr\{E_1 + E_2\} &= \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\} \\ &= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة :

إذا كان المتغير X يمكن أن يأخذ مجموعة مجموعة من القيم المتقطعة X_1, X_2, \dots, X_K باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K

على الترتيب ، حيث $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ فإنه يمكن القول أن هذا يمد تعريفاً لتوزيع احتمال متقطع للمتغير X .

الدالة $p(X)$ والتي تأخذ القيم p_1, p_2, \dots, p_K لقيم $X = X_1, X_2, \dots, X_K$ تسمى دالة الاحتمال أو التكرار X . ولأن X يمكن أن تأخذ قيماً معينة باحتمالات محددة ، فإنه يسمى غالباً بالمتغير العشوائى المتقطع . المتغير العشوائى يعرف أيضاً بالمتغير التصادفى .

مثال :

فدقت زهرق طاولة (غير متحيزتين) فإذا كان X يعبر عن مجموع النقط التى نحصل عليها . فإن التوزيع الاحتمالى يعطى بالجدول التالى

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

على سبيل المثال ، احتمال الحصول على مجموع 5 هو $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ وهذا فإنه فى 900 رمية للزهرتين فإننا نتوقع أن 100 رمية ستعطى المجموع 5 .

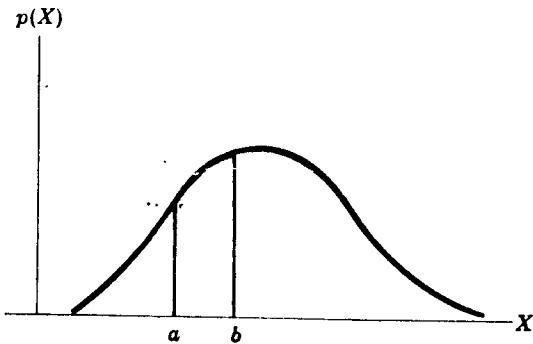
لاحظ أن هذا مناظر للتوزيع التكرارى النسبى حيث حلت الاحتمالات محل التكرارات النسبية وهذا يمكن التفكير فى التوزيعات الاحتمالية كتوزيع نظرى أو الصورة المثالية فى النهاية للتوزيع التكرارى النسبى عندما تكون عدد المشاهدات كبير جداً . ولهذا السبب فإنه يمكن أن ننظر إلى التوزيعات الاحتمالية كتوزيعات للمجتمعات ، بينما التوزيعات التكرارية النسبية كتوزيعات للعينات المسحوبة من هذه المجتمعات .

ويمكن تمثيل التوزيعات الاحتمالية بيانياً برسم $p(X)$ مقابل X ، كما فى التوزيع التكرارى النسبى . أنظر المسألة ٦-١١

بتجميع الاحتمالات نحصل على دالة التوزيع الاحتمالى التراكمى ، والمقابلة للتوزيع التكرارى المتجمع النسبى . والدالة المرتبطة بهذا التوزيع تسمى أحياناً بدالة التوزيع .

التوزيعات الاحتمالية المتصلة :

الأفكار السابقة يمكن أن تمتد لتشمل الحالة التى يمكن أن يأخذ فيها المتغير X مجموعة من القيم المتصلة . ويعبر المضلع التكرارى النسبى للعينات ، من الناحية النظرية أو فى النهاية عن المجتمع حيث يمد بمنحنى متصل. مثل الموضح فى الشكل ٦-١ . والذى تأخذ معادلته الصورة $Y = p(X)$ المساحة الكلية تحت المنحنى المحدد بالمحور X ، تساوى واحد ، والمساحة تحت المنحنى التى تقع بين الخطوط $X = a$ و $X = b$ (مظلة فى الشكل) تعطى احتمال أن X تقع بين a, b ، والتى يمكن التعبير عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$



وتسمى $p(X)$ دالة كثافة الاحتمال ، أو باختصار دالة كثافة ، وإذا أعطينا مثل هذه الدالة فإنه يمكن القول أن هذا يعد تعريفا للتوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X . ويسمى المتغير X غالبا بمتغير عشوائي متصل .

وكما في حالة المتغير المتقطع ، فإنه يمكن تعريف دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي ودالة التوزيع المرتبطة بها .

التوقع الرياضي :

إذا كانت p تمثل احتمال حصول شخص على كمية من النقود S ، التوقع الرياضي ، أو ببساطة التوقع ، يعرف بأنه pS .

مثال :

إذا كان احتمال أن يكسب شخص جائزة قيمتها £10 هو $1/5$ ، فإن التوقع هو $\frac{1}{5}(\text{£}10) = \text{£}2$.

ويمكن بسهولة تعميم مفهوم التوقع . إذا كان X يعبر عن متغير عشوائي متقطع والذي يمكن أن يأخذ القيم X_1, X_2, \dots, X_K باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K على الترتيب حيث $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$ ، التوقع الرياضي للمتغير X أو ببساطة توقع X ، ويرمز له بالرمز $E(X)$ ، يعرف بأنه

$$(v) \quad E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \dots + p_K X_K = \sum_{j=1}^K p_j X_j = \sum pX$$

إذا وضعنا في صيغة التوقع بدلا من الاحتمالات p_j ، التكرارات النسبية f_j/N حيث $N = \sum f_j$ فإن التوقع يختصر إلى $(\sum fX)/N$ وهو الوسط الحسابي \bar{X} لعينة حجمها N حيث X_1, X_2, \dots, X_K تظهر مع تلك التكرارات النسبية وكلما صارت N أكبر فإن التكرارات النسبية f_j/N تقترب من الاحتمالات p_j وهذا يؤدي إلى تفسير $E(X)$ كممثل لمتوسط المجتمع التي سميت منه العينة . فإذا رمزنا لمتوسط العينة بالرمز m فإن متوسط المجتمع المقابل يعبر عنه بالحرف اليوناني μ (ميو) .

ويمكن تعريف التوقع أيضا بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر . ولكن التعريف يحتاج إلى استخدام علم التفاضل والتكامل .

العلاقة بين متوسط وتباين المجتمع ومتوسط وتباين العينة :

إذا سمحنا بعينة عشوائية حجمها N من مجتمع (بمعنى أننا نفترض أن كل العينات ذات نفس الحجم لها نفس الفرصة في السحب) ، فإنه من الممكن إثبات أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة m هو متوسط المجتمع μ .

لا يترتب على ما سبق استنتاج أن القيمة المتوقعة لأي كمية محسوبة من العينة تساوي القيمة المقابلة لها في المجتمع . على سبيل المثال ، فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة كما سبق أن عرفناه لا يساوي تباين المجتمع ولكن يساوي $(N-1)/N$ مضروبا في هذا التباين . وهذه هي الطريقة التي يختارها بعض الإحصائيين في تعريف تباين العينة حيث يأخذون تعريفا للتباين مضروبا في $(N-1)/N$.

التحليل التوافقي :

الحصول على احتمالات الحوادث المركبة يتطلب عد جميع الحالات وهذا غالباً ما يكون صعب أو عمل أو كليهما . ولتسهيل العمل المطلوب فإننا نستخدم المبادئ الأساسية للموضوع المسمى بالتحليل التوافقي .

المبادئ الأساسية :

إذا كان حدث يمكن أن يحدث بأى من n_1 طريقة إذا حدث ذلك فإن حدثاً آخر يمكن أن يحدث بأى من n_2 طريقة ، فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معا بهذا الترتيب هو $n_1 n_2$.

مثال :

مثال : إذا كان هناك 3 مرشحين لمنصب المحافظ و 5 مرشحين لمنصب العمدة ، فإن عدد الطرق التى يمكن بها شغل الوظائفين معا هو $3 \cdot 5 = 15$ طريقة .

مضروب n :

مضروب n ، ويرمز له بالرمز $n!$ يعرف كالاتى :

$$(٨) \quad n! = n(n-1)(n-2) \dots 1$$

وهذا $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ، $4!3! = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(3 \cdot 2 \cdot 1) = 144$ ومن المناسب تعريف $0! = 1$.

التباديل :

تباديل n من الأشياء المختلفة تأخذ r فى كل مرة هى تنظيمات يتركب كل منها من r مأخوذة من n من الأشياء مع الاهتمام بالترتيب فى هذه التنظيمات .

عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r فى المرة برمز لها بالرمز $P_{n,r}$ أو $P(n,r)$ وتعرف كالاتى :

$$(٩) \quad {}_nP_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

وعلى وجه الخصوص ، عدد تباديل n شئ مأخوذة n فى المرة هو

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!$$

مثال :

عدد تباديل الحروف a, b, c مأخوذة حرفان فى كل مرة هو ${}_3P_2 = 3 \cdot 2 = 6$. وهذه هى

$$ba, ac, ca, bc, cb.$$

عدد تراتيب مجموعة من n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة ، n_2 الأشياء المتشابهة و هو

$$(١٠) \quad n = n_1 + n_2 + \dots \quad \text{حيث} \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots}$$

مثال :

عدد تباديل الحروف في كلمة *Statistics* هو $\frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50400$ حيث أنه يوجد 3 s's ، 1 c و 2 i's 1 a ، 3 t's .

التوافيق :

توافيق n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة هي اختيارات يتركب كل منها من r من الـ n بصرف النظر عن الترتيب . عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة يرمز لها بالرمز ${}_nC_r$ ، $C(n, r)$ ، $C_{n,r}$ or $\binom{n}{r}$ وتعرف بما يلي :

$$(١١) \quad {}_nC_r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

مثال :

عدد توافيق الحروف a, b, c مأخوذة اثنان في كل مرة هو ${}_3C_2 = \frac{3 \cdot 2}{2!} = 3$

وهي ab, ac, bc . لاحظ أن ab هي نفس التوافيق مثل ba ولكنها ليست نفس التباديل .

لاحظ أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ بهذا فإن ${}_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$ عدد توافيق n من الأشياء مأخوذة 1 أو 2 ... أو n في كل مرة هو

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$$

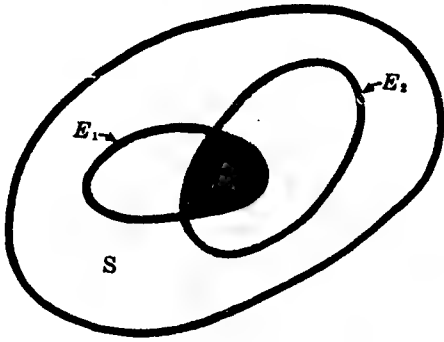
تقريب ستيرلنج 1 : $n!$

عندما تكون n كبيرة فإن حساب قيمة $n!$ مباشرة يكون غير عملي . وفي مثل هذه الحالة فإنه يمكن الاستفادة بصيغة ستيرلنج التقريبية :

$$(١٢) \quad n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

حيث $e = 2.71828\dots$ الأساس الطبيعي للوغاريتمات . أنظر المسألة ٦-٣٦ .

العلاقة بين الاحتمال ونظرية الفئات :



في النظرية الحديثة للاحتالات ، نعتبر عن كل النتائج الممكنة لتجربة أو مباراة كنقطة في مجال (والذي يمكن أن يكون ذو بعد واحد أو بعدين أو ثلاثة أبعاد . . . وهكذا) . ويسمى هذا المجال بمجال العينة S (أو فراغ العينة) إذا كانت S تحتوي على عدد محدود من النقاط فإنه من الممكن أن ننسب لكل نقطة رقم غير سالب يسمى بالاحتمال بحيث يكون مجموع كل هذه الأرقام المقابلة لجميع النقاط في S هو الرقم واحد . الحدث هو فئة أو مجموعة من النقاط في S كثال الحدث E_1 أو E_2 المشار إليهما في الرسم ٢-٥ ، ويسمى هذا الرسم بشل أيلر أو شكل فن *Venn diagram* أو *Euler diagram* .

الحدث $E_1 + E_2$ هو مجموعة النقاط التي إما تكون في E_1 أو E_2 أو في كليهما بينما الحدث $E_1 E_2$ مجموعة النقاط المشتركة في كل من E_1 و E_2 بهذا فإن احتمال حدث مثل E_1 هو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقط الموجودة في E_1 . كذلك فإن احتمال $E_1 + E_2$ ويمبر عنها $\Pr\{E_1 + E_2\}$ وهو مجموع الاحتمالات المرتبطة بجميع النقاط الموجودة داخل الفئة $E_1 + E_2$. إذا لم يكن هناك نقط مشتركة بين E_1 و E_2 ، بمعنى أن الأحداث متنافية ، فإن :

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$$

$$\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}.$$

الفئة $E_1 + E_2$ يرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cup E_2$ وتسمى اتحاد فئتين .

الفئة $E_1 E_2$ ويرمز لها أحيانا بالرمز $E_1 \cap E_2$ وتسمى تقاطع فئتين .

ومن الممكن تعميم ماسبق في حالة وجود أكثر من فئتين . فبدلا من $E_1 + E_2 + E_3$ و $E_1 E_2 E_3$ فإنه يمكن استخدام الرموز $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ و $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ على الترتيب .

ويستخدم الرمز الخاص ϕ على الفئة التي لاتحتوى على أى نقط ، وتسمى بالفئة الخالية والاحتمال المرتبط بالحدث المقابل لهذه الفئة هو صفر بمعنى $\Pr\{\phi\} = 0$.

إذا كان E_1 و E_2 لا يوجد بينهما نقط مشتركة ، فيمكن أن نكتب $E_1 E_2 = \phi$ والتي تعنى أن هذه الاحداث متنافية وأن $\Pr\{E_1 E_2\} = 0$.

وفي هذا الاتجاه الحديث ، فإن المتغير العشوائى يعرف كدالة معرفة على كل نقطة في مجال العينة ، على سبيل المثال ، في المسألة ٦ - ٣٧ ، المتغير العشوائى هو مجموع إحدائيات كل نقطة .

وفي الحالات التي تتكون S من عدد لانهائى من النقاط فإن الأفكار السابقة يمكن تعميمها باستخدام المفاهيم المعروفة في التفاضل والتكامل .

مسائل محلولة

القواعد الأساسية للاحتتمالات :

٦ - ١ حدد الاحتمال p أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور رقم فردى فى رمية واحدة لزهرة طاولة غير متحيزة .

من حالات ممكنة كل منها له نفس الفرصة فى الظهور ، 3 حالات (عندما يظهر على وجه الزهرة 1, 3, 5)
فى صالح الحدث . إذن $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ب) ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل فى رمية عملة غير متحيزة مرتين .

إذا كانت H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » ، فإن النتائج الممكنة فى الرمييتين هى أربعة حالات لها نفس الفرصة فى الظهور وهى HH, HT, TH, TT . والثلاث حالات الأولى فقط هى التى فى صالح الحدث . إذن $p = \frac{3}{4}$.

(ج) ظهور آس أو عشرة دينارى أو إثنين بستونى عند سحب ورقة واحدة من 52 ورقة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) عادية مخلوطة خلطاً جيداً .

الحدث يمكن أن يتحقق فى 6 حالات (آس بستونى ، آس قلب ، آس سبائى ، آس دينارى ، عشرة دينارى وإثنين بستونى) من 52 حالة لها نفس الفرصة فى الظهور . إذن $p = \frac{6}{52} = \frac{3}{26}$.

(د) ظهور مجموع 7 فى رمية واحدة لظهرتين طاولة غير متحيزتين .

كل من الوجوه الستة لأحد الزهرتين يرتبط بظهوره بكل من الوجوه الستة للزهرة الأخرى ، وهذا فإن مجموع الحالات الممكنة ظهورها والتى لها نفس الفرصة فى الظهور ، هى $6 \cdot 6 = 36$. وهذه يمكن التعبير عنها ، بـ

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), \dots, (6, 6)$$

هناك 6 حالات نحصل فيها على المجموع 7 ، وهى $(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)$ (أنظر المسألة

$$٦ - ٣٧) . \text{ إذن } p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(هـ) فى 100 رمية لعملة إذا ظهرت الصورة فى 56 رمية فإن الكتابة تظهر فى المرات الأخرى .

بما أن $44 = (100 - 56)$ صورة تظهر فى 100 رمية للعملة ، فإن الاحتمال المقدر أو الاحتمال الاعتبارى لظهور الصورة هو التكرار النسبى $44/100 = 0.44$.

٦ - ٢ تجربة مكونة من قذف عملة وزهرة طاولة . إذا كان E_1 هو الحدث « الصورة » تظهر فى رمية العملة و E_2 الحدث « 3 أو 6 » يظهران عند رمى الزهرة ، عبر بالكلمات عن معنى كل ما يلى :

(أ) \bar{E}_1 ظهور كتابة على العملة وأى رقم على الزهرة .

(ب) \bar{E}_2 1 أو 2 أو 4 أو 5 على الزهرة وأى شيء على العملة .

(ج) $E_1 E_2$ صورة على العملة و 3 أو 6 على الزهرة .

(د) $\Pr\{E_1 \bar{E}_2\}$ احتمال ظهور صورة على العملة و 1, 2, 4, 5 على الزهرة .

(هـ) $\Pr\{E_1 | E_2\}$ احتمال الصورة على العملة علماً بأن 3 أو 6 ظهرت فعلاً على الزهرة .

(و) $\Pr\{\bar{E}_1 + \bar{E}_2\}$ احتمال الكتابة على العملة 1, 2, 4, 5 على الزهرة ، أو كليهما .

٦-٣ سحب كرة بشكل عشوائي من صندوق به 6 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء ، 5 كرات زرقاء . حدد احتمال أن تكون (أ) حمراء (ب) بيضاء (ت) زرقاء (ث) ليست حمراء (ج) حمراء أو بيضاء

الحل :

اعتبر R الحدث سحب كرة حمراء ، W الحدث سحب كرة بيضاء وكذلك B الحدث سحب كرة زرقاء . إذن

$$\Pr\{R\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad (أ)$$

$$\Pr\{W\} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{15} \quad (ب)$$

$$\Pr\{B\} = \frac{5}{6+4+5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad (ج)$$

$$\Pr\{\bar{R}\} = 1 - \Pr\{R\} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad (د) \text{ باستخدام (أ)}$$

$$\Pr\{R + W\} = \frac{\text{عدد طرق اختيار كرة حمراء أو بيضاء}}{\text{عدد الطرق الكلية لاختيار كرة}} = \frac{6+4}{6+4+5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \quad (هـ)$$

طريقة أخرى :

$$\Pr\{R + W\} = \Pr\{\bar{B}\} = 1 - \Pr\{B\} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (٢) \text{ من}$$

لاحظ أن : $\Pr\{R + W\} = \Pr\{R\} + \Pr\{W\}$ بمعنى $\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15}$ وهذا مثال

للقاعدة العامة $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ وهذا صحيح في حالة ما إذا كانت E_2, E_1 أحداث متنافية .

٦-٤ قذفت زهرة غير متميزة مرتين . أوجد احتمال الحصول على 4 أو 5 أو 6 في المرة الأولى و 1 أو 2 أو 3 أو 4 في المرة الثانية .

الحل :

اعتبر E_1 الحدث « 4 أو 5 أو 6 » في الرمية الأولى ، E_2 = الحدث « 1 أو 2 أو 3 أو 4 » في

الرمية الثانية .

وبما أن كل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الأولى ترتبط بكل من الستة أوجه التي يمكن أن تقع عليها الزهرة في المرة الثانية . فإن عدد الطرق الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الظهور هي $6 \cdot 6 = 36$ طريقة كل من الطرق الثلاث التي يظهر E_1 ترتبط بكل من الطرق الأربع التي يمكن أن يظهر بها E_2 وهذا يعطى $4 \cdot 3 = 12$ طريقة يمكن أن تحدث بها E_1 و E_2 معاً أو $E_1 E_2$.

$$\text{Pr} \{E_1 E_2\} = 12/36 = 1/3 \quad \text{إذن}$$

لاحظ أن $4/6 \cdot 3/6 = 1/3$ بمعنى $\text{Pr} \{E_1 E_2\} = \text{Pr} \{E_1\} \text{Pr} \{E_2\}$ وهذه الصيغة صحيحة إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ - ٥ سحب كارتان من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 كارتاً ومخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن يكون كلاهما آس إذا كان الكارت الأول (أ) أعيد إلى المجموعة (ب) لم يعد إلى المجموعة .

الحل :

اعتبر E_1 = الحدث « آس » في السحب الأول ، E_2 = الحدث « آس » في السحب الثانية .

(أ) إذا أعيد الكارت الأول إلى المجموعة فإن E_1 و E_2 أحداث مستقلة إذن

$$\text{Pr} (\text{الكارتان المسحوبان آس}) = \text{Pr} \{E_1 E_2\} = \text{Pr} \{E_1\} \text{Pr} \{E_2\} = (4/52)(4/52) = 1/169$$

(ب) الكارت الأول يمكن أن يسحب بـ 52 طريقة ، الكارت الثاني يمكن أن يسحب بـ 51 طريقة حيث أن الكارت الأول لن يعاد . بهذا فإن عدد طرق سحب كارتين هو $52 \cdot 51$ طريقة كلها لها نفس الفرصة في الظهور .

بما أن هناك 4 طرق يمكن أن يحدث بها E_1 و 3 طرق يمكن أن يحدث بها E_2 وبهذا فإن كلا من E_1 و E_2 أو $E_1 E_2$ يمكن أن يحدثا بـ $4 \cdot 3$ طرق . إذن $\text{Pr} \{E_1 E_2\} = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

لاحظ أن $\text{Pr} \{E_2 | E_1\} = \text{Pr} \{E_2\} = 3/51$ (الكارت الثاني آس علماً بأن الكارت الأول آس) وهذه النتيجة لإيضاح للقاعدة العامة $\text{Pr} \{E_1 E_2\} = \text{Pr} \{E_1\} \text{Pr} \{E_2 | E_1\}$ في حالة ما إذا كانت E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة .

٦ - ٦ سحب ثلاث كرات على التوالي من الصندوق المشار إليه (بالمسألة ٦ - ٣) .

أوجد احتمال أن يكون سحبوا بالترتيب أحمر ، أبيض وأزرق إذا كانت كل كرة مسحوبة (أ) تعاد مرة أخرى إلى الصندوق (ب) لاتعاد .

الحل :

اعتبر R = الحدث « أحمر » في السحب الأولى W = الحدث « أبيض » في السحب الثانية ، B = الحدث « أزرق » في السحب الثالثة .

والمطلوب $\text{Pr} \{RWB\}$.

(أ) إذا أعيدت كل كرة بعد سحبها فإن R, W, B تعد أحداثاً مستقلة وهذا فإن

$$\Pr\{RWB\} = \Pr\{R\} \Pr\{W\} \Pr\{B\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right) \left(\frac{4}{6+4+5}\right) \left(\frac{5}{6+4+5}\right) = \left(\frac{6}{15}\right) \left(\frac{4}{15}\right) \left(\frac{5}{15}\right) = \frac{8}{225}$$

(ب) إذا لم تعد الكرة بعد سحبها ، فإن B, W, R تعد أحداثاً تابعة وهذا فإن

$$\begin{aligned} \Pr\{RWB\} &= \Pr\{R\} \Pr\{W|R\} \Pr\{B|WR\} = \left(\frac{6}{6+4+5}\right) \left(\frac{4}{5+4+5}\right) \left(\frac{5}{5+3+5}\right) \\ &= \left(\frac{6}{15}\right) \left(\frac{4}{14}\right) \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{4}{91} \end{aligned}$$

حيث $\Pr\{B|WR\}$ هو احتمال الشرطى للحصول على كرة زرقاء إذا كانت كرة بيضاء وكرة حمراء قد

اختيارهما بالفعل .

٦-٧ في رمية زهرة غير متميزة مرتين أوجد احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل .

الحل :

إذا كانت E_1 = الحدث « 4 » في الرمية الأولى ،

E_2 = الحدث « 4 » في الرمية الثانية .

$E_1 + E_2$ = الحدث « 4 » في الرمية الأولى أو « 4 » في الرمية الثانية أو في كليهما .

= الحدث ظهور « 4 » مرة واحدة على الأقل

المطلوب هو $\Pr\{E_1 + E_2\}$

الطريقة 1 :

حدد الطرق الممكنة والتي لها نفس الفرصة في الظهور والتي يمكن أن تقع بها الزهرتان $36 = 6.6 =$

كذلك ، عدد الطرق التي يحدث بها E_1 وليس $E_2 = 5$.

عدد الطرق التي يحدث بها E_2 وليس $E_1 = 5$.

عدد الطرق التي يحدث بها لكل من $E_1, E_2 = 1$.

بهذا فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها على الأقل أحد الحدثين E_1 أو $E_2 = 11 = 5 + 5 + 1$

بحيث $\Pr\{E_1 + E_2\} = 11/36$.

الطريقة 2 :

بما أن E_1 و E_2 ليست أحداثاً متنافية فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1 E_2\}$

كذلك ، بما أن E_1 و E_2 أحداثاً مستقلة $\Pr\{E_1 E_2\} = \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\}$

إذن $\Pr\{E_1 + E_2\} = \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\} - \Pr\{E_1\} \Pr\{E_2\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{36}$

الطريقة 3 :

$$\begin{aligned} \text{إذن } \Pr \{ \text{ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة} \} + \Pr \{ \text{عدم ظهور الرقم « 4 »} \} &= 1 \\ \Pr \{ \text{ظهور الرقم « 4 » على الأقل مرة} \} &= 1 - \Pr \{ \text{عدم ظهور الرقم « 4 »} \} \\ &= 1 - \Pr \{ \text{عدم ظهور « 4 » في الرمية الأولى وعدم ظهور « 4 » في الرمية الثانية} \} \\ &= 1 - \Pr \{ \bar{E}_1 \bar{E}_2 \} = 1 - \Pr \{ \bar{E}_1 \} \Pr \{ \bar{E}_2 \} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

٦ - ٨ كيس يحتوي على « 4 » كرات بيضاء ، « 2 » كرة سوداء ، وكيس آخر يحتوي على 3 كرات بيضاء ، 5 كرات سوداء . إذا سحب كرة من كل كيس ، أوجد احتمال :

- (أ) كلا الكرتين لونهما أبيض .
- (ب) كلا الكرتين لونهما أسود .
- (ج) كرة بيضاء وكرة سوداء .

الحل :

إذا كانت W_1 = الحدث « كرة بيضاء » من الكيس الأول ،

W_2 = الحدث « كرة بيضاء » من الكيس الثاني .

$$\Pr \{ W_1 W_2 \} = \Pr \{ W_1 \} \Pr \{ W_2 \} = \left(\frac{4}{4+2} \right) \left(\frac{3}{3+5} \right) = \frac{1}{4} \quad (\text{أ})$$

$$\Pr \{ \bar{W}_1 \bar{W}_2 \} = \Pr \{ \bar{W}_1 \} \Pr \{ \bar{W}_2 \} = \left(\frac{2}{4+2} \right) \left(\frac{5}{3+5} \right) = \frac{5}{24} \quad (\text{ب})$$

(ج) الحدث « كرة بيضاء وكرة سوداء » مثل الحدث « أما الكرة الأولى بيضاء والثانية سوداء أو الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء » بمعنى ، $W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2$. بما أن الأحداث $\bar{W}_1 W_2$ ، $W_1 \bar{W}_2$ أحداث متنافية ، فإن

$$\begin{aligned} \Pr \{ W_1 \bar{W}_2 + \bar{W}_1 W_2 \} &= \Pr \{ W_1 \bar{W}_2 \} + \Pr \{ \bar{W}_1 W_2 \} \\ &= \Pr \{ W_1 \} \Pr \{ \bar{W}_2 \} + \Pr \{ \bar{W}_1 \} \Pr \{ W_2 \} = \left(\frac{4}{4+2} \right) \left(\frac{5}{3+5} \right) + \left(\frac{2}{4+2} \right) \left(\frac{3}{3+5} \right) = \frac{11}{24} \end{aligned}$$

طريقة أخرى :

$$1 - \Pr \{ W_1 W_2 \} - \Pr \{ \bar{W}_1 \bar{W}_2 \} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{24} = \frac{11}{24} \quad \text{الاحتمال المطلوب هو}$$

٦ - ٩ لعب A و B ، 12 دوراً في مباراة الشطرنج كسب A ، 6 منها و B ، 4 وتعادلا في مرتين . وقد اتفقا أن يلعبا 3 أدواراً أخرى .

أوجد احتمال (أ) A يكسب المباريات الثلاث . (ب) انتهاء مباريتين بالتعادل (ج) A و B يكسبان بالتبادل (د) B يكسب مباراة على الأقل .

الحل :

اعتبر أن A_1, A_2, A_3 تمثل الأحداث « A يكسب » في المباراة الأولى A_1 ، في المباراة الثانية A_2 ، في المباراة الثالثة A_3 .

B_1, B_2, B_3 تمثل الأحداث « B يكسب » في المباراة الأولى B_1 ، في المباراة الثانية B_2 ، في المباراة الثالثة B_3 .

و T_1, T_2, T_3 تمثل الأحداث « التعادل » في المباراة الأولى T_1 ، في المباراة الثانية T_2 ، في المباراة الثالثة T_3 .

على ضوء الخبرة السابقة (احتمال اعتبارى) فسنفرض أن

$$\Pr \{ A \text{ يكسب مباراة} \} = 6/12 = 1/2$$

$$\Pr \{ B \text{ يكسب مباراة} \} = 4/12 = 1/3$$

$$\Pr \{ \text{انتهاء أى مباراة بالتعادل} \} = 2/12 = 1/6$$

$$\Pr \{ A \text{ يكسب جميع المباريات} \} = \Pr \{ A_1 A_2 A_3 \} = \Pr \{ A_1 \} \Pr \{ A_2 \} \Pr \{ A_3 \} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \quad (أ)$$

وذلك بافتراض أن نتيجة كل مباراة مستقلة عن نتيجة المباريات السابقة ، وهذا الفرض يبدو منطقياً (إلا لو اعتبرنا أن اللاعبين يتأثرون نفسياً بفوز أو خسارة اللاعب الآخر في المباريات السابقة) .

$$= \Pr \{ \text{انتهاء مبارتين بالتعادل} \} =$$

$$\{ \text{انتهاء المبارتين الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة بالتعادل} \} =$$

$$\begin{aligned} &= \Pr \{ T_1 T_2 T_3 \} + \Pr \{ T_1 \bar{T}_2 T_3 \} + \Pr \{ \bar{T}_1 T_2 T_3 \} \\ &= \Pr \{ T_1 \} \Pr \{ T_2 \} \Pr \{ T_3 \} + \Pr \{ T_1 \} \Pr \{ \bar{T}_2 \} \Pr \{ T_3 \} + \Pr \{ \bar{T}_1 \} \Pr \{ T_2 \} \Pr \{ T_3 \} \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = 15/216 = 5/72. \end{aligned}$$

$$\Pr \{ A \text{ و } B \text{ يكسبان بالتبادل} \} = \quad (ج)$$

$$\Pr \{ A \text{ يكسب ثم } B \text{ يكسب ثم } A \text{ يكسب أو } B \text{ يكسب ثم } A \text{ يكسب ثم } B \text{ يكسب} \} =$$

$$\begin{aligned} &= \Pr \{ A_1 B_2 A_3 + B_1 A_2 B_3 \} = \Pr \{ A_1 B_2 A_3 \} + \Pr \{ B_1 A_2 B_3 \} \\ &= \Pr \{ A_1 \} \Pr \{ B_2 \} \Pr \{ A_3 \} + \Pr \{ B_1 \} \Pr \{ A_2 \} \Pr \{ B_3 \} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 5/36. \end{aligned}$$

$$\Pr \{ B \text{ يخسر جميع المباريات} \} = 1 - \Pr \{ B \text{ يكسب مباراة على الأقل} \} \quad (د)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \Pr \{ \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 \} = 1 - \Pr \{ \bar{B}_1 \} \Pr \{ \bar{B}_2 \} \Pr \{ \bar{B}_3 \} \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 19/27. \end{aligned}$$

التوزيعات الاحتمالية :

١٠-٦ أوجد احتمال وجود أولاد وبنات في عائلات مكونة من 3 أطفال ، مفترضاً تساوى احتمال الأولاد والبنات .

الحل :

اعتبر أن B الحدث « وجود ولد في العائلة » .

G = الحدث « وجود بنت في العائلة » .

وطبقاً للفرض الخاص بتساوى الاحتمالات فإن $\Pr\{B\} = \Pr\{G\} = 1/2$

في عائلات مكونة من 3 أطفال فإن الأحداث المتنافية يمكن أن تقع حسب الاحتمالات الموضحة :

(أ) ثلاثة أولاد (BBB) . إذن $\Pr\{BBB\} = \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} = 1/8$

وقد افترضنا هنا أن ولادة ولد لن تتأثر بكون الطفل السابق ولد ، أى افترضنا أن الأحداث مستقلة .

(ب) ثلاث بنات (GGG) . إذن كما في (أ) أو بالتماثل $\Pr\{GGG\} = 1/8$

(ج) ولدان وبنت (BBG + BGB + GBB) . إذن

$$\begin{aligned} \Pr\{BBG + BGB + GBB\} &= \Pr\{BBG\} + \Pr\{BGB\} + \Pr\{GBB\} \\ &= \Pr\{B\}\Pr\{B\}\Pr\{G\} + \Pr\{B\}\Pr\{G\}\Pr\{B\} + \Pr\{G\}\Pr\{B\}\Pr\{B\} \\ &= 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8 \end{aligned}$$

(د) بنتان وولد (GGB + GBG + BGG) . كما في (ج) أو بالتماثل ، الاحتمال يساوى $3/8$.

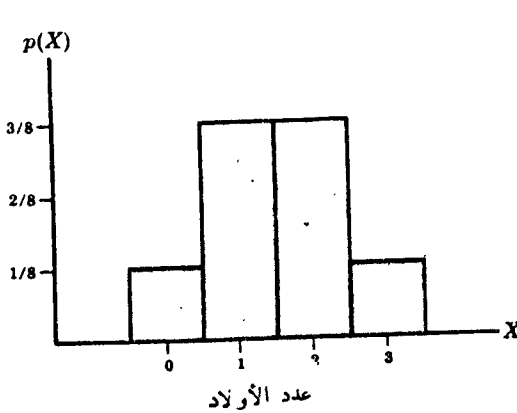
إذا أخذنا X كتغير عشوائى يعبر عن عدد الأولاد في العائلات المكونة من ثلاثة أطفال ، يعبر عن التوزيع الاحتمال كما هو موضح بالجدول

Number of boys X	0	1	2	3
Probability $p(X)$	1/8	3/8	3/8	1/8

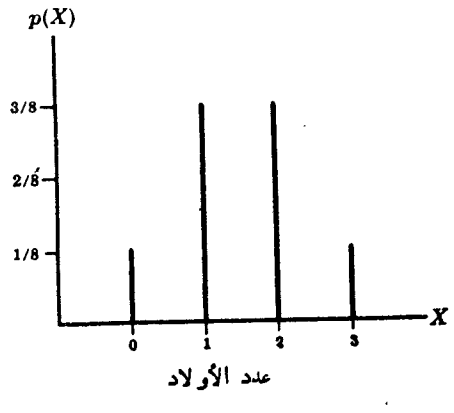
١١-٦ مثل بيانياً توزيع المسألة ٦-١٠ .

الحل :

الرسم البياني يمكن أن يمثل أما بالشكل ٦-٣ أو بالشكل ٦-٤



شكل ٦-٤



شكل ٦-٣

لاحظ أن مجموع مساحات المستطيلات في الشكل ٦-٤ أعلاه هو واحد . في الشكل السابق ، ويسمى بالمضلع الاحتمال ، نعتبر المتغير X كتغير متصل على الرغم من أن المتغير أصلاً متغير متقطع وهذه الطريقة تدمج مفيدة أحياناً . الشكل ٦-٣ ، في الناحية الأخرى ، يستعمل عندما لا نريد اعتبار المتغير كتغير متصل .

٦-١٢ المتغير المتصل X بأخذ قوماً بين الصفر و 4 ودالة كثافة احتماله هي $p(X) = \frac{1}{2} - aX$ ، حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a .

(ب) أوجد $\Pr\{1 < X < 2\}$.

الحل :

(أ) الرسم البياني لـ $p(X) = \frac{1}{2} - aX$

هو خط مستقيم كما هو موضح بالشكل

٦-٥ .

للمحصل على قيمة a ، فإننا يجب أن نتأكد من أن المساحة الكلية المحصورة بين الخط $X = 0$ ، $X = 4$ وأعلى المحور X يجب أن تساوى واحداً .

عند $X = 0$ فإن $p(X) = \frac{1}{2}$

عند $X = 4$ فإن $p(X) = \frac{1}{2} - 4a$

إذن يجب اختيار a بحيث تكون

مساحة الشكل الرباعي = 1 .

مساحة الشكل الرباعي =

$\frac{1}{2}$ (الارتفاع) (مجموع القواعد) .

$\frac{1}{2} (4) (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 4a) =$

$1 = 2(1 - 4a) =$

ومن ذلك $\frac{1}{8}a = \frac{1}{2}$ ، $4a = \frac{1}{2}$ ، $(1 - 4a) = \frac{1}{2}$.

وبما أن $(\frac{1}{2} - 4a)$ تساوى الصفر

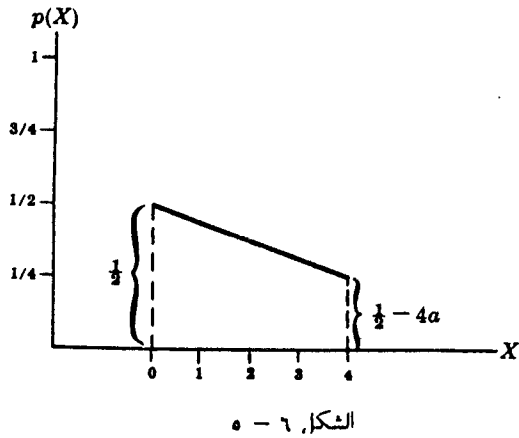
بهذا فإن الشكل البياني الصحيح هو المعطى بالشكل ٦-٦ .

(ب) الاحتمال المطلوب معبر عنه بالمساحة المظلة بين $X = 1$ ، $X = 2$ في الشكل ٦-٦ .

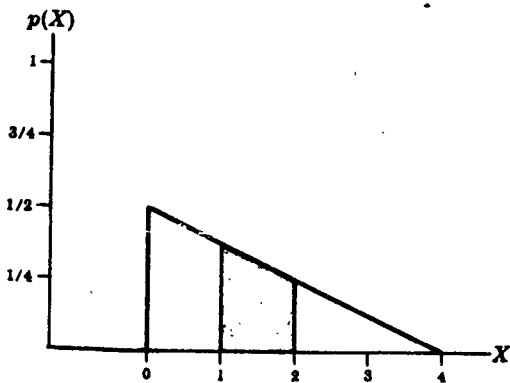
من (أ) $p(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X$ ، إذن $p(1) = \frac{3}{8}$ و $p(2) = \frac{1}{4}$ هي الاحداثيات عند $X = 1$ و $X = 2$ على الترتيب .

مساحة الشكل الرباعي المطلوب هي $\frac{1}{2}(1)(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}) = \frac{5}{16}$

وهو الاحتمال المطلوب ..



الشكل ٦-٥



الشكل ٦-٦

التوقع الرياضي :

١٣-٦ اشترى شخص ورقة يانصيب واحتمال أن يكسب الجائزة الأول وقدرها £5000 أو الثانية وقدرها £2000 هو 0.001 للأول و 0.003 للثانية ماهو السعر العادل الذي يمكن دفعه في هذه الورقة .

الحل :

$$\text{التوقع} = (£5000)(0.001) + (£2000)(0.003) = £5 + £6 = £11$$

وهو السعر العادل الذي يجب دفعه .

١٤-٦ في تجارة معينة تتضمن مخاطرة يمكن أن يكسب شخص £300 باحتمال 0.6 أو يتكبد خسارة £100 باحتمال 0.4 . حدد القيمة المتوقعة بالنسبة له .

الحل :

$$\text{التوقع} = (£300)(0.6) + (£100)(0.4) = £180 - £40 = £140$$

١٥-٦ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (ج) $E[(X - \bar{X})^2]$ للتوزيع الاحتمال التالي :

X	8	12	16	20	24
$p(X)$	1/8	1/6	3/8	1/4	1/12

الحل :

$$E(X) = \sum Xp(X) = (8)(1/8) + (12)(1/6) + (16)(3/8) + (20)(1/4) + (24)(1/12) = 16 \quad (أ)$$

وهذا يمثل متوسط هذا التوزيع

$$E(X^2) = \sum X^2p(X) = (8)^2(1/8) + (12)^2(1/6) + (16)^2(3/8) + (20)^2(1/4) + (24)^2(1/12) = 276 \quad (ب)$$

وهذا يمثل العزم الثاني حول نقطة الأصل صفر .

$$E[(X - \bar{X})^2] = \sum (X - \bar{X})^2p(X) = (8 - 16)^2(1/8) + (12 - 16)^2(1/6) + (16 - 16)^2(3/8) + (20 - 16)^2(1/4) + (24 - 16)^2(1/12) = 20$$

وهذا يمثل تباين هذا التوزيع .

١٦-٦ كيس يحتوي على 2 كرة بيضاء و 3 كرات سوداء . أربعة أشخاص A, B, C, D وحسب ترتيب أسمائهم قام كل منهم بسحب كرة والكرة المسحوبة لامتداد ثانية الأول الذي يسحب كرة بيضاء يحصل على 20 £ . حدد توقع كل منهم .

الحل :

بما أن هناك 3 كرات سواداء فقط ، فإن شخصاً منهم سيكسب في أول محاولة له . استخدم A, B, C, D للدلالة على الأحداث « A يكسب » « B يكسب » « C يكسب » « D يكسب » على الترتيب .
 $\Pr\{A \text{ wins}\} = \Pr\{A\} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. بهذا فإن توقع A £4 £10

$$\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يكسب}\} = \Pr\{AB\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{B|\bar{A}\} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

وبهذا فإن توقع B £3 =

$$\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يخسر و } C \text{ يكسب}\} = \Pr\{A\bar{B}C\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{\bar{B}|\bar{A}\} \Pr\{C|\bar{A}\bar{B}\} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

وبهذا فإن توقع C £2 =

$$\Pr\{\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\} = \Pr\{\bar{A}\} \Pr\{\bar{B}|\bar{A}\} \Pr\{\bar{C}|\bar{A}\bar{B}\} \Pr\{D|\bar{A}\bar{B}\bar{C}\} \\ = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\Pr\{A \text{ يخسر و } B \text{ يخسر و } C \text{ يخسر و } D \text{ يكسب}\} =$$

وبهذا فإن توقع D £1 =

$$\text{مراجعة : } £4 + £3 + £2 + £1 = £10 \text{ and } \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

التباديل :

١٧ - ٦ بكم طريقة يمكن ترتيب 5 من البلى المختلفة الألوان في صف ؟

الحل :

يجب أن ترتيب البليات الخمس في خمس أماكن أى :

المكان الأول يمكن شغله بأى من البليات الخمس ، بمعنى ، هناك خمس طرق لشغل المكان الأول ، فإذا فعلنا ذلك فإن هناك 4 طرق لشغل المكان الثانى . ثم بعد ذلك هناك 3 طرق لشغل المكان الثالث ، طريقتان لشغل المكان الرابع وأخيراً طريقة واحدة لشغل المكان الأخير . وبهذا

$$\text{عدد طرق ترتيب 5 بليات في صف} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$$

وبشكل عام

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \text{عدد طرق ترتيب } n \text{ من الأشياء المختلفة في صف وهذه تسمى}$$

أيضاً عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة n في كل مرة ويرمز لها بالرمز nP_n .

١٨ - ٦ كم عدد طرق إجلاس 10 أشخاص على مقعد به 4 أماكن فقط ؟

الحل :

المكان الأول يمكن شغله بأى من 10 طرق وإذا تم ذلك فإن هناك 9 طرق لشغل المكان الثانى ، 8 طرق لشغل المكان الثالث ، 7 طرق لشغل المكان الرابع .

وهذا $5040 = 10.9.8.7 =$ عدد طرق ترتيب 10 أشخاص مأخوذة بين 4 في المرة

وبشكل عام

$n(n-1) \dots (n-r+1) =$ عدد طرق ترتيب n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في المرة وهذا يسمى أيضاً عدد تبديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة ويرمز لها بالرمز ${}_nP_r$, $P(n,r)$ و $P_{n,r}$.
لاحظ أنه عندما $r = n$ فإن ${}_nP_n = n!$ كما في المسألة ٦ - ١٧ .

١٩ - ٦ أحسب (أ) ${}_8P_3$ (ب) ${}_6P_4$ (ت) ${}_{15}P_1$ (ث) ${}_3P_3$

الحل :

(أ) ${}_8P_3 = 8.7.6 = 336$ (ب) ${}_6P_4 = 6.5.4.3 = 360$ (ج) ${}_{15}P_1 = 15$ (د) ${}_3P_3 = 3.2.1 = 6$

٢٠ - ٦ من المطلوب إجلال 5 رجال و 4 نساء في صف بحيث يشغل النساء الأماكن ذات الأرقام الزوجية . ماهو عدد الترتيب الممكنة ؟

الحل :

عدد طرق إجلال الرجال هو ${}_5P_5$ والنساء ${}_4P_4$. كل ترتيب للرجال يمكن أن يرتبط بكل ترتيب للنساء .
هذا فإن عدد الترتيب الممكنة $= {}_5P_5 \cdot {}_4P_4 = 5! 4! = (120)(24) = 2880$

٢١ - ٦ كم من الأعداد المكونة من 4 أرقام يمكن تكوينها من الـ 10 أرقام 0, 1, 2, 3, ..., 9 إذا كانت :

(أ) يسمح بتكرار الرقم

(ب) غير مسموح بتكرار الرقم

(ج) الرقم الأخير يجب أن يكون صفراً وغير مسموح بتكرار الأرقام .

الحل :

(أ) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به) الرقم الثانى ، الرقم الثالث والرابع يمكن أن يكون أى رقم من الأرقام العشرة . إذن $9000 = 10. 10. 10. 9$ رقم يمكن تكوينهم .

(ب) الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (حيث أن الصفر غير مسموح به)

الرقم الثانى يمكن أن يكون أى رقم من 9 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانة الأولى)

الرقم الثالث يمكن أن يكون أى رقم من 8 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانتين الأولى والثانية) .

الرقم الرابع يمكن أن يكون أى رقم من 7 أرقام (أى رقم ماعداً الذى ظهر فى الخانات الثلاث الأولى)

إذن $4536 = 9.9.8.7$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة أخرى :

الرقم الأول يمكن أن يكون أى رقم من 9 الخانات الثلاث الأخرى يمكن اختيارها بـ ${}_9P_3$ طريقة .
إذن ${}_9P_3 = 9.8.7 = 4536$ عدد يمكن تكوينه .

(ج) الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق ، الثاني بـ 8 طرق والثالث بـ ${}_8P_3$ طرق .
إذن $9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

طريقة أخرى :

الرقم الأول يمكن اختياره بـ 9 طرق والرقان التاليان يمكن اختيارهما بـ ${}_8P_2$ طرق .
إذن $9.8.7 = 504$ عدد يمكن تكوينه .

٦ - ٢٢ أربعة كتب مختلفة في الرياضة ، ستة كتب مختلفة في الطبيعة وكتابان مختلفان في الكيمياء مطلوب ترتيبهما على رف .
ماهى عدد الترتيب المختلفة والممكنة إذا .

(أ) توضع الكتب المتعلقة بنفس الموضوع متجاورة .

(ب) كتب الرياضة فقط هى التى يجب أن توضع متجاورة .

الحل :

(أ) عدد طرق ترتيب كتب الرياضة فيما بينها هى ${}_4P_4 = 4!$ طريقة ، وعدد طرق ترتيب كتب الطبيعة هو

${}_6P_6 = 6!$ طريقة وكتب الكيمياء ${}_2P_2 = 2!$ طريقة وعدد طرق ترتيب المجموعات الثلاث هو

$${}_3P_3 = 3!$$

بهذا فإن عدد الترتيب الممكنة هو $3! 2! 6! 4! = 207 360$

(ب) يمكن اعتبار كتب الرياضة الأربعة ككتاب واحد كبير . بهذا يكون لدينا 9 كتب والتى يمكن ترتيبها

بـ ${}_9P_9 = 9!$ طريقة . فى كل من هذه الطرق توضع كتب الرياضة معاً . ويكون عدد طرق ترتيب كتب الرياضة

فيما بينهما هو ${}_4P_4 = 4!$ طريقة ، إذن .

$$9! 4! = 8709 120 = \text{عدد الترتيب المطلوبة}$$

٦ - ٢٣ رتب فى صف خساً من البلى الأحمر واثنين من البلى الأبيض وثلاثاً من البلى الأزرق . إذا كان البلى من نفس اللون

لايمكن تميزه من بعض ، فاهو عدد الترتيب المختلفة الممكنة :

الحل :

نفترض أن هناك P من الترتيب المختلفة . بفرض P فى عدد طرق ترتيب

(أ) البلى الخمس الأحمر فيما بينها .

(ب) إثنان من البلى الأبيض فيما بينها .

(ج) الثلاثة من البلى الأزرق فيما بينها .

(بمعنى ضرب P في $3! 2! 5!$) ، ثم نحصل على عدد طرق ترتيب 10 من البلى إذا كانت كل بلية متميزة عن الأخرى وهى 10! .

$$P = 10! / (5! 2! 3!) \text{ و } P = 10! \text{ (5!2!3!)}$$

وبشكل عام ، عدد طرق الترتيب المختلفة لـ n من الأشياء مقسمة إلى n_1 من الأشياء المتشابهة n_2 من الأشياء

المتشابهة n_k, \dots من الأشياء المتشابهة هى $\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ حيث $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

٢٤ - ٦ بكم طريقة يمكن أن يجلس 7 من الأشخاص حول مائدة دائرية إذا :

(أ) يمكن أن يجلسوا في أى مكان . (ب) شخصان معينان يجب أن لا يجلسوا متجاورين .

الحل :

(أ) اعتبر أن واحداً منهم يمكن أن يجلس في أى مكان . وهذا فإن الـ 6 أشخاص الباقين يمكن أن يجلسوا : $6! = 720$ طريقة ، وهو عدد طرق ترتيب 7 أشخاص في دائرة .

(ب) اعتبر أن الشخصين المعينين كشخص واحد . وهذا سيكون هناك 6 أشخاص يمكن ترتيبهم : 5! ولكن الشخصين اللذين اعتبرناهما كشخص واحد يمكن ترتيبهما فيما بينهم بـ 2! طريقة . وهذا فإن عدد طرق ترتيب 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث يجلس شخصان معينان معاً $= 240 = 5! 2!$ باستخدام (أ) ، عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بحيث أن شخصين معينين لا يجلسان بجوار بعضهما هو $480 = 720 - 240 =$ طريقة .

التباديل :

٢٥ - ٦ ماهى عدد الطرق التي يمكن أن يقسم بها 10 أشياء إلى مجموعتين مكونتين من 4 و 6 أشياء على الترتيب ؟

الحل :

هذه مثل عدد ترتيب 10 من الأشياء حيث 4 أشياء متشابهة فيما بينهما و 6 أشياء أخرى متشابهة فيما بينها .

$$\frac{10!}{4! 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \text{ هى النتيجة ٢٣ - ٦ من المسألة}$$

هذه المشكلة مكافئة لمشكلة الحصول على عدد اختيارات 4 من 10 من الأشياء (أو 6 من 10 من الأشياء) وذلك بدون أهمية لترتيب الاختيار .

وبشكل عام عدد اختيارات r من n من الأشياء ، ويسمى عدد تباديل n من الأشياء مأخوذة r في المرة يرمز لها بالرمز $\binom{n}{r}$ ، $C(n, r)$ ، nC_r ويعطى بالصيغة .

$$nC_r = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} = \frac{nP_r}{r!}$$

٦ - ٢٦ احسب (أ) ${}_7C_4$ (ب) ${}_6C_5$ (ج) ${}_4C_4$

الحل :

$${}_7C_4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \quad (\text{أ})$$

$${}_6C_5 = \frac{6!}{5!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5!} = 6, \text{ or } {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6 \quad (\text{ب})$$

(ج) ${}_4C_4$ هو عدد اختيارات 4 أشياء مأخوذة كلها مرة واحدة .

$$\text{إذن } {}_4C_4 = 1$$

$$\text{لاحظ أن } {}_4C_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1 \text{ إذا عرفنا } 0! = 1$$

٦ - ٢٧ كم طرق اختيار لجنة مكونة من 5 من 9 أشخاص ؟

الحل :

$${}_9C_5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$$

٦ - ٢٨ من بين 5 من علماء الرياضة و 7 من علماء الطبيعة ، المطلوب تشكيل لجنة تكون من 2 من علماء الرياضة و 3 من علماء الطبيعة .

بكم طريقة يمكن أن يتم ذلك إذا ،

(أ) أى عالم رياضى أو عالم طبيعى يمكن دخوله اللجنة .

(ب) عالم طبيعة معين يجب أن يكون ضمن اللجنة .

(ج) إثنان معينان من علماء الرياضة يجب ألا يكونا ضمن اللجنة .

الحل :

(أ) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هي ${}_5C_2$ وطريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء

الطبيعة هي ${}_7C_3$ طريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}_5C_2 \cdot {}_7C_3 = 10 \cdot 35 = 250$$

(ب) عدد طرق اختيار 2 من بين 5 من علماء الرياضة هي ${}_5C_2$ وطريقة عدد طرق اختيار عالمين إضافيين من علماء

الطبيعة من بين 6 علماء هي ${}_6C_2$ طريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}_5C_2 \cdot {}_6C_2 = 10 \cdot 15 = 150$$

(ج) عدد طرق اختيار 2 من بين 3 من علماء الرياضة هي ${}_3C_2$ وطريقة ، عدد طرق اختيار 3 من بين 7 من علماء

الطبيعة هي ${}_7C_3$ طريقة .

$$\text{عدد طرق الاختيار الممكنة} = {}_3C_2 \cdot {}_7C_3 = 3 \cdot 35 = 105$$

٢٩-٦ طفل معه خمس عملات كل عملة لها قيمة مختلفة . ماهو عدد مجموع النقود المختلفة التي يمكن له تكوينها .
الحل :

بما أن كل عملة يمكن التعامل معها بطريقتين ، أما أن تختار أولا تختار . وبما أن كلا من الطريقتين التي يتم بهما التعامل مع العملة ترتبط بطريقتين للتعامل مع كل عملة من العملات الأخرى . فإن عدد طرق التعامل مع العملات الخمس هي 2^5 طريقة . ولكن لا 2^5 طريقة تتضمن الحالة التي لا تأخذ فيها أى عملة . وبهذا يكون الرقم المطلوب لجميع النقود $2^5 - 1 = 31$.

طريقة أخرى :

من الممكن اختيار 1 من 5 من العملات ، 2 من 5 عملات ، ... ، 5 من 5 عملات . وبهذا فإن عدد مجاميع النقود المطلوب هو

$${}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

وبشكل عام ، ولأى قيمة صحيحة موجبة n و ${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n = 2^n - 1$

٣٠-٦ من 7 حروف ساكنة و 5 حروف متحركة ، ماهو عدد الكلمات المكونة من 4 حروف ساكنة مختلفة و 3 حروف متحركة مختلفة ؟ ليس من الضروري أن تكون الجملة لها معنى .

الحل :

عدد طرق اختيار 4 حروف ساكنة مختلفة هي ${}_7C_4$ ، عدد طرق اختيار 3 حروف متحركة مختلفة هي ${}_3C_3$.
طريقة . وال 7 حروف المختلفة (4 ساكنة 3 متحركة) يمكن ترتيبها بين أنفسهم بعدد طرق ${}_7P_7 = 7$.

$$\text{إذن} \quad {}_7C_4 \cdot {}_3C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1764000 = \text{عدد الكلمات}$$

تقريب ستيرلينج لـ $n!$:

٣١-٦ احسب $50!$.

الحل :

لقيم n الكبيرة

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

وبهذا فإن

$$50! \sim \sqrt{2\pi(50)} 50^{50} e^{-50} = S$$

ولحساب قيمة S نستخدم اللوغاريتمات للأساس 10 . إذن

$$\begin{aligned} \log S &= \log(\sqrt{100\pi} 50^{50} e^{-50}) = \frac{1}{2} \log 100 + \frac{1}{2} \log \pi + 50 \log 50 - 50 \log e \\ &= \frac{1}{2} \log 100 + \frac{1}{2} \log 3.142 + 50 \log 50 - 50 \log 2.718 \\ &= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0.4972) + 50(1.6990) - 50(0.4343) = 64.4836 \end{aligned}$$

ومنها $S = 3.04 \times 10^{64}$ ، وهو عدد له 65 رقم .

الاحتمال والتحليل التوافقي :

٦-٢٢ صندوق يحتوي على 8 كرات حمراء ، 3 بيضاء و 9 كرات زرقاء . إذا سحبت 3 كرات عشوائياً ، أوجد احتمالات . (أ) الكرات الثلاث الحمراء . (ب) 2 حمراء و كرة بيضاء . (ج) على الأقل كرة بيضاء . (د) كرة من كل لون تم سحبها . (هـ) الكرات سحبت بالترتيب حمراء ، بيضاء ، زرقاء .

الحل :

(أ) الطريقة الأولى :

اعتبر R_1, R_2, R_3 تعبر عن الأحداث R_1 كرة حمراء في السحبة الأولى ، R_2 كرة حمراء في السحبة الثانية ، R_3 كرة حمراء في السحبة الثالثة . إذن R_1, R_2, R_3 تعبر عن الحدث « كل الكرات المسحوبة حمراء » .

$$\Pr\{R_1 R_2 R_3\} = \Pr\{R_1\} \Pr\{R_2 | R_1\} \Pr\{R_3 | R_1 R_2\} = (8/20)(7/19)(6/18) = 14/285$$

الطريقة الثانية :

$$\frac{{}_8C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{14}{285} = \frac{\text{عدد طرق اختيار 3 من 8 من الكرات الحمراء}}{\text{عدد طرق اختيار 3 من 20 من الكرات}} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\Pr\{(\text{الكرات الثلاث البيضاء})\} = \frac{{}_3C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{1}{1140} \quad , \quad (أ) \quad ,$$

الطريقة الأولى المشار إليها في (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

$$\Pr\{ \text{كرتان حمراء و كرة بيضاء} \} = \quad (ج)$$

$$= \frac{(\text{اختيار 2 من 8 من الكرات الحمراء}) (\text{اختبار كرة من 3 كرات بيضاء})}{\text{عدد اختيار 3 كرات من 20 كرة}} =$$

$$\frac{{}_8C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{7}{95}$$

$$\Pr\{ \text{عدم وجود كرات بيضاء} \} = \frac{{}_{17}C_3}{{}_{20}C_3} = \frac{34}{57} \quad (د)$$

$$\Pr\{ \text{وجود كرة بيضاء على الأقل} \} = 1 - \frac{34}{57} = \frac{23}{57} \quad \text{إذن}$$

$$\Pr\{ \text{سحب كرة من كل لون} \} = \frac{{}_8C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_9C_1}{{}_{20}C_3} = \frac{18}{95} \quad (هـ)$$

$$\Pr\{ \text{سحب كرة من كل لون} \} = 1/3! \Pr\{ \text{الكرات المسحوبة بالترتيب أحمر ، أبيض ، أزرق} \}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{18}{95} \right) = \frac{3}{95}$$

باستخدام (و) .

$$\Pr\{R_1 W_2 B_3\} = \Pr\{R_1\} \Pr\{W_2 | R_1\} \Pr\{B_3 | R_1 W_2\} = (8/20)(3/19)(9/18) = 3/95 \quad \text{طريقة أخرى :}$$

٦ - ٣٣ بحيث خمسة كروت من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت مزوجة مزجاً جيداً . أوجد احتمال الحصول على (أ) 4 آس (ب) 4 آس و كارت ملك (ج) 3 عليها العدد 10 و 2 ولد (د) 9 ، 10 ، ولد ، الملكة ، الملك بأى ترتيب (هـ) 3 من نفس المجموعة و 2 من مجموعة أخرى (و) الحصول على آس على الأقل .

الحل :

$$\Pr \{ 4 \text{ آس} \} = \frac{{}^4C_4 \cdot {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{54145} \quad (\text{أ})$$

$$\Pr \{ 4 \text{ آس} , 1 \text{ ملك} \} = \frac{{}^4C_4 \cdot {}^1C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{649740} \quad (\text{ب})$$

$$\Pr \{ 3 \text{ عشرة} , 2 \text{ ولد} \} = \frac{{}^3C_3 \cdot {}^2C_2}{{}^{52}C_5} = \frac{1}{108290} \quad (\text{ج})$$

$$\Pr \{ 10 , 9 \text{ ولد} , \text{ملكة وملك في أى ترتيب} \} = \frac{{}^2C_2 \cdot {}^1C_1 \cdot {}^1C_1 \cdot {}^1C_1 \cdot {}^1C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{6}{162435} \quad (\text{د})$$

$$\Pr \{ 3 \text{ من أى مجموعة} , 2 \text{ من مجموعة أخرى} \} = \frac{{}^3C_3 \cdot {}^3C_2}{{}^{52}C_5} = \frac{429}{4165} \quad (\text{هـ})$$

حيث أن هناك 4 طرق لاختيار المجموعة الأولى و 3 طرق لاختيار المجموعة الثانية .

$$\Pr \{ \text{عدم الحصول على آس} \} = \frac{{}^{48}C_5}{{}^{52}C_5} = \frac{35673}{54145} \quad (\text{و})$$

$$\Pr \{ \text{الحصول على آس على الأقل} \} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}$$

٦ - ٣٤ أوجد احتمال ظهور الرقم 6 ثلاث مرات في 5 رميات لزهرة طاولة متوازنة .

الحل :

اعتبر أن رمية زهرة الطاولة يمكن تمثيلها كخمس مسافات ----- في كل مسافة سيكون لدينا أما الحدث 6 أو الحدث ليس 6 ($\bar{6}$) . على سبيل المثال ثلاثة من الأرقام 6 ورقان من غير الأرقام 6 يمكن حلوثها كالاتى :

6 6 6 6 6 or 6 6 6 6 6

وهكذا احتمال حدث مثل 6 6 6 6 6 هو

$$\Pr \{ 6 6 6 6 6 \} = \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} \Pr \{ 6 \} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

كذلك $\Pr \{ 6 6 6 6 6 \} = \left(\frac{1}{6}\right)^5$ ، وهكذا ، لكل الأحداث المكونة من ثلاثة من الرقم 6 ، ورقان ليسا 6 . ولكن هناك ${}^5C_3 = 10$ من هذه الأحداث وهذه الأحداث أحداث متنافية . وهذا فإن الاحتمال المطلوب هو

$$\Pr \{ 6 6 6 6 6 \text{ or } 6 6 6 6 6 \text{ or etc.} \} = {}^5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{10}{36}$$

وبشكل عام ، إذا كان $p = \Pr\{E\}$ ، $q = \Pr\{\bar{E}\}$ ، فإنه باستخدام نفس المبررات التي ذكرناها فيما سبق فإن احتمال الحصول على E 's X بالضبط من N محاولة هو

$${}_nC_x p^x q^{n-x}$$

٣٥-٦ في مصنع لوحظ أن متوسط الوحدات التالفة بالنسبة لمواصفات معينة في إنتاج آلة معينة لإنتاج المسامير هو 20% إذا اختير 10 مسامير عشوائياً من الإنتاج اليومي لهذه الآلة ، أوجد احتمال وجود :

(أ) 2 بالضبط تالفين (ب) 2 أو أكثر تالفين (ج) أكثر من 5 من الإنتاج تالف .

الحل :

$$\Pr\{2 \text{ عدد المسامير التالفة}\} = {}_{10}C_2 (0.2)^2 (0.8)^8 = 45(0.04)(0.1678) = 0.0302 \quad (أ)$$

باستخدام مبررات مماثلة للمسألة ٦ - ٣٤ .

(ب) $\Pr\{\text{عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر}\}$

$$= 1 - \Pr\{0 \text{ عدد المسامير التالفة}\} - \Pr\{1 \text{ عدد المسامير التالفة}\}$$

$$= 1 - {}_{10}C_0 (0.2)^0 (0.8)^{10} - {}_{10}C_1 (0.2)^1 (0.8)^9$$

$$= 1 - (0.8)^{10} - 10(0.2)(0.8)^9 = 1 - 0.1074 - 0.2684 = 0.6242$$

(ج)

$\Pr\{5 \text{ عدد المسامير التالفة أكثر من}\} =$

$$\Pr\{6 \text{ تالف}\} + \Pr\{7 \text{ تالف}\} + \Pr\{8 \text{ تالف}\} + \Pr\{9 \text{ تالف}\} + \Pr\{10 \text{ تالف}\}$$

$$= {}_{10}C_6 (0.2)^6 (0.8)^4 + {}_{10}C_7 (0.2)^7 (0.8)^3 + {}_{10}C_8 (0.2)^8 (0.8)^2$$

$$+ {}_{10}C_9 (0.2)^9 (0.8) + {}_{10}C_{10} (0.2)^{10}$$

$$= 0.00637.$$

٣٦-٦ في 1000 عينة كل عينة مكونة من 10 مسامير مأخوذة حسب بيانات المسألة السابقة ، كم من هذه العينة نتوقع أن نجد

(أ) عدد المسامير التالفة 2 بالضبط

(ب) عدد المسامير التالفة 2 أو أكثر

(ج) عدد المسامير التالفة أكثر من 5 ؟

الحل :

$$(أ) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٣٥} \quad (1000)(0.0302) = 30 \quad (أ)$$

$$(ب) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٣٥} \quad (1000)(0.6242) = 624 \quad (ب)$$

$$(ج) \quad = \text{العدد المتوقع من المسألة ٦-٣٥} \quad (1000)(0.00637) = 6 \quad (ج)$$

مجال العينة وأشكال ايلر :

٦ - ٣٧ (أ) كون مجال العينة لرمية زهرق طاولة

غير متحيزتين مرة واحدة .

(ب) من مجال العينة أوجد احتمال أن

المجموع في رمية زهرق طاولة هو

إما 7 أو 11 .

الحل :

(أ) يتكون مجال العينة من مجموعة النقطة

المبينة في الشكل ٦ - ٧ . الاحداث

الأول لكل نقطة بين العدد الموضح

على إحدى الزهرتين والأحداث الثاني

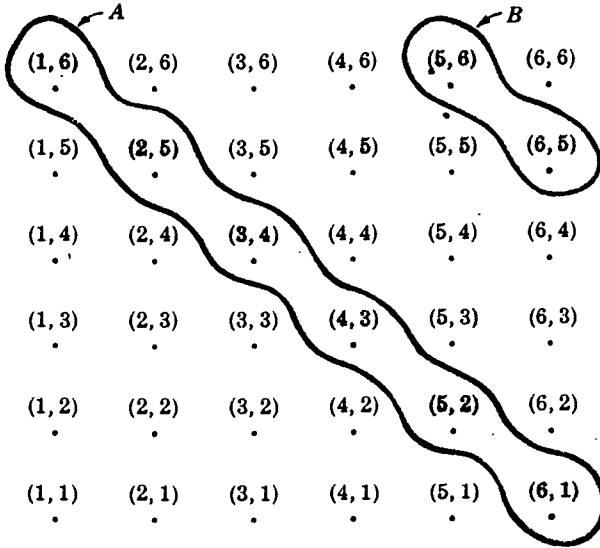
يبين العدد الموضح على الزهرة الأخرى .

العدد الكلي للنقط هو 36 ونخصص

لكل نقطة احتمالاً قدره $1/36$.

وبهذا يكون مجموع احتمالات جميع

النقط في المجال هو 1 .



شكل ٦ - ٧

(ب) مجموع النقط المقابلة للأحداث « المجموع 7 » مشار إليها بـ A و « المجموع 11 » مشار إليها بـ B .

$$\Pr\{A\} = 6/36 = \text{مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة في } A$$

$$\Pr\{B\} = 2/36 = \text{مجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نقطة في } B$$

$$\Pr\{A + B\} = \{ \text{مجموع احتمالات النقط الموجودة في } A \text{ أو في } B \text{ أو في كليهما} \} = (6 + 2) / 36 = 8/36 = 2/9$$

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$$

نظراً لأن A و B ليس بينهما نقط مشتركة ، بمعنى أنهما أحداث متنافية .

٦ - ٣٨ باستخدام مجال عينة ، وضح أن

(أ)

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\} \quad (\text{ب})$$

الحل :

(أ) اعتبر أن A و B مجموعتان من النقط بينهما نقط مشتركة ممثلة بـ AB كما في الشكل ٦ - ٨ .

تتكون A من AB و $\bar{A}B$ بينما B تتكون من AB و $\bar{A}B$.

المجموع الكلى للنقط في $A + B$ (أما في A أو في B أو في كليهما)

= المجموع الكلى للنقط في A + المجموع الكلى للنقط في B - المجموع الكلى للنقط في AB .

وبما أن احتمال أى حدث أو فئة = مجموع الاحتمالات المرتبطة بنقط الفئة فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$

طريقة أخرى :

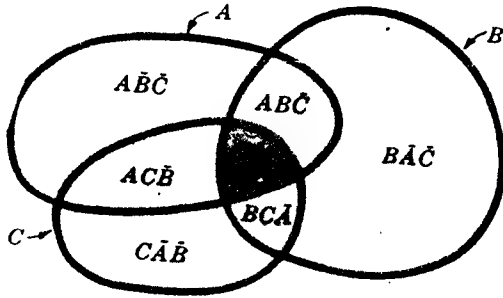
اعتبر أن $A - AB$ تمثل مجموعة النقط في A والتي ليست في B (مثل $\bar{A}\bar{B}$) فإن $A - AB$ ،

تعد أحداثاً متنافية (بمعنى أنه لا يوجد نقط مشتركة بينهما) . كذلك

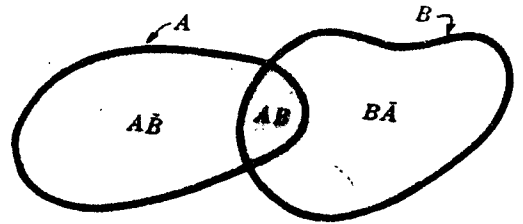
$$\Pr\{A - AB\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\}.$$

وبهذا فإن

$$\Pr\{A + B\} = \Pr\{A - AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} + \Pr\{B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{AB\}$$



شكل ٦ - ٩



شكل ٦ - ٨

(ب) اعتبر أن A, B, C مجموعات ثلاث من النقط كما هو موضح بالشكل ٦ - ٩ الرمز ABC يعنى النقط الموجودة في A, B معاً وغير الموجودة في C والرموز الأخرى لها معان مشابهة .

من الممكن اعتبار أن النقط الموجودة أما في A أو B أو C أنها النقط المتضمنة في الـ 7 مجموعات المتنافية

بالشكل ٦ - ٩ أعلاه ، منها 4 مجموعات مظلة و 3 غير مظلة . الاحتمال المطلوب هو .

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} + \Pr\{\bar{A}B\bar{C}\} + \Pr\{\bar{A}\bar{B}C\} + \Pr\{ABC\} + \Pr\{A\bar{B}C\} + \Pr\{\bar{A}BC\} + \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} + \Pr\{C\bar{A}B\} + \Pr\{CA\bar{B}\} + \Pr\{CAB\}$$

والآن للحصول على $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ، على سبيل المثال ، فإننا نحذف النقطة المشتركة بين A و B وكذلك

بين A و C ، ولكن هذا يؤدي إلى أن نحذف النقطة المشتركة بين A, B, C مرتين .

$$A\bar{B}\bar{C} = A - AB - AC + ABC \quad \text{وبهذا فإن}$$

$$\Pr\{A\bar{B}\bar{C}\} = \Pr\{A\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

وبنفس الطريقة ، نجد أن

$$\begin{aligned} \Pr\{B\bar{C}\bar{A}\} &= \Pr\{B\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{BA\} + \Pr\{BCA\} \\ \Pr\{C\bar{A}\bar{B}\} &= \Pr\{C\} - \Pr\{CA\} - \Pr\{CB\} + \Pr\{CAB\} \\ \Pr\{BC\bar{A}\} &= \Pr\{BC\} - \Pr\{ABC\} \\ \Pr\{CA\bar{B}\} &= \Pr\{CA\} - \Pr\{BCA\} \\ \Pr\{AB\bar{C}\} &= \Pr\{AB\} - \Pr\{CAB\} \\ \Pr\{ABC\} &= \Pr\{ABC\} \end{aligned}$$

بتجميع هذه المعادلات السبع مع الأخذ في الاعتبار أن $\Pr\{AB\} = \Pr\{BA\}$ فأننا نحصل على

$$\Pr\{A + B + C\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} + \Pr\{C\} - \Pr\{AB\} - \Pr\{BC\} - \Pr\{AC\} + \Pr\{ABC\}$$

٣٩ - ٦ في بحث شمل 500 طالب يدرسون مادة أو أكثر من المواد ، الجبر ، الطبيعة ، الإحصاء خلال فصل دراسي وجدت الأرقام التالية للطلبة الذين يدرسون المواد الموضحة .

جبر وطبيعة 83	الجبر 329
جبر وإحصاء 217	طبيعة 186
طبيعة وإحصاء 63	إحصاء 295

كم عدد الطلبة الذين يدرسون

(أ) كل المواد الثلاث (ب) يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء

(ج) يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر

(د) يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(هـ) يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة

(و) يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء

الحل :

اعتبر أن A ترمز لمجموعة الطلبة الذين يدرسون الجبر ، و A يرمز لعدد الطلبة المنتمين لهذه المجموعة . كذلك

اعتبر أن B يرمز لعدد الطلبة الذين يدرسون الطبيعة ، C عدد الطلبة الذين يدرسون الإحصاء .

بهذا فإن $(A + B + C)$ يرمز للعدد الذين يدرسون أما الجبر أو الطبيعة أو الإحصاء أو أى توافق منها ،

(AB) ترمز لعدد الذين يدرسون كلا من الجبر والطبيعة . وهكذا . وكما في المثال السابق ، فإن

$$(A + B + C) = (A) + (B) + (C) - (AB) - (BC) - (AC) + (ABC)$$

(أ) بالتمويض بالأرقام المغطاة في هذه الصيغة فإننا نجد

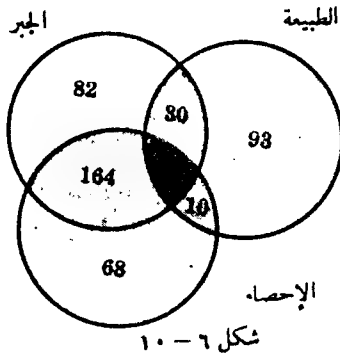
$$500 = 329 + 186 + 295 - 83 - 63 - 217 + (ABC)$$

أو $(ABC) = 53$ ، وهو عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر والطبيعة والإحصاء . لاحظ أن الاحتمال (الاعتباري) لأن يدرس الطالب المواد الثلاث هو $53/500$.

(ب) للحصول على المعلومات المطلوبة من الملائم تكوين

شكل أيلر يبين عدد الطلبة الذين ينتمون لكل

مجموعة .



تبدأ من حقيقة أن هناك 53 طالب يدرسون

المواد الثلاث ، ومنه نستنتج أن عدد الطلبة الذين

يدرسون الجبر والإحصاء ولا يدرسون الطبيعة هو

$164 = 217 - 53$ وهو الموضح بالرسم

١٠-٦ . ومن البيانات المغطاة فإننا نحصل

على الأرقام الموضحة .

من البيانات المغطاة، عدد الطلبة الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الإحصاء هو $329 - 217$ أو من

الشكل ١٠-٦ ، $82 + 30 = 112$.

(ج) عدد الذين يدرسون الطبيعة ولا يدرسون الجبر $93 + 10 = 103$.

(د) عدد الذين يدرسون الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $68 + 164 = 232$.

(هـ) عدد الذين يدرسون الجبر أو الإحصاء ولا يدرسون الطبيعة $82 + 164 + 68 = 314$.

(و) عدد الذين يدرسون الجبر ولا يدرسون الطبيعة أو الإحصاء $82 =$

مسائل إضافية

المبادئ الأساسية للاحتتمالات :

١٠-٦ أوجد الاحتمال p ، أو تقدير له ، لكل من الأحداث التالية :

(أ) ظهور ملك ، آس ، ولد سباق ، أو بنت ديناري عند سحب ورقة واحدة من مجموعة أوراق لعب (كوتشينة) مخلوطة خلطاً جيداً .

(ب) ظهور مجموع 8 في رمية واحدة لزهرتي طاولة غير متحيزتين .

(ج) وجود سمار غير قالف من 600 سمار تم اختيارها ووجد أن بها 12 سمار قالف .

- (د) ظهور مجموع 7 أو 11 في رمية واحدة لزهرق طاولة غير متحيزتين .
 (هـ) ظهور الصورة مرة على الأقل في رمية عملة متوازنة ثلاث مرات .
 ج : (أ) $5/26$ (ب) $5/36$ (ج) 0.98 (د) $2/9$ (هـ) $7/8$.

٦-٤١ في تجربة مكونة من سحب ثلاثة كروت على التوالي من مجموعة أوراق لعب عادية مخلوطة خلطاً جيداً . اعتبر الحدث « ملك » في السحبة الأولى ، E_2 الحدث « ملك » في السحبة الثانية E_3 الحدث « ملك » في السحبة الثالثة . عبر بالكلمات على كلى مما يلي :

- (أ) $\Pr\{E_1\bar{E}_2\}$ (ب) $\Pr\{E_1 + E_2\}$ (ج) $\bar{E}_1 + \bar{E}_2$
 (د) $\Pr\{E_3|E_1\bar{E}_2\}$ (هـ) $\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3$ (و) $\Pr\{E_1E_2 + \bar{E}_2E_3\}$.
 ج : (أ) احتمال ظهور الملك في السحبة الأولى وعدم ظهور الملك في السحبة الثانية .
 (ب) احتمال ظهور الملك أما في السحبة الأولى أو في السحبة الثانية أو كليهما .
 (ج) عدم ظهور الملك لا في السحبة الأولى ولا في السحبة الثانية ولا في كليهما معاً .
 (د) احتمال ظهور الملك في السحبة الثالثة علماً بأن الملك قد ظهر في السحبة الأولى ولم يظهر في السحبة الثانية .
 (هـ) عدم ظهور الملك في أى من السحبات الثلاث .
 (و) احتمال ظهور الملك في كل من السحبتين الأولى والثانية معاً أو عدم ظهور الملك في السحبة الثانية مع ظهوره في السحبة الثالثة .

٦-٤٢ سحبت كرة عشوائياً من صندوق به 10 كرات حمراء ، 30 كرة بيضاء ، 20 كرة زرقاء و 15 كرة برتقالية . أوجد احتمال أن تكون الكرة :

- (أ) برتقالية أو حمراء . (ب) ليست حمراء أو زرقاء . (ج) ليست زرقاء .
 (د) بيضاء . (هـ) حمراء أو بيضاء أو زرقاء .
 ج : (أ) $1/3$ (ب) $3/5$ (ج) $11/15$ (د) $2/5$ (هـ) $4/5$

٦-٤٣ سحبت كرتان على التوالي من الصندوق الموضح في المسألة السابقة ، ويتم إعادة الكرة المسحوبة بعد كل سحبة . أوجد احتمال أن تكون :

- (أ) الكرتان بيضاء . (ب) الأولى حمراء والثانية بيضاء . (ج) لا توجد بينهما كرة برتقالية .
 (د) الكرتان إما كلاهما حمراء أو كلاهما بيضاء أو إحداها حمراء والأخرى بيضاء .
 (هـ) الكرة الثانية ليست زرقاء . (و) الكرة الأولى برتقالية .
 (ز) على الأقل واحدة زرقاء . (ح) على الأكثر واحدة حمراء .
 (ط) الأولى بيضاء ولكن الثانية ليست بيضاء . (ى) كرة واحدة فقط حمراء .
 ج : (أ) $4/25$ (ب) $4/75$ (ج) $16/25$ (د) $64/225$ (هـ) $11/15$ (و) $1/5$ (ز) $104/225$
 (ح) $221/225$ (ط) $6/25$ (ى) $52/225$.

٦ - ٤٤ حل المسألة السابقة إذا كانت الكرة التى تسحب لا تعاد مرة أخرى .

ج : (أ) 29/185 (ب) 2/37 (ج) 118/185 (د) 52/185 (هـ) 11/15 (و) 1/5
(ز) 86/185 (ح) 182/185 (ط) 9/37 (ى) 26/111 .

٦ - ٤٥ فى رميتين لزهرق طاولة متوازنتين أوجد احتمال تسجيل مجموع 7 نقط

(أ) مرة (ب) على الأقل مرة (ج) مرتين

ج : (أ) 5/18 (ب) 11/36 (ج) 1/36

٦ - ٤٦ سحب ورقتان على التوالى من مجموعة أوراق لعب عادية مكونة من 52 ورقة مخلوطة خلطاً جيداً . أوجد احتمال أن

(أ) الورقة الأولى ليست عشرة سباق أو آس .

(ب) الورقة الأولى آس ولكن الورقة الثانية ليست آس .

(ج) ورقة على الأقل تحمل علامة الدينارى

(د) الورقتان ليستا من نفس المجموعة .

(هـ) لا يوجد أكثر من ورقة عليها صورة (الولد ، البنت ، الملك)

(و) الورقة الثانية ليست من الأوراق التى عليها صورة .

(ز) الورقة الثانية ليست من الأوراق التى عليها صورة علماً بأن الورقة الأولى من الأوراق التى عليها صورة .

(ح) الورقتان إما من الأوراق التى عليها صورة أو من الأوراق التى عليها رسم البستونى أو كلاهما .

ج : (أ) 47/52 (ب) 16/221 (ج) 15/34 (د) 13/17 (هـ) 210/221

(و) 10/13 (ز) 40/51 (ح) 77/442 .

٦ - ٤٧ صندوق يحتوى على 9 تذاكر مرققة من 1 إلى 9 (بما فيها الرقم 9 نفسه) .

إذا سحب ثلاث تذاكر من الصندوق تذكراً فى كل مرة ، أوجد احتمال أن تكون أرقامها بالتبادل إما فردى ،

زوجى ، فردى أو زوجى ، فردى ، زوجى .

ج : 5/18 .

٦ - ٤٨ معامل الترجيح لصالح A لكسب مباراة فى الشطرنج ضد B هو 3:2 . إذا لعبت ثلاث مباريات ، ما هو معامل

الترجح .

(أ) لصالح أن يكسب A على الأقل مباريتين من ثلاث .

(ب) ضد A أن يخسر أو المباريتين الأولى والثانية مع B .

ج : (أ) 44 : 81 (ب) 4 : 21

٦- ٤٩ كيس نقود يحتوى على قطعتين من النقود الفضية و 4 قطع نقود نحاسية وكيس آخر يحتوى على 4 قطع نقود فضية و 3 نحاسية . إذا اختيرت قطعة نقود عشوائياً من أحد الكيسين ، ما هو احتمال أن تكون قطعة نقود فضية ؟
ج : 19/42 .

٦- ٥٠ احتمال أن يبقى رجل على قيد الحياة 25 سنة أخرى وهو $\frac{3}{5}$ واحتمال أن تبقى زوجته على قيد الحياة 25 سنة أخرى $\frac{2}{3}$ ما هو احتمال :

- (أ) أن يبقى الإثنين على قيد الحياة .
(ب) أن يبقى الرجل فقط على قيد الحياة .
(ج) أن تبقى الزوجة فقط على قيد الحياة .
(د) أن يبقى واحداً منهما على قيد الحياة .

ج : (أ) $\frac{2}{5}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{4}{15}$ (د) $\frac{13}{15}$

٦- ٥١ من 800 عائلة بكل عائلة 4 أطفال ، ما هي النسبة المئوية المتوقعة للعائلات التي بها .

- (أ) ولدان وبنتان .
(ب) ولد على الأقل
(ج) ليس بها بنات .

(د) بنتان على الأكثر ؟ مفترضاً أن الأولاد والبنات لهما احتمال متساو في الوجود .

ج : (أ) 37.5% (ب) 93.75% (ج) 6.25% (د) 68.75%

التوزيعات الاحتمالية :

٦- ٥٢ إذا كان X متغيراً عشوائياً يمثل عدد الأولاد في العائلات المكونة من 4 أطفال (أنظر المسألة ٦- ٥١)

- (أ) كون جدولاً يمثل التوزيع الاحتمالي لـ X .
(ب) مثل التوزيع في (أ) بيانياً .

X	0	1	2	3	4
$p(X)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

ج : (أ)

٦- ٥٣ المتغير العشوائي المتصل X يأخذ قيمًا بين $X = 2$ و $X = 8$ (بما فيها 2,8) ، ودالة كثافته احتماله معرفة به $a(X + 3)$ حيث a مقدار ثابت .

(أ) احسب قيمة a . (ب) أوجد $\Pr\{3 < X < 5\}$.

(ج) $\Pr\{X \geq 4\}$ (د) $\Pr\{|X - 5| < 0.5\}$.

ج : (أ) $\frac{1}{48}$ (ب) $\frac{7}{24}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{6}$

- ٦-٥٤ ثلاث كرات بلى سحب بدون إرجاع من وعاء يحتوى على 4 كرات بلى حمراء و 6 كرات بلى بيضاء . إذا كان X متغير عشوائى يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة .
- (أ) كون جدولاً موضحاً به التوزيع الاحتمالى لـ X .
- (ب) مثل التوزيع بيانياً .

X	0	1	2	3
$p(X)$	1/6	1/2	3/10	1/30

ج : (أ)

- ٦-٥٥ فى المسألة السابقة ، أوجد (أ) $\Pr\{X = 2\}$ (ب) $\Pr\{1 \leq X \leq 3\}$ وفسر النتيجة .
- ج : (أ) $3/10$ ، وهذا احتمال سحب ما مجموعة 2 من الكرات الحمراء .
- (ب) $5/6$ ، وهذا احتمال سحب 1 أو 2 أو 3 من الكرات الحمراء ، سحب كرة حمراء على الأقل .

التوقع الرياضى :

- ٦-٥٦ ما هو السعر العادل للاشتراك فى لعبة احتمال أن يكسب فيها الشخص £25 هو 0.2 واحتمال أن يكسب £10 هو 0.4 ؟
- ج : £9 .

- ٦-٥٧ إذا أمطرت السماء ، فإن بائع مظلات واقية من المطر يمكن أن يكسب £30 فى اليوم . إذا كان الجو معتدلاً فإنه يخسر £6 فى اليوم . ما هو توقعه إذا كان احتمال سقوط المطر هو 0.3 ؟
- ج : £4.80 فى اليوم .

- ٦-٥٨ A و B يشتركان فى لعبة حيث يقذفان بعملة متوازنة ثلاث مرات والذى يحصل على السورة أولاً يكسب اللعبة . إذا قذف A العملة أولاً وإذا كانت القيمة الإيجابية للرهان هو £20 ، ما هو المبلغ الذى يجب أن يساهم به كل منهم بحيث يمكن اعتبار اللعبة عادلة ؟
- ج : £12.50; B , £7.50; A

- ٦-٥٩ أوجد (أ) $E(X)$ (ب) $E(X^2)$ (ج) $E[(X - \bar{X})^2]$ (د) $E(X^3)$ للتوزيع الاحتمالى التالى .

X	-10	-20	30
$p(X)$	1/5	3/10	1/2

ج : (أ) 7 (ب) 590 (ج) 541 (د) 10900

٦-٦٠ أوجد (أ) الوسط (ب) التباين و (ج) الانحراف المعياري لتوزيع X بالمسألة ٦-٥٤ وفسر نتائجك
ج : (أ) 1.2 (ب) 0.56 (ج) $\sqrt{0.56} = 0.75$

٦-٦١ متغير عشوائي بأخذ القيمة 1 باحتمال p و 0 باحتمال $q = 1 - p$ أثبت أن
(أ) $E(X) = p$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = pq$

٦-٦٢ أثبت أن (أ) $E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ (ب) $E[(X - \bar{X})^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$

٦-٦٣ إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لهما نفس التوزيع .
وضح أن $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

التباديل :

٦-٦٤ احسب (أ) ${}_4P_2$ (ب) ${}_7P_5$ (ج) ${}_{10}P_3$: (أ) 12 (ب) 2520 (ج) 720

٦-٦٥ لأي قيمة من قيم n ، ${}_nP_4 = {}_{n+1}P_3$ ؟ ج : $n = 5$

٦-٦٦ بكم طريقة يمكن أجلس 5 أشخاص على كنية إذا كان عدد الأماكن المتاحة هو 3 فقط ؟ ج : 60

٦-٦٧ بكم طريقة يمكن ترتيب 7 كتب على رف إذا كان (أ) أى ترتيب ممكن (ب) ثلاثة كتب معينة يجب أن تكون معاً ،
(ج) كتابان معينان يجب أن يشغلا النهاية ؟

ج : (أ) 5040 (ب) 720 (ج) 240

٦-٦٨ كم من الأعداد المكونة من خمسة أرقام بكل منها يمكن تكوينها من الأرقام 1, 2, 3, ..., 9 إذا (أ) الأرقام يجب أن تكون فردية (ب) الرقمان الأوليان من كل عدد أرقام زوجية ؟

ج : (أ) 8400 ، (ب) 2520

٦-٦٩ قل المسألة السابقة إذا كان تكرار الرقم مسموحاً به .

ج : (أ) 32 805 (ب) 11664

٦-٧٠ كم من الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام أربعة وأربعة أرقام اثنين ، ورقان ثلاثة ؟
ج : 20

٦-٧١ بكم طريقة يمكن أجلس 3 رجال و 3 نساء حول مائدة إذا كان (أ) لا توجد قيود موضوعة .

(ب) اثنتان معينتان من النساء يجب ألا يجلسا معاً . (ج) كل واحدة من النساء يجب أن تجلس بين رجلين .

ج : (أ) 120 (ب) 72 (ت) 12

التوافيق :

٧٢-٦ احسب (أ) C_3 و (ب) C_4 و (ج) C_8 .

ج : (أ) 10 (ب) 70 (ج) 45

٧٣-٦ لأي قيمة من قيم n تكون $nC_2 = 7$. $n+1C_3 = 3$ ؟ ج : $n=6$

٧٤-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 6 أسئلة من 10 أسئلة ؟ ج : 210

٧٥-٦ كم عدد اللجان المكونة من 3 رجال و 4 نساء يمكن تكوينها من 8 رجال و 6 نساء ؟ ج : 840

٧٦-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 2 من الرجال ، 4 سيدات ، 3 أولاد و 3 بنات من 6 من الرجال ، 8 سيدات ، 4 أولاد و 5 بنات إذا كان

(أ) لا توجد أى قيود على الاختيار .

(ب) رجل معين وسيدة معينة يجب اختيارهما ؟

ج : (أ) 42 000 (ب) 7000

٧٧-٦ بكم طريقة يمكن تقسيم 10 أشخاص إلى (أ) مجموعتين مكونتين من 7 أشخاص ، 3 أشخاص (ب) ثلاثة مجموعات مكونة من 4 أشخاص ، 3 أشخاص ، شخصان ؟ ج : (أ) 120 (ب) 12 600

٧٨-٦ من 5 إحصائيين ، 6 اقتصاديين يراد تكوين لجنة من 3 إحصائيين ، 2 من الاقتصاديين . كم لجنة يمكن تكوينها إذا كان :

(أ) لا توجد قيود على الاختيار .

(ب) 2 معينين من الإحصائيين يجب أن يكونا في اللجنة .

(ج) اقتصادى معين يجب أن يكون في اللجنة . ؟

ج : (أ) 150 (ب) 45 (ج) 100

٧٩-٦ أوجد عدد (أ) التوافيق (ب) التباديل ، المكون كل منها من أربعة حروف والى يمكن تكوينها من الكلمة *Tennessee* ؟

ج : (أ) 17 (ب) 163

٨٠-٦ أثبت أن $1 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \dots + (-1)^n {}_nC_n = 0$

تقريب ستيرلينج لـ $n!$:

٨١-٦ بكم طريقة يمكن اختيار 30 مفردة من 100 ؟ ج : 2.95×10^{25}

٨٢-٦ وضح أنه لقيم n الكبيرة ${}_nC_n = 2^n / \sqrt{\pi n}$ تقريباً .

مسائل متنوعة

٦ - ٨٣ سحب ثلاث ورقات من مجموعة أوراق لعب مكونة من 52 كارت . أوجد احتمال (أ) ورقتان عليهما صورة الولد وورقة عليها صورة الملك (ب) جميع الورقات من نفس النوع (ج) جميع الورقات من مجموعات مختلفة (د) وجود ورقتي آس على الأقل .

ج : (أ) $6/5525$ (ب) $22/425$ (ج) $169/425$ (د) $73/5525$

٦ - ٨٤ أوجد احتمال الحصول على مجموع 7 مرتين على الأقل في رمية زهرة أربعة مرات ؟

ج : $171/1296$

٦ - ٨٥ إذا كان 10% من إنتاج آلة في مصنع إنتاجاً تالفاً ، إذا اختيرت 5 مسامير عشوائياً فاحس احتمال (أ) أن لا يكون أى منها تالف (ب) وجود مسمار واحد تالف (ج) وجود مسامير على الأقل تالفتين ؟

ج : (أ) 0.59049 (ب) 0.32805 (ج) 0.08866

٦ - ٨٦ (أ) كون مجال العينة لنتائج رميتين لعملة غير متحيزة مستخدماً 1 لتمثل « الصورة » و 0 لتمثل « الكتابة » . (ب) من مجال العينة أوجد احتمال ظهوره الصورة مرة على الأقل .

(ج) هل يمكن لك تكوين مجال العينة لنتائج ثلاث رميات لعملة ؟ إذا كان ممكناً حدد بمساعدة هذا التكوين احتمال ظهور صورتين على الأقل .

ج : (ب) $3/4$ (ج) $7/8$.

٦ - ٨٧ في استطلاع لرأى 200 ناخب أظهر المعلومات التالية والخاصة بثلاثة مرشحين A, B, C من حزب معين والذين يخوضون الانتخابات للحصول على ثلاثة مقاعد مختلفة .

28 مؤيدين لكل من A, B

122 مؤيدين لـ B أو C ولكن غير مؤيدين لـ A

98 مؤيدين لـ A أو B ولكن غير مؤيدين لـ C

64 مؤيدين لـ C ولكن غير مؤيدين لـ A أو B

42 مؤيدين لـ B ولكن غير مؤيدين لـ A أو C

14 مؤيدين لـ A و C ولكن غير مؤيدين لـ B

كم عدد الناخبين المؤيدين لـ (أ) جميع المرشحين الثلاثة (ب) A بغض النظر عن B أو C .

(ج) B بغض النظر عن A أو C (د) C بغض النظر عن A أو B (هـ) A و B وليس C

(و) مرشح واحد فقط ؟

ج : (أ) 8 (ب) 78 (ج) 86 (د) 102 (هـ) 20 (و) 142

٨٨ - ٦ (أ) أثبت أنه لأي حدثين E_1 و E_2 فإن $\Pr\{E_1 + E_2\} \leq \Pr\{E_1\} + \Pr\{E_2\}$ (ب) عم النتيجة التي حصلت عليها في (أ)

٨٩ - ٦ إذا كانت E_1, E_2, E_3 عبارة عن 3 أحداث من المعروف أن واحد منها على الأقل قد وقع . وإذا افترضنا أن أيًا من هذه الأحداث يمكن أن ينتج عنه حدث آخر وليكن A ومن المعروف أن هذا الحدث أيضاً قد وقع . إذا كانت جميع الاحتمالات $\Pr\{E_1\}, \Pr\{E_2\}, \Pr\{E_3\}$ و $\Pr\{A|E_1\}, \Pr\{A|E_2\}, \Pr\{A|E_3\}$ يفترض أنها معلومة أثبت أن

$$\Pr\{E_1|A\} = \frac{\Pr\{E_1\} \Pr\{A|E_1\}}{\Pr\{E_1\} \Pr\{A|E_1\} + \Pr\{E_2\} \Pr\{A|E_2\} + \Pr\{E_3\} \Pr\{A|E_3\}}$$

ويمكن الحصول على نتيجة مشابهة لكل من $\Pr\{E_2|A\}$ و $\Pr\{E_3|A\}$. هذه الصيغة معروفة بإسم « قاعدة بايز أو نظرية بايز » . وهي مفيدة لحساب احتمالات الفروض المختلفة E_1 أو E_2 أو E_3 والتي ينتج عنها الحدث A . والنتيجة السابقة يمكن تعميمها .

٩٠ - ٦ ثلاثة صناديق مجوهرات متماثلة تماماً ولكل صندوق درجان . في كل من أدراج الصندوق الأول ساعة ذهبية . وفي كل من أدراج الصندوق الثاني يوجد ساعة فضية . في أحد أدراج الصندوق الثالث توجد ساعة ذهبية بينما في الدرج الآخر توجد ساعة فضية . اختبر صندوق عشوائياً وفتح أحد الأدراج ووجد به ساعة فضية ، ماهو احتمال أن يكون بالدرج الثاني ساعة ذهبية ؟

(ملحوظة : طبق نتيجة المسألة ٨٩ - ٦)

ج : $\frac{1}{3}$

٩١ - ٦ قدر كلا من A و B أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بمد الظهر على أن لا ينتظر أي منهما الآخر أكثر من 10 دقائق . ماهو احتمال أن يتقابلا .

ج : $\frac{11}{36}$

٩٢ - ٦ اختيرت نقطتان عشوائياً على خط طوله $\alpha > 0$. أوجد احتمال أن تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك يمكن أن تكون أضلاع مثلث .

ج : $\frac{1}{4}$

الفصل السابع

توزيعات ذى الحدين ، الطبيعى وبواسون

توزيع ذى الحدين :

إذا كانت p احتمال وقوع حدث ما فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال النجاح) و $q = 1 - p$ احتمال عدم وقوع الحدث فى أى محاولة وحيدة (وتسمى احتمال الفشل) فإن احتمال وقوع الحدث مرات عددها X بالضبط فى N محاولة (حدوث X نجاح و $N - X$ فشل) يعطى كالآتى :

$$(1) \quad p(X) = {}_N C_X p^X q^{N-X} = \frac{N!}{X!(N-X)!} p^X q^{N-X}$$

حيث $X = 0, 1, 2, \dots$ و $N! = N(N-1)(N-2) \dots 1$ و $0! = 1$ بالتعريف (أنظر الفصل السادس المسألة ٦-٣٤) .

مثال ١ - احتمال الحصول على صورتين بالضبط من 6 رميات لعملة غير متحيزة هو

$${}_6 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{8}$$

باستخدام (١) بوضع $X=2$ ، $N=6$ و $p=q=\frac{1}{2}$.

مثال ٢ - احتمال الحصول على 4 صورة فى 6 رميات لعملة غير متحيزة .

$$(2) \quad {}_6 C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} + {}_6 C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} + {}_6 C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

التوزيع الاحتمالى المتقطع (١) يسمى غالبا بتوزيع ذى الحدين حيث أنه لقيم $X = 0, 1, 2, \dots, N$ يقابل الحدود المتتالية لصيغة ذى الحدين أو مفكوك ذى الحدين .

$$(q + p)^N = q^N + {}_N C_1 q^{N-1} p + {}_N C_2 q^{N-2} p^2 + \dots + p^N$$

حيث \dots و ${}_N C_2$ و ${}_N C_1$ و 1 تسمى معاملات ذى الحدين .

$$(q + p)^4 = q^4 + {}_4 C_1 q^3 p + {}_4 C_2 q^2 p^2 + {}_4 C_3 q p^3 + p^4$$

$$= q^4 + 4q^3 p + 6q^2 p^2 + 4q p^3 + p^4$$

مثال :

التوزيع (١) يسمى أيضا توزيع برنولى بعد أن اكتشفه جيمس برنولى فى نهاية القرن السابع عشر .

بعض خصائص توزيع ذى الحدين مذكورة في الجدول التالي :

جدول ٧ - ١

الوسط	$\mu = Np$
التباين	$\sigma^2 = Npq$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{Npq}$
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = \frac{q-p}{\sqrt{Npq}}$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3 + \frac{1-6pq}{Npq}$

مثال : في 100 رمية لعملة غير متحيزة فإن متوسط ظهور الصورة هو $\mu = Np = (100)(\frac{1}{2}) = 50$ وهذا هو الرقم المتوقع لظهور الصورة في 100 رمية لعملة .

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 5$

التوزيع الطبيعي :

أحد الأمثلة الهامة للتوزيع الاحتمالي المتصل هو التوزيع الطبيعي ، أو المنحنى الطبيعي أو توزيع جاوس ، ويعرف بالمعادلة .

$$(٣) \quad Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)^2/\sigma^2}$$

حيث μ = الوسط و σ = الانحراف المعياري و $\pi = 3.14159 \dots$, $e = 2.71828 \dots$

المساحة الكلية المحصورة بين المنحنى (٣) والأحداث السينية X تساوى واحداً ، وبهذا فإن المساحة تحت المنحنى بين الأحداث $X = a$ و $X = b$ حيث $a < b$ ، تمثل احتمال أن تقع X بين a و b ، ويعبر عنها بـ $\Pr\{a < X < b\}$

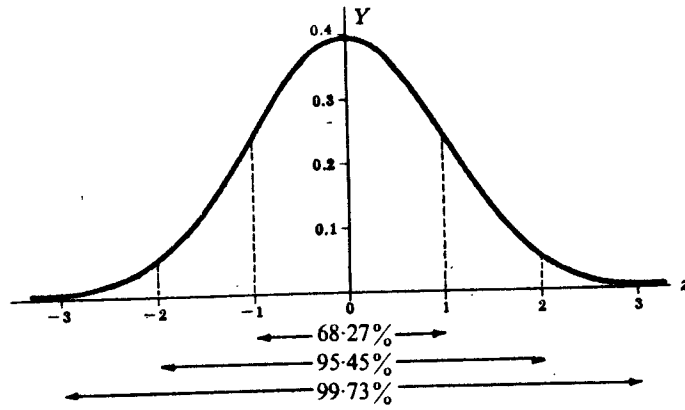
وعندما نعبّر عن المتغير X بدلالة الوحدات المعيارية . $z = (X - \mu)/\sigma$ ، فإن المعادلة (٣) يستبدل بهما ما يسمى بالصورة القياسية أو المعيارية .

$$(٤) \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

وفى هذه الحالة فإنه يقال أن z تتوزع توزيعاً معتملاً متوسطه الصفر وتباينه الوحدة .

الشكل البياني للمنحنى الطبيعي المعياري يظهر فى الشكل ٧-١ . فى هذا الشكل أوضحنا أن المساحة الواقعة بين $z = -1$ ، $z = +1$ هي 68.27% وبين $z = -2$ ، $z = +2$ هي 95.45% وكذلك بين $z = -3$ ، $z = +3$ هي 99.73% من المساحة الكلية والتي تساوى واحد .

يمثل الجدول فى الملحق 11 المساحة تحت المنحنى والمحصورة بين الأحادى $z = 0$ وأى قيمة موجبة لـ z ، ومن هذا الجدول فإن المساحة بين أى نقطتين يمكن الحصول عليها باستخدام تماثل المنحنى حول $z = 0$.



شكل ٧-١

بعض خصائص التوزيع الطبيعي المعرف بالمعادلة (٣) : مذكورة فى الجدول ٧-٢

الجدول ٧-٢

الوسط	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ
معامل الالتواء باستخدام العزوم	$\alpha_3 = 0$
معامل التفرطح باستخدام العزوم	$\alpha_4 = 3$
الانحراف المتوسط	$\sigma\sqrt{2/\pi} = 0.7979\sigma$

العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعي :

إذا كانت N كبيرة وكلا من p و q ليسا قريبين من الصفر ، فإن توزيع ذى الحدين يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعي ذى المتغير المياري المعطى بـ $z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$. ويصير التقريب أكثر جودة كلما زادت N ، وفى المالا نهاية تصير العلاقة مضبوطة . وهذا موضح فى الجدول ٧-١ ، ٧-٢ حيث يتضح أنه عندما تزيد N فإن التواء وتفرطح توزيع ذى الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي . ومن الناحية العملية فإن التقريب يعد جيدا إذا كان كل من Np و Nq أكبر من 5 .

توزيع بواسون :

التوزيع الاحتمال المتقطع

$$p(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!} \quad (X = 0, 1, 2, \dots) \quad (٥)$$

حيث $e = 2.71828\dots$ و λ ثابت معطى ، يسمى توزيع بواسون ، عقب اكتشاف بواسون له فى أوائل القرن التاسع عشر .

ويمكن حساب قيمة $p(X)$ باستخدام الجدول VI فى صفحة ٥٣٨ الذى يعطى قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة ، أو باستخدام اللوغاريتمات .

بعض خصائص توزيع بواسون :

بعض خصائص توزيع بواسون معطاة فى الجدول التالى

جدول ٧ - ٣

الوسط	$\mu = \lambda$
التباين	$\sigma^2 = \lambda$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\lambda}$
معامل الالتواء باستخدام المزوم	$\alpha_3 = 1/\sqrt{\lambda}$
معامل التفرطح باستخدام المزوم	$\alpha_4 = 3 + 1/\lambda$

العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون :

فى توزيع ذى الحدين (١) ، إذا كانت N كبيرة بينما احتمال وقوع حدث p قريبا من الصفر بحيث تكون $q = (1 - p)$ قريبة من 1 ، فإن الحدث يسمى حدثا نادرا . ومن الناحية العملية فإننا سنعتبر أن الحدث نادر إذا كان عدد المحاولات 50 على الأقل ($N \geq 50$) بينما Np أقل من 5 فى هذه الحالات فإن التوزيع ذى الحدين (١) يمكن تقريبه بشكل جيد بتوزيع بواسون (٥) . وهذا يتضح من مقارنة الجداول ١-٧ و ٣-٧ أعلاه ، حيث لو عوضنا عن $\lambda = Np$ و $q \approx 1$ و $p \approx 0$ فى الجدول ١-٧ نحصل على النتائج بالجدول ٣-٧ .

وبما أن هناك علاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطيبى . فإنه يمكن أن نبين أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطيبى فى المتغير المعيارى $(X - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ عند تحول λ إلى مالا نهاية .

توزيع كثيرات الحدود :

إذا كانت الأحداث E_1, E_2, \dots, E_K تحدث باحتمالات p_1, p_2, \dots, p_K على الترتيب ، فإن احتمال حدوث E_1, E_2, \dots, E_K مرات عددها على الترتيب X_1, X_2, \dots, X_K هو

$$(6) \quad \frac{N!}{X_1! X_2! \dots X_K!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_K^{x_K}$$

$$\text{حيث } X_1 + X_2 + \dots + X_K = N$$

هذا التوزيع والنمى يعد تصميما لتوزيع ذى الحدين ، يسمى توزيع كثيرات الحدود حيث (٦) هى الحد العام فى مفكوك كثيرات الحدود $(p_1 + p_2 + \dots + p_K)^N$

مثال : إذا قذفت زهرة 12 مرة ، فإن احتمال الحصول على 1, 2, 3, 4, 5, 6 نقطة مرتين بالضبط لكل منها هو

$$\frac{12!}{2! 2! 2! 2! 2! 2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1925}{359872} = 0.00344$$

العدد المتوقع لوقوع E_1, E_2, \dots, E_K فى N محاولة هو Np_1, Np_2, \dots, Np_K على الترتيب .

توفيق توزيع نظرى للتوزيع التكرارى لعينة :

إذا كان لدى الشخص بعض الأدلة على شكل توزيع مجتمع معين سواء لمبررات احتمالية أو غيرها ، فإنه غالبا ما يمكن توفيق مثل هذا التوزيع النظرى (يسمى أيضا « نموذجاً » أو توزيعاً « متوقعا ») للتوزيع التكرارى لعينة من هذا المجتمع . والطريقة المستخلصة بشكل عام تتضمن استعمال الوسط والانحراف المعياري للعينة لتقدير الوسط والانحراف المعياري للمجتمع . أنظر المسائل ٣١-٧ ، ٣٣-٧ و ٣٤-٧ .

ولاختبار جودة توفيق هذا التوزيع النظرى ، تستخدم اختبار كارتير والمطى فى الفصل الثانى عشر .
ولمحاولة تقدير ما إذا كان التوزيع الطبيعي يمثل توفيقاً جيداً للبيانات المعطاة ، فإنه من المناسب استخدام ورق رسم
بياني المنحنى الطبيعي أو ورق رسم بياني احتمال كما يسمى أحياناً (أنظر المسألة ٧-٣٢) .
توزيع ذى الحدين :

مسائل محلولة

توزيع ذى الحدين :

$$١-٧ \text{ أحسب (أ) } 5! \text{ (ب) } \frac{6!}{2!4!} \text{ (ج) } {}_8C_3 \text{ (د) } {}_7C_5 \text{ (هـ) } {}_4C_4 \text{ (و) } {}_4C_0$$

الحل

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \quad (أ)$$

$$\frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \quad (ب)$$

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \quad (ج)$$

$${}_7C_5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \quad (د)$$

$${}_4C_4 = \frac{4!}{4!0!} = 1 \quad (هـ) \quad (\text{حيث } 0! = 1 \text{ بالتعريف})$$

$${}_4C_0 = \frac{4!}{0!4!} = 1 \quad (و)$$

٧-٢ عند رمى عملة متوازنة ثلاث مرات أوجد احتمال ظهور الآتى :
(أ) 3 صور (ب) صورتان وكتابة (ج) 2 كتابة ، 1 صورة (د) 3 كتابة

الحل :

الطريقة ١ :

أعتبر أن H تعبر عن « الصورة » و T تعبر عن « الكتابة » وافترض أن الرمز HTH ، على سبيل المثال
يعنى ظهور الصورة فى الرمية الأولى ، الكتابة فى الرمية الثانية ثم الصورة فى الرمية الثالثة .

بما أن هناك أحد الشيتين (الصورة أو الكتابة) يمكن حدوثها في كل رمية ، فإن هناك $8 = (2)(2)(2)$

نتيجة ممكنة وهي

HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THH, THT, TTT

بما أن فرص هذه الامكانيات متساوية في الظهور ، فإن احتمال كل هو $1/8$

(أ) 3 صور (HHH) تحدث مرة واحدة فقط ، وهذا فإن احتمال ظهور ثلاث صور هو $1/8$

(ب) 2 صورة وكتابة تحدث ثلاث مرات (HHT, HTH, THH) وهذا فإن

$$\Pr \{ 2 \text{ صورة وكتابة} \} = 3/8$$

(ج) 2 كتابة وصورة تحدث ثلاث مرات (HTT و TTH و THT) إذن $\Pr \{ 2 \text{ كتابة وصورة} \} = 3/8$

(د) 3 كتابة (TTT) تحدث مرة واحدة فقط ، إذن $\Pr \{ TTT \} = \Pr \{ 3 \text{ كتابة} \} = 1/8$

الطريقة ٢ : (باستخدام القانون)

$$\Pr \{ 3 \text{ صور} \} = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = (1) \left(\frac{1}{8}\right) (1) = \frac{1}{8} \quad (أ)$$

$$\Pr \{ 2 \text{ صورة وكتابة} \} = {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = (3) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad (ب)$$

$$\Pr \{ 1 \text{ صورة و 2 كتابة} \} = {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (3) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \quad (ج)$$

$$\Pr \{ 3 \text{ كتابة} \} = {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = (1) (1) \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \quad (د)$$

كذلك يمكننا متابعة الحل كما في الفصل السادس ، المسألة ٦-١٠ .

٧-٣ في خمس رميات لزهرة طاولة غير متحيزة أوجد احتمال أن يظهر الرقم 3

(أ) صفر من المرات (عدم ظهوره إطلاقاً) (ب) مرة واحدة (ج) مرتان

(د) ثلاث مرات (هـ) أربع مرات (و) خمس مرات .

الحل :

احتمال ظهور 3 في رمية واحدة $p = 1/6$

احتمال عدم ظهور 3 في رمية واحدة $q = 1 - p = 5/6$. إذن

$$\Pr (\text{عدم ظهور 3 إطلاقاً}) = {}_5C_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = (1) (1) \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776} \quad (أ)$$

$$\Pr (\text{ظهور 3 مرة واحدة}) = {}_5C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = (5) \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{7776} \quad (ب)$$

$$\Pr (\text{ظهور 3 مرتان}) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = (10) \left(\frac{1}{36}\right) \left(\frac{125}{216}\right) = \frac{625}{3888} \quad (ج)$$

$$\Pr (\text{ظهور 3 ثلاث مرات}) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = (10) \left(\frac{1}{216}\right) \left(\frac{25}{36}\right) = \frac{125}{3888} \quad (د)$$

(ب) $\Pr(\text{ولد وبنت على الأقل}) = 1 - \Pr(\text{عدم وجود ولد}) - \Pr(\text{عدم وجود بنت}) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{8}$

٧ - ٦ من 2000 عائلة بكل منها 4 أطفال ، ما هو العدد المتوقع للعائلات التي بها (١) على الأقل ولد واحد (ب) ولثلاث (ج) بنت أو بنتان (د) لا يوجد بها بنات ؟ أرجع إلى المسألة ٧ - ٥ (١)

الحل :

$$(١) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولد على الأقل } = 1875 = 2000 \left(\frac{15}{16} \right)$$

$$(ب) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها ولدان } = 750 = 2000 \left(\frac{5}{8} \right) = 2000 \cdot \Pr \{ \text{ولدان} \}$$

$$\begin{aligned} (ج) \{ \text{بنتان} \} &= \Pr \{ \text{بنت} \} + \Pr \{ \text{بنت أو بنتان} \} \\ &= \Pr \{ \text{ولد} \} + \Pr \{ \text{ولدان} \} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

$$\text{العدد المتوقع للعائلات التي يوجد بها بنت أو بنتان} = 1250 = 2000 \left(\frac{5}{8} \right)$$

$$(د) \text{ العدد المتوقع للعائلات التي لا يوجد بها بنات } = 125 = 2000 \left(\frac{1}{16} \right)$$

٧ - ٧ إذا كان 20 % من إنتاج آلة لصناعة المسامير هو إنتاج تالف ، أوجد احتمال أن يكون بين 4 مسامير اختيرت عشوائيا (١) 1 (ب) 0 (ج) على الأكثر مسامير ، ستكون تالفة .

الحل :

$$\text{احتمال وجود مسمار تالف هو } p = 0.2 \text{ ، ووجود مسمار غير تالف } q = 1 - p = 0.8$$

$$(١) \Pr (\text{مسمار تالف من 4 مسامير}) = {}_4C_1(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$$

$$(ب) \Pr (\text{عدم وجود أى مسمار تالف}) = {}_4C_0(0.2)^0(0.8)^4 = 0.4096$$

$$(ج) \Pr (\text{وجود مساميرين تالفين}) = {}_4C_2(0.2)^2(0.8)^2 = 0.1536$$

إذن

$$\begin{aligned} \Pr \{ \text{وجود مساميرين تالفين على الأكثر} \} &= \Pr \{ 0 \text{ مسمار تالف} \} + \Pr \{ 1 \text{ مسمار تالف} \} \\ &\quad + \Pr \{ 2 \text{ مسمار تالف} \} \end{aligned}$$

$$= 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 + 0.9728$$

٧ - ٨ إذا كان احتمال أن يتخرج طالب التحق بكلية هو 0.4 . حدد احتمال أن يكون من بين 5 طلبة (١) لا يتخرج أحد (ب) يتخرج واحد على الأقل .

الحل :

$$(١) \Pr (\text{لا يتخرج أحد}) = {}_5C_0(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$$

أو حوالى 0.08

$$(ب) \Pr (\text{يتخرج واحد}) = {}_5C_1(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$$

أو حوالى 0.26

$$(ج) (\text{أن لا يتخرج أحد}) = 1 - \Pr (\text{أن يتخرج واحد على الأقل})$$

أو حوالى 0.92

٧-٩ ما هو احتمال الحصول على ما مجموعه 9 (١) مرتان ، (ب) على الأقل مرتان في 6 رميات لزهرق طاولة ؟

الحل :

كل من الـ 6 طرق التي يمكن أن تقع بها الزهرة الأولى يمكن أن ترتبط بكل من الـ 6 طرق التي يمكن أن تقع بها الزهرة الثانية ، وبهذا يكون هناك $6 \times 6 = 36$ طريقة يمكن أن تقع بها الزهرتان . حيث هناك : 1 في الزهرة الأولى ، 1 في الزهرة الثانية ، 1 في الزهر الأولى و 2 في الزهرة الثانية وهكذا ... ، ويرمز لها (1, 1) و (1, 2) من هذه الـ 36 طريقة ، وكلها لها نفس الفرصة في الظهور إذا كانت الزهرتان متوازنتان ، ما مجموعه 9 يحدث في أربع حالات : (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) . وبهذا يكون احتمال ظهور ما مجموعه 9 في رمية واحدة لزهرتين هو $p = 4/36 = 1/9$ واحتمال عدم الحصول على ما مجموعه 9 في رمية زهرتين $q = 1 - p = 8/9$

$$\Pr(\text{اثنين 9 في ست رميات}) = {}_6C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^{6-2} = \frac{61440}{531441} \quad (١)$$

$$\Pr\{\text{خسة 9}\} + \Pr\{\text{أربعة 9}\} + \Pr\{\text{ثلاثة 9}\} + \Pr\{\text{اثنين 9}\} = \Pr\{\text{وجود اثنين 9 على الأقل}\}$$

$$= {}_6C_2 \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{8}{9}\right)^4 + {}_6C_3 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left(\frac{8}{9}\right)^3 + {}_6C_4 \left(\frac{1}{9}\right)^4 \left(\frac{8}{9}\right)^2 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{9}\right)^5 \left(\frac{8}{9}\right)^1 + {}_6C_6 \left(\frac{1}{9}\right)^6$$

$$= \frac{61440}{531441} + \frac{10240}{531441} + \frac{960}{531441} + \frac{48}{531441} + \frac{1}{531441} + \frac{72689}{531441}$$

طريقة أخرى :

$$\Pr\{\text{واحد 9}\} = \Pr\{\text{عدم وجود 9}\} = 1 - \Pr\{\text{اثنين 9 على الأقل}\}$$

$$= 1 - {}_6C_0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^6 - {}_6C_1 \left(\frac{1}{9}\right)^1 \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \frac{72689}{531441}$$

$$p(X) = {}_N C_X p^X q^{N-X} \quad \text{حيث} \quad \sum_{X=0}^N X^2 p(X) \quad (ب) \quad \sum_{X=0}^N X p(X) \quad (١) \quad \text{١٠-٧ احسب}$$

الحل :

$$\sum_{X=0}^N X p(X) = \sum_{X=1}^N X \frac{N!}{X! (N-X)!} p^X q^{N-X} = N p \sum_{X=1}^N \frac{(N-1)!}{(X-1)! (N-X)!} p^{X-1} q^{N-X} \quad (١)$$

$$= N p (q + p)^{N-1} = N p$$

$$q + p = 1 \quad \text{بما أن}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^N X^2 p(X) &= \sum_{x=1}^N X^2 \frac{N!}{X!(N-X)!} p^x q^{N-x} = \sum_{x=1}^N [X(X-1) + X] \frac{N!}{X!(N-X)!} p^x q^{N-x} \\
&= \sum_{x=1}^N X(X-1) \frac{N!}{X!(N-X)!} p^x q^{N-x} + \sum_{x=1}^N X \frac{N!}{X!(N-X)!} p^x q^{N-x} \\
&= N(N-1)p^2 \sum_{x=2}^N \frac{(N-2)!}{(x-2)!(N-x)!} p^{x-2} q^{N-x} + Np = N(N-1)p^2(q+p)^{N-2} + Np \quad (\text{ب}) \\
&= N(N-1)p^2 + Np
\end{aligned}$$

ملحوظة : النتيجة في (١) و (ب) هي القيمة المتوقعة لكل من X^2 و X ويرمز لها $E(X)$ و $E(X^2)$ على الترتيب (أنظر الفصل السادس) .

١١-٧ إذا كان متغير له توزيع ذى الحدين ، أوجد (١) وسطه μ (ب) تباينه σ^2 : الحل :

$$\mu = \text{توقع المتغير} = \sum_{x=0}^N X p(X) = Np \quad (١)$$

من المسألة ١٠-٧ (١)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_{x=0}^N (X-\mu)^2 p(X) = \sum_{x=0}^N (X^2 - 2\mu X + \mu^2) p(X) = \sum_{x=0}^N X^2 p(X) - 2\mu \sum_{x=0}^N X p(X) + \mu^2 \sum_{x=0}^N p(X) \quad (\text{ب}) \\
&= N(N-1)p^2 + Np - 2(Np)(Np) + (Np)^2(1) = Np - Np^2 = Np(1-p) = Npq
\end{aligned}$$

باستخدام $\mu = Np$ ونتيجة المسألة ١٠-٧ فإننا نستنتج أن الانحراف المعياري للمتغير الذي يتوزع كتوزيع

$$\sigma = \sqrt{Npq} \quad \text{ذى الحدين هو}$$

طريقة أخرى : $E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^2 = Npq$:
من المسألة ٦-٦ (١) الفصل السادس .

١٢-٧ إذا كان احتمال وجود مسار معيب هو 0.1 أوجد

(١) الوسط (ب) الانحراف المعياري ، لتوزيع المسامير المعيبة من مجموع 400 مسار

$$(١) \quad Np = 400(0.1) = 40 \quad \text{الوسط ، بمعنى أننا نتوقع وجود 40 مسار معيب}$$

$$(ب) \quad Npq = 400(0.1)(0.9) = 36 \quad \text{التباين وبهذا فإن الانحراف المعياري} = \sqrt{36} = 6$$

١٣-٧ أوجد باستخدام العزوم معاملات (١) الالتواء (ب) التفرطح للتوزيع في المسألة ١٢-٧

الحل :

$$(١) \quad \text{معامل الالتواء باستخدام العزوم} = \frac{q-p}{\sqrt{Npq}} = \frac{0.9-0.1}{6} = 0.133$$

وبما أن هذا المقدار موجب فإن التوزيع ملتو إلى اليمين

$$(ب) \quad = 3 + \frac{1 - 6pq}{Npq} = 3 + \frac{1 - 6(0.1)(0.9)}{36} = 3.01$$

التوزيع مذهب بشكل بسيط بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي (له قمة أعلى نسبياً ، أنظر الفصل الخامس)

التوزيع الطبيعي :

١٤-٧ في امتحان نهائي في الرياضة كان المتوسط 72 والانحراف المعياري 15 . أوجد الدرجات المعيارية (الدرجات مبراً عنها بوحدات من الانحراف المعياري) للطلبة الحاصلين على درجات (أ) 60 (ب) 93 (ج) 72

الحل :

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{93 - 72}{15} = 1.4 \quad (ب) \quad z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{60 - 72}{15} = -0.8 \quad (أ)$$

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s} = \frac{72 - 72}{15} = 0 \quad (ج)$$

١٥-٧ بالرجوع إلى المسألة ١٤-٧ أوجد الدرجات المقابلة للدرجات المعيارية (أ) 1 — (ب) 1.6

الحل :

$$X = \bar{X} + zs = 72 + (1.6)(15) = 96 \quad (ب) \quad X = \bar{X} + zs = 72 + (-1)(15) = 57 \quad (أ)$$

١٦-٧ أخبر طالبان بأنهما قد حصلوا على درجات معيارية 0.4 - ، 0.8 في امتحان القدرات في اللغة الانجليزية . فإذا كانت درجتهما هي 64 و 88 على الترتيب ، أوجد الوسط والانحراف المعياري لدرجات الامتحان .

الحل :

باستخدام المعادلة $X = \bar{X} + 2s$ للطالب الأول

$$(١) \quad 88 = \bar{X} + 0.8s$$

$$(٢) \quad 64 = \bar{X} - 0.4s \quad \text{وباستخدام الطالب الثاني}$$

وبحل (١) ، (٢) معاً نحصل على : الوسط $X = 72$ والانحراف المعياري $s = 20$.

١٧-٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي في كل من الحالات (أ) إلى (ز) التالية . باستخدام الجدول في صفحة ٥٣٣

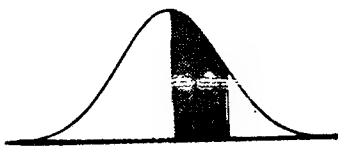
(أ) بين $z = 0$ و $z = 1.2$.

في الجدول صفحة ٥٣٨ . أبدأ بالعمود المعنون z حتى تصل إلى الرقم 1.2

ثم اتجه إلى اليمين إلى العمود المعنوي 0

النتيجة 0.3849 هي المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن تقع z بين

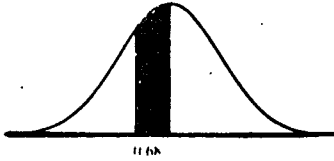
صفر و 1.2 ، ويرمز لها بالتميز $\Pr\{0 \leq z \leq 1.2\}$



شكل ٧-٢ (أ)

(ب) بين $z = 0$ و $z = -0.68$

المساحة المطلوبة = المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$ (بالتماثل)
لحصول جل المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.68$. اتجه إلى أسفل
في العمود z الممنون حتى تصل إلى الرقم 0.6 ثم اتجه إلى اليمين إلى
العمود الممنون 8 .

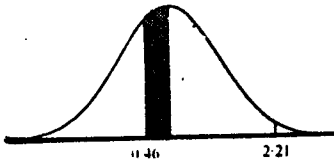


شكل ٢-٧ (ب)

النتيجة 0.2517 هي المساحة المطلوبة وتمثل احتمال أن z تقع بين
 -0.68 و 0 ، ويرمز لها بالتعبير $\Pr \{ -0.68 \leq z \leq 0 \}$

(ج) بين $z = -0.46$ و $z = 2.21$

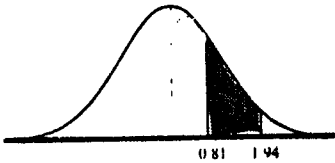
المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.46$)
+ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.21$)
 $0.1772 + 0.4864 = 0.6636$



شكل ٢-٧ (ج)

(د) بين $z = 0.81$ و $z = 1.94$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = 0$ و $z = 1.94$)
- (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.81$)
 $0.1828 = 0.4738 - 0.2910 =$



شكل ٢-٧ (د)

(هـ) إلى يسار $z = 0.6$

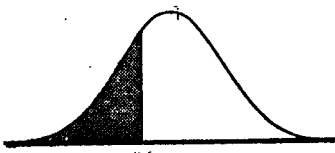
المساحة المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = 0$)

— (المساحة بين $z = -0.6$ و $z = 0$)

= (المساحة إلى يسار $z = 0$)

— (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.6$)

$0.2742 = 0.5 - 0.2258$



شكل ٢-٧ (هـ)

(و) إلى يمين $z = 1.28$

المساحة المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.28$ و $z = 0$)

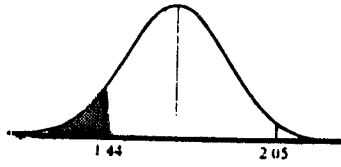
+ (المساحة إلى يمين $z = 0$)

$0.8997 = 0.3997 + 0.5$

وهذه مثل $\Pr \{ z \geq -1.28 \}$



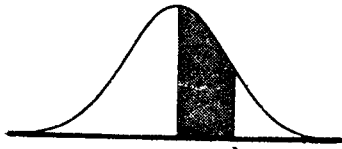
شكل ٢-٧ (و)



شكل ٧-٢ (ز)

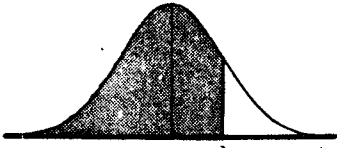
$$\begin{aligned} (ز) \text{ إلى يمين } z = 2.05 \text{ وإلى يسار } z = -1.44 \\ \text{المساحة المطلوبة} = \text{المساحة الكلية} - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 1.44) - \\ (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.05) \\ = 1 - 0.4251 - 0.4798 \\ 1 - 0.9049 = 0.0951 \end{aligned}$$

١٨-٧ حدد قيمة أو قيم z في كل من الحالات من (أ) إلى (ج) ، حيث المساحة تمثل تلك التي تقع تحت المنحنى الطبيعي .



شكل ٧-٣ (أ)

(أ) إذا كانت المساحة بين 0 و z هي 0.3770 في الملحق 11 صفحة ٥٣٣ ، القيمة 0.3770 تتحدد إلى اليمين في الصف المعنون 1.1 وتحت العمود المعنوي 0.6 . وهذا تكون قيمة z المطلوبة هي 1.16 . ومن التماثل $z = -1.16$ قيمة أخرى . وهذا فإن $z = \pm 1.16$



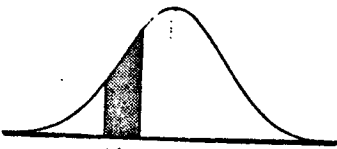
شكل ٧-٣ (ب)

(ب) المساحة إلى يسار z هي 0.8621 بما أن المساحة أكبر من 0.5 ، فإن z يجب أن تكون موجبة . المساحة بين 0 و $z = 0.8621 - 0.5 = 0.3621$ ومنها $z = 1.09$

(ج) المساحة بين -1.5 و z هي 0.0217 إذا كانت z موجبة فإن المساحة يجب أن تكون أكبر من المساحة بين -1.5 و 0 ، وهي 0.4332 ، وهذا فإن z يجب أن تكون سالبة .

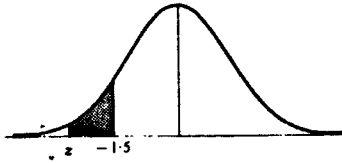
الحالة ١ : z سالبة ولكن إلى يمين -1.5

$$\begin{aligned} \text{المساحة بين } -1.5 \text{ و } z &= \\ (\text{المساحة بين } -1.5 \text{ و } 0) - (\text{المساحة بين } 0 \text{ و } z) &= \\ 0.0217 = 0.4322 - (\text{المساحة بين } 0 \text{ و } z) &= \\ \text{إذن المساحة بين } 0 \text{ و } z &= \\ = 0.4322 - 0.0217 = 0.4115 &= \\ \text{ومنها } z = -1.35 & \end{aligned}$$



شكل ٧-٣ (ج)

الحالة ٢ : z سالبة ولكن إلى يسار -1.5 .



شكل ٣-٧ (ج)

$$\begin{aligned} & \text{المساحة بين } z \text{ و } -1.5 = \\ & \text{(المساحة بين } z \text{ و } 0) - \text{(المساحة بين } -1.5 \text{ و } 0) \end{aligned}$$

$$0.0217 = \text{(المساحة بين } z \text{ و } 0) - 0.4332$$

$$\text{وبهذا فإن المساحة بين } z \text{ و } 0 =$$

$$0.0217 + 0.4332 = 0.4549$$

و $z = -1.694$ باستخدام الاستكمال الخطي ، أو بدرجة

بسيطة من عدم الدقة $z = -1.69$

١٩-٧ أوجد احداثيات المنحنى الطبيعي عند (أ) $z = 0.84$ (ب) $z = -1.27$ (ج) $z = -0.05$

الحل :

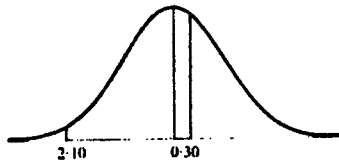
(أ) في الملحق 1 صفحة ٥٣٣ ، اتجه إلى أسفل العمود المعنون z حتى تصل إلى 0.8 . وبعد ذلك اتجه إلى العمود المعنون 4 . نجد أن 0.2803 هو الاحداثي المطلوب .

(ب) بالتماثل ، (الاحداثي عند $z = -1.27$) = (الاحداثي عند $z = 1.27$) = 0.1781

(ج) (الاحداثي $z = -0.05$) = (الاحداثي $z = 0.05$) = 0.3984

٢٠-٧ متوسط طول 500 من أوراق الغار من منطقة تشجير معينة هو 151 mm والانحراف المعياري هو 15 mm . إذا افترضنا أن الأطوال تتوزع توزيعاً طبيعياً ، أوجد عدد الأوراق التي أطوالها (أ) بين 155 mm و 120 mm (ب) أكبر من 185 mm .

الحل :



شكل ٤-٧ (أ)

(أ) الأطوال المسجلة بين 120 و 150 mm من الممكن من الناحية

العملية أن تأخذ أى قيمة بين 119.5 إلى 155.5 mm بافتراض

أنها سجلت إلى أقرب ملليمتر .

$$119.5 \text{ mm معبراً عنها بوحدات معيارية } = (119.5 - 151) / 15 = -2.10$$

$$155.5 \text{ mm معبراً عنها بوحدات معيارية } = (155.5 - 151) / 15 = 0.30$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -2.10$ و $z = 0.30$)

$$= \text{(المساحة بين } z = -2.10 \text{ و } z = 0) + \text{(المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 0.30)$$

$$0.4821 + 0.1179 = 0.6000$$

وبهذا فإن عدد الأوراق التي تقع أطوالها بين 120 و 155 mm هو $500 (0.6000) = 300$

(ب) الأوراق التي طولها أكبر من 185 mm يجب أن يكون مقاييسها على

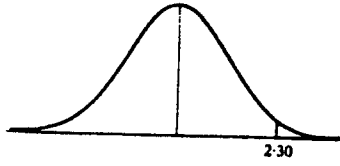
الأقل 185.5 mm

$$(185.5 - 151)/15 = 2.30 = \text{معبرا عنها بوحدات معيارية}$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يمين $z = 2.30$)

$$= (\text{المساحة إلى يمين } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.30)$$

$$0.5 - 0.4893 = 0.0107$$



شكل ٤ - ٧ (ب)

وبهذا فإن عدد الأوراق التي تكون أطولها أكبر من 185 mm هو $500(0.0107) = 5$

إذا كانت L تمثل طول ورقة اختيرت عشوائيا ، فإنه يمكن تلخيص النتائج السابقة باستخدام الاحتمال

بكتابة .

$$\Pr\{L > 185.5\} = 0.0107 \quad , \quad \Pr\{119.5 \leq L \leq 155.5\} = 0.6000$$

٢١-٧ حدد عدد الأوراق في المسألة السابقة التي طولها (١) أقل من 128 mm (ب) 128 mm ،

(ج) أقل من أو يساوي 128 mm .

الحل :

(١) الأوراق التي يكون طولها أقل من 128 mm يجب أن يكون

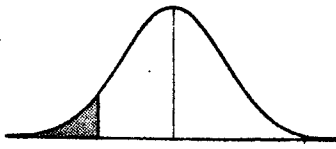
مقياسها أقل من 127.5 mm

$$(127.5 - 151)/15 = -1.57 = \text{معبرا عنها بوحدات قياسية}$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة على يسار $z = -1.57$)

$$= (\text{المساحة على يسار } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -1.57 \text{ و } z = 0)$$

$$0.5 - 0.4418 = 0.0582$$



شكل ٧ - ٥ (١)

وبهذا فإن عدد الأوراق التي يكون طولها أقل من 128 mm هو $500(0.0582) = 29$

(ب) الأوراق التي تقاس 128 mm تقع أطولها بين

127.5 و 128.5 mm . أنظر الشكل ٧ - ٥ (ب) أدناه .

$$(127.5 - 151)/15 = -1.57 = \text{معبرا عنها بوحدات معيارية}$$

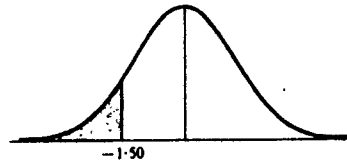
$$(128.5 - 151)/15 = -1.50 = \text{معبرا عنها بوحدات معيارية}$$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة بين $z = -1.57$ و $z = -1.50$)

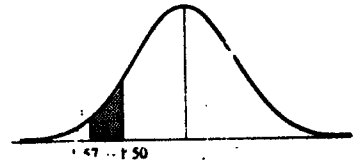
$$= (\text{المساحة بين } z = -1.57 \text{ و } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -1.50 \text{ و } z = 0)$$

$$0.4418 - 0.4332 = 0.0086$$

وهذا فإن عدد الأوراق التي لها 128 mm هو $4 = 500 (0.0086)$



شكل ٧-هـ (ج)



شكل ٧-هـ (ب)

(ج) الأوراق التي يكون طولها أقل من أو يساوي 128 mm يجب أن يكون مقياسها أقل من 128.5 mm .
أنظر الشكل ٧-هـ (ج) .

128.5 mm معبرا عنها بوحدات معيارية $= -1.50 = (128.5 - 151)/15$

نسبة الأوراق المطلوبة = (المساحة إلى يسار $z = -1.50$)

$$= (المساحة إلى يسار $z = 0$) - (المساحة بين $z = -1.50$ و $z = 0$)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

وهذا فإن عدد الأوراق التي لها طول 128 mm أو أقل هو $33 = 500 (0.0668)$

طريقة أخرى : باستخدام الأجزاء (أ) ، (ب)

عدد الأوراق التي لها طول أقل من أو يساوي 128 mm يساوي (عدد الأوراق التي طولها أقل من 128 mm)

$$+ (عدد الأوراق التي طولها 128 mm) = 29 + 4 = 33$$

٧-٢٢ كانت الدرجات في امتحان مفاجئ قصير في البيولوجي 0, 1, 2, ..., 10 نقطة ، معتمدا على عدد الاجابات الصحيحة من 10 من أسئلة . وكان متوسط الدرجات 6.7 وانحرافها المعياري هو 1.2 . إذا افترضنا أن الدرجات تتوزع حسب التوزيع الطبيعي ، حدد (أ) النسبة المئوية لعدد الطلبة الذين سجلوا 6 نقط (ب) أكبر درجة سجلها أقل 10% من طلبة الفصل (ج) أقل درجة سجلها أحسن 10% من طلبة الفصل .

الحل :

(أ) لاستخدام التوزيع الطبيعي لبيانات متقطعة ، نجد أنه من الضروري معالجة هذه البيانات كما لو كانت بيانات متصلة . وهذا فإن تسجيل 6 نقط تعتبر كما لو كانت من 5.5 إلى 6.5 نقطة . أنظر الشكل

٧-٦ (أ) .

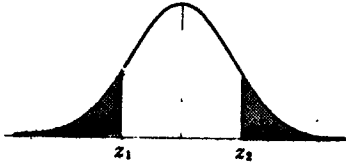
$$5.5 \text{ كوحدة معيارية} = -1.0 = (5.5 - 6.7)/1.2$$

$$6.5 \text{ كوحدة معيارية} = -0.17 = (6.5 - 6.7)/1.2$$

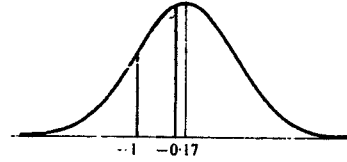
$$\text{النسبة المطلوبة} = (\text{المساحة بين } z = -1 \text{ و } z = -0.17)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = -1 \text{ و } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -0.17 \text{ و } z = 0)$$

$$= 0.2420 - 0.0675 = 0.1745 = 17.45\%$$



شكل ٦-٧ (ب)



شكل ٦-٧ (أ)

(ب) اعتبر أن X_1 هي الدرجة الكبرى المطلوبة و z_1 هي الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من الشكل ٦-٧ (ب) فإن المساحة إلى يسار z_1 هي $0.10 = 10\%$ وهذا فإن (المساحة بين z_1 و 0)
 $0.40 =$ ، و $z_1 = -1.28$ (بشكل قريب جداً) .

إذن $z_1 = (X_1 - 6.7)/1.2 = 1.28$ و $X_1 = 5.2$ أو $X_1 = 5$ إلى أقرب رقم صحيح .

(ج) اعتبر أن X_2 هي الدرجة الصغرى المطلوبة و z_2 هي الدرجة معبراً عنها بوحدات معيارية .
من (ب) ، وبالتماثل ، $z_2 = 1.28$. إذن $z_2 = 1.28$ و $X_2 = 8.2$ أو $X_2 = 8$ إلى أقرب رقم صحيح .

٧ - ٢٣ متوسط القطر الداخلى في عينة من 200 جلبة مستديرة من إنتاج آلة معينة هو 5.02 mm وانحرافها المعياري 0.05 mm والهدف من استخدام هذه الجلب يسمح بانحراف في القطر أقصاه من 4.96 إلى 5.08 mm ، وفيما عدأ ذلك تعتبر الجلبة معيبة . أوجد النسبة المئوية للجلب التالفة في إنتاج هذه الآلة ، مفترضاً أن الأقطار تتوزع توزيعاً طبيعياً .

الحل :

$$4.96 \text{ معبراً عنها بوحدات لمعيارية} = -1.2 = (4.96 - 5.02)/0.05$$

$$5.08 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} = 1.2 = (5.08 - 5.02)/0.05$$

نسبة الجلب غير التالفة

$$(\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -1.2 \text{ و } z = 1.2)$$

$$= (\text{ضعف المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 1.2)$$

$$2 (0.3849) = 0.7698$$

أو 77%

وهذا فإن نسبة الجلب التالفة $100\% - 77\% = 23\%$

لاحظ أنه لو اعتبرنا أن الفترة من 4.96 إلى 5.08 mm تمثل فعلاً الأقطار من 4.955 إلى 5.085 mm

فإن النتيجة السابقة تعدل تعديلاً طفيفاً . وعلى أية حال فإلى رقبين عشرين فإن النتيجة لن تختلف .



شكل ٧ - ٧

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين :

٧-٢ أوجد احتمال الحصول على ما بين 3 و 6 صورة (6 متضمنة في الفترة) في 10 رميات لعملة متوازنة باستخدام

(أ) توزيع ذي الحدين ، (ب) التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين

الحل :

$$\Pr \{ \text{صور 5} \} = {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{252}{2^{10}}$$

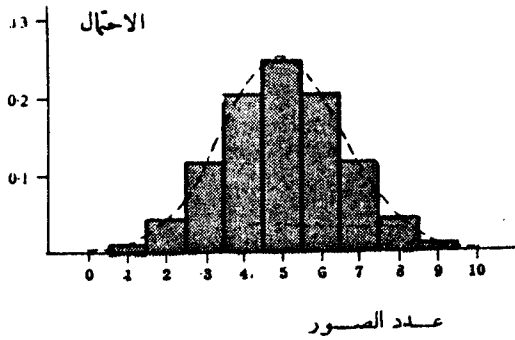
$$\Pr \{ \text{صور 3} \} = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

(أ)

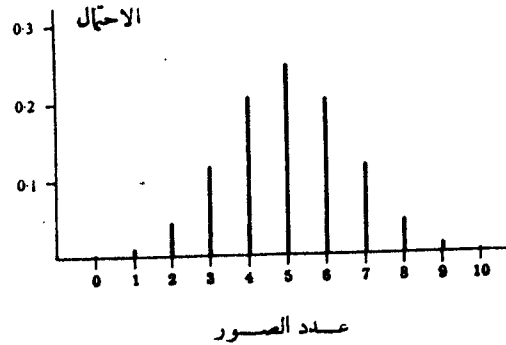
$$\Pr \{ \text{صور 6} \} = {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{2^{10}}$$

$$\Pr \{ \text{صور 4} \} = {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{210}{2^{10}}$$

$$\Pr \{ \text{ما بين 3 و 6 صور بما فيها 6} \} = \frac{120}{2^{10}} + \frac{210}{2^{10}} + \frac{252}{2^{10}} + \frac{210}{2^{10}} = \frac{892}{2^{10}} = 0.7734. \text{ إذن}$$



شكل ٨ - ٧ (ب)



شكل ٨ - ٧ (أ)

(ب) توزيع الاحتمال لعدد الصور في 10 رميات لعملة موضح بيانياً في الأشكال ٨ - ٧ (أ) و ٨ - ٧ (ب) أعلاه ، حيث الشكل ٨ - ٧ (ب) تعامل البيانات كما لو كانت متصلة . والاحتمال المطلوب هو مجموع مساحات المستطيلات المظلة بالشكل ٨ - ٧ (ب) ويمكن تقريبها بالمساحة تحت المنحنى الطبيعي المقابل والمرسوم بخطوط متقطعة .

باعتبار البيانات متصلة ، فإنه يترتب على ذلك اعتبار من 3 إلى 6 صور مثل من 2.5 إلى 6.5 صورة . كذلك فإن

$$\mu = Np = 10\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(10)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.58.$$

$$\text{والآن } 2.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = (2.5 - 5)/1.58 = -1.58$$

$$\text{و } 6.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = (6.5 - 5)/1.58 = 0.95$$

$$\text{الاحتمال المطلوب (المساحة بين } z = -1.58 \text{ و } z = 0.95$$

$$= \text{المساحة بين } z = -1.58 \text{ و } z = 0$$

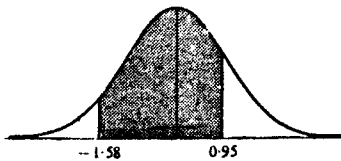
$$\text{(المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 0.95$$

$$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$$

والذي يقارن بشكل جيد مع القيمة الحقيقية 0.7734 التي حصلنا عليه

في الجزء (أ) .

وتزداد درجة الدقة لقيم N الأكبر .



شكل ٩ - ٧

٧-٢٥ عملة متوازنة قلعت 500 مرة . أوجد احتمال أن عدد الصور لن تختلف عن 250
(أ) بأكثر من 10 (ب) بأكثر من 30

الحل :

$$\mu = Np = (500)(\frac{1}{2}) = 250 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(500)(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} = 11.18$$

(أ) المطلوب هو احتمال أن يكون عدد الصور يقع بين 240 و 260 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، يقع بين 239.5 و 260.5 .

$$239.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = -0.94 = (239.5 - 250)/11.18$$

$$260.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = 0.94$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعى بين $z = -0.94$ و $z = 0.94$)

$$= 2(0.3264) = 0.6528 = (z = 0.94 \text{ و } z = 0)$$

(ب) الاحتمال المطلوب هو أن يقع عدد الصور بين 220 و 280 أو ، إذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، بين 219.5 و 280.5

$$219.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = -2.73 = (219.5 - 250)/11.18$$

$$280.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية } = 2.73$$

الاحتمال المطلوب = (ضعف المساحة بين $z = -2.73$ و $z = 0$)

$$2(0.4968) = 0.9936$$

ومن هذا يتضح أنه يمكن أن تكون على درجة كبيرة من الثقة أن عدد الصور لن تختلف عن القيمة المتوقعة

(250) بأكثر من 30 . أما إذا حدث أن كان عدد الصور الفعل هو 280 . فإننا سنعتقد اعتقاداً قوياً بأن العملة متحيزة أى مغشوشة .

٧-٢٦ قلعت زهرة 120 مرة . أوجد احتمال أن يظهر الوجه 4 :

(أ) 18 مرة أو أقل (ب) 14 مرة أو أقل . مفترضاً أن الزهرة غير متحيزة .

الحل :

احتمال ظهور الوجه الذى عليه الرقم 4 هو $p = \frac{1}{6}$ ، واحتمال عدم ظهوره هو $q = \frac{5}{6}$

(أ) الاحتمال المطلوب هو أن يظهر الوجه 4 بين 0 و 18 مرة . وهذا بالضبط يساوى

$${}_{120}C_{18}(\frac{1}{6})^{18}(\frac{5}{6})^{102} + {}_{120}C_{17}(\frac{1}{6})^{17}(\frac{5}{6})^{103} + \dots + {}_{120}C_0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{120}$$

وبما أن العمل المطلوب فى الحساب عمل شاق ، فإننا نستخدم التقريب باستخدام المنحنى الطبيعى .

وإذا اعتبرنا أن البيانات متصلة ، ينتج عن ذلك أن ظهور الوجه 4 بين 0 إلى 18 مرة يمكن اعتباره مثل ظهور هذا الوجه بين 0.5 — إلى 18.5 . كذلك

$$\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(120)(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})} = 4.08 \quad \text{و} \quad \mu = Np = 120(\frac{1}{6}) = 20$$

$$\text{إذن } -0.5 - \text{معبراً عنها بوحدات معيارية} = -5.02 = (-0.5 - 20)/4.08$$

$$18.5 \text{ معبراً عنها بوحدات معيارية} = 0.37$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -5.02 \text{ و } z = -0.37)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -5.02) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -0.37)$$

$$0.5 - 0.1443 = 0.3557$$

(ب) خطوط الحل كما في (أ) ، مستخدمين 14 بدلاً من 18

$$\text{إذن } -0.5 - \text{بوحدات معيارية} = 5.02 ، 14.5 \text{ بوحدات معيارية} = 1.35 = (14.5 - 20)/4.08$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -5.02 \text{ و } z = -1.35)$$

$$= (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -5.02) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = -1.35)$$

$$0.5 - 0.4115 = 0.0885$$

ومن هذا فإنه لو كررنا عينات كل منها مكون من 120 رمية لزهرة ، فإن الوجه 4 يظهر 14 مرة أو أقل في حوالى 1/10 من هذه العينات .

توزيع بواسون :

٧-٢٧ عشرة في المائة من الأدوات المنتجة في عملية صناعية معينة هي أدوات تالفة . أوجد احتمال أن يكون في 10 من الأدوات وحدتان تالفتان بالضبط باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) تقريب بواسون لتوزيع ذى الحدين .

الحل :

$$\text{احتمال وجود أداة تالفة} = p = 0.1$$

$$\text{Pr} \{ 2 \text{ أداة تالفة من } 10 \} = {}_{10}C_2(0.1)^2(0.9)^8 = 0.1937 \text{ or } 0.19 \quad (أ)$$

$$\lambda = Np = 10(0.1) = 1. \quad (ب)$$

$$\text{Pr} \{ 2 \text{ أداة تالفة من } 10 \} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(1)^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e} = 0.1839$$

$$\text{أو } 0.18 ، \text{ باستخدام } e = 2.718$$

بشكل عام فإن التقريب يعتبر جيداً إذا كانت $p \leq 0.1$ و $\lambda = Np \leq 5$.

٧-٢٨ إذا كان احتمال أن يعاني شخص من رد فعل سيء عند حقنه بمصل معين هو 0.001 ، أوجد احتمال أنه من 2000 شخص (أ) 3 بالضبط (ب) أكثر من شخصين ، سيمانون من رد فعل سيء.

الحل :

$$\lambda = Np (2000)(0.001) = 2 \quad \text{حيث} \quad \Pr \{ X \text{ شخص يعاني من رد فعل سيء} \} = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!} = \frac{2^x e^{-2}}{X!}$$

$$\Pr \{ 3 \text{ أشخاص سيمانون من رد فعل سيء} \} = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = \frac{4}{3e^2} = 0.180 \quad (\text{أ})$$

$$\Pr \{ 0 \text{ سيماني} \} = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = \frac{1}{e^2} \quad (\text{ب})$$

$$\Pr \{ 1 \text{ سيماني} \} = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr \{ 2 \text{ سيماني} \} = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{2}{e^2}$$

$$\Pr \{ \text{أكثر من شخصين سيمانون} \} = 1 - \Pr \{ 0 \text{ أو } 1 \text{ أو } 2 \text{ سيمانون} \}$$

$$= 1 - (1/e^2 + 2/e^2 + 2/e^2) = 1 - 5/e^2 = 0.323.$$

لاحظ أنه طبقا لتوزيع ذي الحدين فإن الاحتمالات المطلوبة هي :

$${}_{2000}C_3 (0.001)^3 (0.999)^{1997} \quad (\text{أ})$$

$$1 - \{ {}_{2000}C_0 (0.001)^0 (0.999)^{2000} + {}_{2000}C_1 (0.001)^1 (0.999)^{1999} + {}_{2000}C_2 (0.001)^2 (0.999)^{1998} \} \quad (\text{ب})$$

والتي من الصعب حساب قيمتها مباشرة .

$$p(X) = \frac{(0.72)^x e^{-0.72}}{X!} \quad \text{٧-٢٩ إذا كان توزيع بواسون معطى كالآتي :}$$

$$p(0) \quad (\text{أ}) \quad p(1) \quad (\text{ب}) \quad p(2) \quad (\text{ج}) \quad p(3) \quad (\text{د})$$

الحل :

$$p(0) = \frac{(0.72)^0 e^{-0.72}}{0!} = \frac{(1)e^{-0.72}}{1} = e^{-0.72} = 0.4868 \quad (\text{أ})$$

$$p(1) = \frac{(0.72)^1 e^{-0.72}}{1!} = 0.72 e^{-0.72} = (0.72)(0.4868) = 0.3505 \quad (\text{ب})$$

$$p(2) = \frac{(0.72)^2 e^{-0.72}}{2!} = \frac{(0.5184)e^{-0.72}}{2} = (0.2592)(0.4868) = 0.1262 \quad (\text{ج})$$

$$p(2) = \frac{0.72}{2} p(1) = (0.36)(0.3505) = 0.1262 \quad \text{طريقة أخرى :}$$

$$p(3) = \frac{(0.72)^3 e^{-0.72}}{3!} = \frac{0.72}{3} p(2) = (0.24)(0.1262) = 0.0303 \quad (\text{د})$$

٣٨٥ باستخدام الجدول بالملحق (VI) ، صفحة ٥٣٨

توزيع كثيرات الحدود :

٧-٣٠ صندوق يحتوى على 5 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء و 3 كرات زرقاء . اختيرت كرة عشوائياً من الصندوق وسجل لونها ، ثم أعيدت مرة أخرى للصندوق . أوجد احتمال أن يكون أنه من بين 6 كرات اختيرت بهذه الطريقة يوجد 3 كرات حمراء ، 2 بيضاء و كرة زرقاء .

الحل :

$$Pr\{\text{بيضاء في أى سحبة}\} = 4/12 , Pr\{\text{حمراء في أى سحبة}\} = 5/12 , Pr\{\text{زرقاء في أى سحبة}\} = 3/12 ,$$

$$Pr\{\text{3 حمراء ، 2 بيضاء ، 1 زرقاء}\} = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{4}{12}\right)^3 \left(\frac{5}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = \frac{625}{5184} \quad \text{إذن}$$

توفيق البيانات باستخدام توزيعات نظرية :

٧-٣١ وفق توزيع ذي الحدين لبيانات المسألة ٢ - ١٧ ، الفصل الثاني

الحل :

$$Pr\{X \text{ صورة في رمية 5 عملات}\} = p(X) = {}_5C_x p^x q^{5-x}$$

حيث p احتمال الصورة و q احتمال الكتابة في رمية واحدة لعملة .

$$\mu = Np = 5p \quad \text{من المسألة ١١ - ٧ (أ) متوسط عدد الصور}$$

للتوزيع التكرارى المشاهد أو الفعل ، فإن متوسط عدد الصور هو

$$\frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(38)(0) + (144)(1) + (342)(2) + (287)(3) + (164)(4) + (25)(5)}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2.47$$

بمساواة الوسط النظرى والوسط الفعل ، $5p = 2.47$ أو $p = 0.494$ وهذا فإن توزيع ذي الحدين الذى تم

$$p(X) = {}_5C_x (0.494)^x (0.506)^{5-x} \quad \text{توفيجه معطى ؛}$$

في الجدول ٧ - ٤ تم إدراج هذه الاحتمالات وكذلك الاحتمالات المتوقعة (النظرية) أو التكرارات الفعلية .

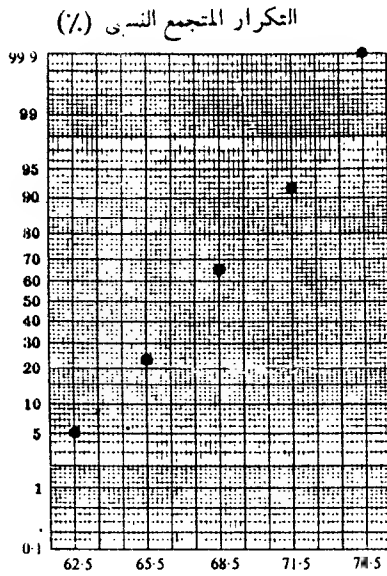
ويظهر في الجدول أن التوفيق جيد . وسوف يبحث جودة التوفيق في المسألة ١٢ - ١٢ ، الفصل الثانى عشر .

جدول ٧ - ٤

عدد الصور X	$Pr\{X \text{ صورة}\}$	التكرار المتوقع	التكرار المشاهد
0	0.0332	33.2 or 33	38
1	0.1619	161.9 or 162	144
2	0.3162	316.2 or 316	342
3	0.3087	308.7 or 309	287
4	0.1507	150.7 or 151	164
5	0.0294	29.4 or 29	25

٣٢-٧ استخدام ورق رسم بياني احتمالي لتحديد ما إذا كان التوزيع التكراري المذكور بالجدول ٢ - ١ صفحة ٤٥ ، من الممكن تقريبه بصورة جيدة من التوزيع الطبيعي .

الحل :



الجدول ٧ - ٥

الوزن (kg)	التكرار المتجمع النسبي (%)
أقل من 62.5	5.0
أقل من 65.5	23.0
أقل من 68.5	65.0
أقل من 71.5	92.0
أقل من 74.5	100.0

الوزن (kg)

شكل ٧ - ١٠

٣٣-٧ وفق منحنى طبيعي لبيانات الجدول ٢ - ١ ، صفحة

الحل :

جدول ٧ - ٦

الوزن (kg)	حدود الفئات X	z لحدود الفئات	المساحة تحت المنحنى الطبيعي من 0 إلى z	المساحة لكل فئة	التكرار المتوقع	التكرار المشاهد
60-62	59.5	-2.72	0.4967	0.0413	4.13 or 4	5
63-65	62.5	-1.70	0.4554	0.2068	20.68 or 21	18
66-68	65.5	-0.67	0.2486	0.3892	38.92 or 39	42
69-71	68.5	0.36	0.1406	0.2771	27.71 or 28	27
72-74	71.5	1.39	0.4177	0.0743	7.43 or 7	8
	74.5	2.41	0.4920			

$$\bar{X} = 67.45 \text{ kg}, \quad s = 2.92 \text{ kg}$$

يمكن تنظيم الحل كما في الجدول ٧ - ٦ . عند حساب z لحدود الفئات ، تستخدم $z = (X - \bar{X})/s$ حيث الوسط \bar{X} والانحراف المعياري s حصلنا عليهما من المسألة ٣ - ٢٢ ، الفصل الثالث والمسألة ٤ - ١٧ الفصل الرابع على الترتيب .

في العمود الرابع من اليسار ، المساحات تحت المنحنى الطبيعي من 0 إلى z حصلنا عليها باستخدام الجدول في الملحق II ، صفحة ٥٣٣ . ومنها نحصل على المساحات تحت المنحنى الطبيعي بين القيم المتتالية لـ z كما في العمود الخامس . وهذه نحصل عليها بطرح المساحات المتتالية في العمود الرابع عندما تكون قيم z المقابلة لها نفس الإشارة ، وبالإضافة عندما تكون قيم z لها إشارة مختلفة (والتي حدثت مرة واحدة في الجدول) . والسبب في ذلك يبدو واضحاً من الشكل البياني .

بضرب القيم في العمود الخامس من اليسار (والذي يمثل التكرارات النسبية) بالتكرار الكلي (في هذه الحالة 100) ينتج عنه التكرارات المتوقعة كما في العمود السادس . حيث يشاهد أنها تتفق مع التكرارات الفعلية أو الملاحظة والموضحة بالعمود رلأخير .

وإذا أردنا ، فإنه يمكن تعديل الانحراف المعياري باستخدام معامل تصحيح شبرد (أنظر المسألة ٤ - ٢١ (أ) ، الفصل الرابع) .

« جودة التوفيق » لهذا التوزيع سوف تدرس في المسألة ١٢ - ١٣ ، الفصل الثاني عشر .

٣٤-٧ الجدول ٧ - ٧ يبين عدد الأيام f في فترة 50 يوماً والتي حدث خلالها X حادث سيارة في مدينة معينة . وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

الحل :

متوسط عدد الحوادث هو

جدول ٧ - ٧

عدد الحوادث X	عدد الأيام f
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1

المجموع 50

$$\lambda = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{(21)(0) + (18)(1) + (7)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{50} = \frac{45}{50} = 0.90$$

وبهذا ، طبقاً لتوزيع بواسون

$$\Pr \{ X \text{ حادث} \} = \frac{(0.90)^X e^{-0.90}}{X!}$$

الجدول ٧ - ٨ يبين احتمالات 0, 1, 2, 3, 4 حادث كما حصلنا عليها من توزيع بواسون السابق ، مقروناً بالعدد المتوقع أو النظري لعدد الأيام والتي وقع خلالها X حادثة (حصلنا عليه بضرب الاحتمالات المقابلة في 50) .

ولتسهيل المقارنة كتب في العمود الأخير العدد الفعلي للأيام

جدول ٧ - ٨

عدد الحوادث X	$\Pr \{ X \text{ حادثة} \}$	العدد المتوقع للأيام	العدد الفعلي للأيام
21	20.33 or 20	0.4066	0
18	18.30 or 18	0.3659	1
7	8.24 or 8	0.1647	2
3	2.47 or 2	0.0494	3
1	0.56 or 1	0.0111	4

لاحظ أن توفيق توزيع بواسون للبيانات المعطاة يعد توفيقاً جيداً .

لتوزيع بواسون الحقيقي ، التباين $\sigma^2 = \lambda$. وحساب التباين للتوزيع المعطى نجد أنه 0.97 . وهذا يقارن بشكل مقبول مع قيمة λ وهي 0.90 ، ويمكن اعتبار ذلك دليلاً آخر للملاءمة توزيع بواسون كتقريب لبيانات العينة .

مسائل اضافية

توزيع ذي الحدين :

- ٣٥-٧ احسب قيمة (أ) $7!$ (ب) $10!/(6!4!)$ (ج) ${}_9C_5$ (د) ${}_{11}C_8$ (هـ) ${}_6C_1$
ج : (أ) 5040 (ب) 210 (ج) 126 (د) 165 (هـ) 9

٣٦-٧ أوجد مفكوك (أ) $(q + p)^7$ ، (ب) $(q + p)^{10}$

ج : (أ) $q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^4 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7$

(ب) $q^{10} + 10q^9p + 45q^8p^2 + 120q^7p^3 + 210q^6p^4 + 252q^5p^5 + 210q^4p^6 + 120q^3p^7 + 45q^2p^8 + 10qp^9 + p^{10}$

٣٧-٧ في رمية عملة متوازنة 6 مرات أوجد احتمال ظهور (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (هـ) 4 (و) 5 صورة
ج : (أ) $1/64$ (ب) $3/32$ (ج) $15/64$ (د) $5/16$ (هـ) $15/64$ (و) $3/32$

٣٨-٧ في رمية واحدة لست عملات غير متحيزة أوجد احتمال ظهور (أ) 2 أو أكثر صورة (ب) أقل من 4 صور
ج : (أ) $57/64$ (ب) $21/32$

٣٩-٧ إذا كانت X تعبر عن عدد الصور في رمية واحدة لأربع عملات متوازنة ،
أوجد (أ) $\Pr\{X = 3\}$ (ب) $\Pr\{X < 2\}$ (ج) $\Pr\{X \leq 2\}$ (د) $\Pr\{1 < X \leq 3\}$
ج : (أ) $1/4$ (ب) $5/16$ (ج) $11/16$ (د) $5/8$

٤٠-٧ في 800 عائلة بكل منها 5 أطفال ، ماهو عدد الأسر المتوقع أن يكون بها (أ) 3 أولاد (ب) 5 بنات
(ج) 2 أو 3 أولاد . مفترضاً أن احتمال وجود بنت أو ولد احتمال متساو .
ج : (أ) 250 (ب) 25 (ج) 500

٤١-٧ أوجد احتمال الحصول على ما مجموعه 11 (أ) مرة واحدة ، (ب) مرتان ، في رمتين لزهرتين متوازنتين .
ج : (أ) $17/162$ (ب) $1/324$

٤٢-٧ أوجد احتمال الحصول على 9 بالضبط مرة واحدة في 3 رميات لزهرتين
ج : $64/243$

٤٣-٧ أوجد احتمال تخمين الإجابة الصحيحة على 6 أسئلة على الأقل من 10 أسئلة في امتحان « خطأ - صواب » .
ج : $193/512$

٧-٤ : مطلوب تأمين باع بوالص تأمين إلى 5 أشخاص ، جميعهم في نفس العمر وفي صحة جيدة . طبقاً لجداول التأمين فإن احتمال بقاء شخص على قيد الحياة له هذه المواصفات 30 عاماً تالياً هو $2/3$. أوجد احتمال أنه في خلال 30 عاماً يبقى على قيد الحياة .

- (أ) كل الـ 5 رجال (ب) على الأقل 3 رجال (ج) رجال فقط (د) على الأقل رجل واحد .
ج : (أ) $32/243$ (ب) $192/243$ (ج) $40/243$ (د) $242/243$

٧-٥ : احسب (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري

(ج) معامل الالتواء باستخدام المزوم (د) معامل التفرطح باستخدام المزوم . لتوزيع ذى الحدين حيث $p = 0.7$ و $N = 60$. فسر النتيجة التي تحصل عليها .

- ج : (أ) 42 (ب) 3.550 (ج) 0.1127 (د) 2.927

٧-٦ : وضع أنه إذا كان توزيع ذى الحدين حيث $N = 100$ متماثل ، فإن معامل التفرطح باستخدام المزوم هو 2.98 .

٧-٧ : احسب (أ) $\Sigma(X - \mu)^3 p(X)$ ، (ب) $\Sigma(X - \mu)^4 p(X)$ لتوزيع ذى الحدين

- ج : (أ) $Npq(q-p)$ (ب) $3N^2p^2q^2 + Npq(1 - 6pq)$

٧-٨ : برهن الصيغة المذكورة في صفحة ١٩٦ لمعاملات الالتواء والتفرطح باستخدام المزوم .

التوزيع الطبيعي :

٧-٩ : في امتحان للاحصاء كان الوسط 78 والانحراف المعياري 10

(أ) أوجد الدرجات المعيارية لطلابين درجاتهما 93 و 62

(ب) أوجد درجات طالبين درجاتهما المعيارية 0.6 - و 1.2

- ج : (أ) 1.5 و 1.6 - (ب) 72 و 90

٧-١٠ : أوجد (أ) الوسط (ب) الانحراف المعياري في امتحان كانت الدرجات به 70 و 88 مقابلة للدرجات المعيارية

0.6 - و 1.4 على الترتيب .

- ج : (أ) 75.4 (ب) 9

٧-١١ : أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين (أ) $z = -1.20$ و $z = 2.40$

(ب) $z = 1.23$ و $z = 1.87$ (ج) $z = -2.35$ و $z = -0.50$

- ج : (أ) 0.8767 (ب) 0.0786 (ج) 0.2991

٥٢-٧ أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي (أ) إلى يسار $z = -1.78$ (ب) إلى يسار $z = 0.56$ (ج) إلى يمين $z = -1.45$ (د) المقابلة لـ $z \geq 2.16$ (هـ) المقابلة لـ $-0.80 \leq z \leq 1.53$ (و) إلى يسار $z = -2.52$ وإلى يمين $z = 1.83$.
ج : (أ) 0.0375 (ب) 0.7123 (ج) 0.9265 (د) 0.0154 (هـ) 0.7251 (و) 0.0395

٥٣-٧ إذا كانت z تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 ، أوجد (أ) $\Pr\{z \geq -1.64\}$ (ب) $\Pr\{-1.96 \leq z \leq 1.96\}$ (ج) $\Pr\{|z| \geq 1\}$ (د) 0.6826 (هـ) 0.9495 (و) 0.9500 (ز) 0.6826
ج : (أ) 0.9495 (ب) 0.9500 (ج) 0.6826

٥٤-٧ أوجد احتمال z بحيث تكون (أ) المساحة إلى يمين z هي 0.2266 (ب) المساحة إلى يسار z هي 0.0314 (ج) المساحة بين -0.23 و z هي 0.5722 (د) المساحة بين 1.15 و z هي 0.0730 (هـ) المساحة بين z و $-z$ هي 0.9000
ج : (أ) 0.75 (ب) -1.86 (ج) 2.08 (د) 0.849 أو 1.625 (هـ) ± 1.645

٥٥-٧ أوجد z_1 إذا كان $\Pr\{z \geq z_1\} = 0.84$ ، حيث يتوزع z توزيعاً طبيعياً متوسطة 0 وتباينه 1 .
ج : 0.995

٥٦-٧ أوجد إحداثيات المنحنى الطبيعي عند (أ) $z = 2.25$ (ب) $z = -0.32$ (ج) $z = -1.18$ (د) 0.0317 (هـ) 0.3790 (و) 0.1989
ج : (أ) 0.0317 (ب) 0.3790 (ج) 0.1989

٥٧-٧ إذا كانت أوزان 300 طالباً تتوزع توزيعاً طبيعياً متوسطة 68.0 kg وانحرافه المعياري هو 3.0 kg كم عدد الطلبة الذين تكون أوزانهم (أ) أكبر من 72 kg (ب) أقل من أو يساوي 64 kg (ج) بين 65 و 71 kg (متضمنة 71) (د) مساوية 68 kg .
مفترضاً أن القياسات مسجلة إلى أقرب كيلوجرام .
ج : (أ) 20 (ب) 36 (ج) 227 (د) 40

٥٨-٧ إذا كانت أوزان رولمان بلى تتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 0.6140 newtons وانحراف معياري 0.0025 newtons ، حدد النسبة المئوية لرولمان البلى الذي يكون وزنه (أ) بين 0.610 و 0.618 newtons (متضمنة 0.618) ، (ب) أكبر من 0.617 newtons (ج) أقل من 0.608 newtons (د) مساو 0.615 newtons
ج : (أ) 93% (ب) 8.1 (ج) 0.47% (د) 15%

٥٩-٧ إذا كان متوسط الدرجات في امتحان نهائي هو 72 والانحراف المعياري 9 . إذا كان الـ 10% الأول من الطلبة يحصلون على تقدير A . ما هي أدنى درجة يمكن أن يحصل عليها الطالب بحيث يحصل أيضاً على A ؟
ج : 84

٦٠-٧ إذا كانت مجموعة من القياسات تتوزع توزيعاً طبيعياً ، ما هي النسبة المئوية فيها والتي تختلف عن الوسط (أ) بأكثر من نصف الانحراف المعياري (ب) أقل من ثلاثة أرباع الانحراف المعياري .

ج : (أ) 61.7% (ب) 54.7%

٦١-٧ إذا كان \bar{X} الوسط الحسابي و s الانحراف المعياري لمجموعة من القياسات تتوزع توزيعاً طبيعياً ، ما هي النسبة المئوية للقياسات التي تقع (أ) داخل المدى $(\bar{X} \pm 2s)$ ، (ب) خارج المدى $(\bar{X} \pm 1.2s)$ (ج) أكبر من $(\bar{X} - 1.5s)$ ؟

ج : (أ) 95.4% (ب) 23.0% (ج) 93.3%

٦٢-٧ في المسألة السابقة أوجد قيمة الثابت α بحيث تكون النسبة المئوية في الحالات (أ) داخل المدى $(\bar{X} \pm \alpha s)$ هي 75%

(ب) أقل من $(\bar{X} - \alpha s)$ هي 22%

ج : (أ) 1.15 (ب) 0.77

التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين :

٦٣-٧ في 200 رمية لعملة أوجد احتمال ما يلي (أ) بين 80 و 120 صورة بما فيها الرقان 80 و 120 (ب) أقل من 90 صورة (ج) أقل من 85 أو أكبر من 115 صورة . (د) 100 صورة بالضبط

ج : (أ) 0.9962 (ب) 0.0687 (ج) 0.0286 (د) 0.0558

٦٤-٧ أوجد احتمال أن يخمن طالب تخميناً صحيحاً الإجابة على (أ) 12 أو أكثر من 20 (ب) 24 أو أكثر من 40 سؤالاً في امتحان « خطأ - صواب » .

ج (أ) 0.2511 (ب) 0.1342

٦٥-٧ آلة تنتج مسامير 10% منها تالف . أوجد احتمال أنه في عينة عشوائية مكونة من 400 مسامير من انتاج هذه الآلة سيكون هنالك .

(أ) على الأكثر 30 (ب) بين 30 و 50 (ج) بين 35 و 45 (د) 55 أو أكثر مسامير تالف .

ج : (أ) 0.0567 (ب) 0.9198 (ج) 0.6404 (د) 0.0079

٦٦-٧ أوجد احتمال الحصول على أكثر من 25 « سبعة » في 100 رمية لزهرق طاولة متوازنتين .

ج : 0.0089

توزيع بواسون :

٦٧-٦ إذا كان 3% من المبات الكهربائية المنتجة في شركة معينة هي لمبات تالفة ، أوجد احتمال أن يظهر في عينة من 100 لمبة (أ) 0 (ب) 1 ، (ج) 3 (د) 4 (هـ) 5 لمبة تالفة .

ج : (أ) 0.04979 (ب) 0.1494 (ج) 0.2241 (د) 0.1680 (هـ) 0.1008

٦٨-٧ في المسألة السابقة ، أوجد احتمال وجود (أ) أكثر من 5 (ب) بين 1 و 3 (ج) أقل من أو يساوي 2 لمبة تالفة .

ج : (أ) 0.0838 (ب) 0.5976 (ج) 0.4232

٦٩-٧ صندوق يحتوى على بلية حمراء وسبع بليات بيضاء . سحبت بلية من الصندوق وسجل لونها . وأعيدت مرة أخرى إلى الصندوق وخلطت البليات خلطاً جيداً . باستخدام (أ) توزيع ذى الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذى الحدين ، أوجد احتمال في 8 من هذه السحبات يتم سحب كرة حمراء مرات بالضبط .

ج : (أ) 0.056 (ب) 0.06131

٧٠-٧ طبقاً لإحصاءات المكتب القوى للإحصاءات الحيوية ، إدارة الصحة والتعليم والخدمات الاجتماعية الأمريكية ، فإن متوسط حوادث الفرق العارضة في السنة بالولايات المتحدة هي 3.0 لكل 100 000 من السكان . في مدينة تعداد سكانها 200 000 أوجد احتمال أن يكون بها .

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 6 (د) 8 (هـ) بين 4 و 8 (و) أقل من 3 حالات غرق عارضة في السنة .

ج : (أ) 0.00248 (ب) 0.04462 (ج) 0.1607 (د) 0.1033 (هـ) 0.6964 (و) 0.0620

٧١-٧ بين الساعة 2 p.m. والساعة 4 p.m. ، كان متوسط عدد طلبات المكالمات التليفونية في الدقيقة في لوحة تليفونات شركة معينة هو 2.5 . أوجد احتمال أنه خلال دقيقة معينة سيكون هناك (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (هـ) 4 أو أقل (و) أكثر من 6 طلبات مكاملة .

ج : (أ) 0.08208 (ب) 0.2052 (ج) 0.2565 (د) 0.2138 (هـ) 0.8911 (و) 0.0142

توزيع كثيرات الحدود :

٧٢-٧ زهرة متوازنة قذفت 6 مرات . أوجد احتمال ظهور (أ) 1 «واحد» ، 2 «اثنان» ، 3 «ثلاثة» . (ب) كل جانب يظهر مرة واحدة فقط .

ج : (أ) 5/3888 (ب) 5/324

٧٣-٧ صندوق يحتوى على عدد كبير من البلى ألوانه أحمر وأبيض وأزرق وأصفر بنسبة (أصفر) 1 : (أزرق) 2 : (أبيض) 3 : (أحمر) 4 . في 10 سحبات أوجد احتمال أن تكون مكونة من (أ) 4 أحمر ، 3 أبيض ، 2 أزرق ، 1 أصفر (ب) 8 أحمر و 2 أصفر .

ج : (أ) 0.000348 (ب) 0.000295

٧٤-٧ أوجد احتمال عدم الحصول على 1 أو 2 أو 3 في أربع رميات لزهرة متوازنة .
ج : $3/8$

توفيق البيانات باستخدام توزيعات نظرية :

٧٥-٧ وفق توزيع ذى الحدين للبيانات التالية .

X	0	1	2	3	4
f	30	62	46	10	2

$$p(X) = {}_4C_X (0.32)^X (0.68)^{4-X} \quad \text{ج :}$$

التكرارات المتوقعة هي 32, 60, 43, 13, 2 على الترتيب .

٧٦-٧ باستخدام ورق الرسم البياني الاحتمالي حدد ما إذا كانت بيانات المسألة ٣-٩٥ بالفصل الثالث يمكن تقريبها بدقة بالتوزيع الطبيعي .

٧٧-٧ وفق توزيع طبيعي لبيانات المسألة ٣-٩٥ بالفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 0.6 and 2.7, 7.6, 13.7, 15.9, 12.0, 5.5, 1.7 على الترتيب .

٨٧-٧ وفق توزيع طبيعي لبيانات المسألة ٣-٩١ ، الفصل الثالث .

ج : التكرارات المتوقعة 1.0 and 3.1, 9.4, 21.1, 36.6, 49.0, 50.2, 39.5, 23.9, 11.1, 4.0, 1.1 على الترتيب .

٧٩-٧ وفق توزيع بواسون لبيانات المسألة ٧-٥٧ وقارن ذلك بالتوفيق الذي حصلت عليه باستخدام توزيع ذى الحدين .

ج : التكرارات المتوقعة 4.7 and 14.6, 34.2, 53.4, 41.7 على الترتيب .

٨٥-٧ في 01 وحدات من وحدات الفرسان بالجيش البروسي كان عدد

الوفيات الناتجة من رفسة حصان في كل وحدة على مدى 20 سنة من

1875 — 1894 كما هو مبين بالجدول .

X	0	1	2	3	4
f	109	65	22	3	1

وفق توزيع بواسون لهذه البيانات .

ج : $p(X) = \frac{(0.61)^X e^{-0.61}}{X!}$ التكرارات المتوقعة هي 0.7, 4.1, 20.2, 66.3, 108.7 على الترتيب .

الفصل الثامن

مبادئ نظرية العينات

نظرية العينات :

نظرية العينات هي دراسة للعلاقة الموجودة بين مجتمع والعينات المسحوبة من هذا المجتمع . وهذه لها أهمية كبيرة من كثير في الأمور . على سبيل المثال فإنها مفيدة في تقدير الكيات غير المخلومة للمجتمع (مثل متوسط المجتمع ، تباينه ، . . وغير ذلك) . والتي تسمى بمعال المجتمع أو باختصار ، المعالم ، وذلك من معرفة الكيات المقابلة لها في العينة (مثل متوسط العينة ، تباينها ، . . وغير ذلك) ، والتي تسمى بالإحصائيات المستخرجة من العينة أو باختصار إحصائيات . وسوف تدرس مشاكل التقدير في الفصل التاسع .

وتفيد نظرية العينات في تحديد ما إذا كانت الاختلافات المشاهدة بين عينتين ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى اختلافات معنوية فعلا . هذه الأسئلة ، على سبيل المثال ، تظهر عند اختبار مصل جديد لعلاج مريض معين أو عند تقرير ما إذا كانت عملية صناعية معينة أحسن من عملية أخرى . إجابات هذه الأسئلة متضمنة في استخدام ما يسمى بالاختبارات المعنوية والفروض والتي لها أهميتها في نظرية اتخاذ القرارات . وهذه سوف تدرس في الفصل العاشر .

وبشكل عام ، فإن دراسة الاستدلال الخاص بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة منه ، مع المؤشرات الخاصة بدرجة دقة الاستدلال باستخدام نظرية الاحتمال ، يسمى بالاستدلال الإحصائي .

المعاينة العشوائية . الأرقام العشوائية :

لضمان أن تكون الاستنتاجات المعتمدة على نظرية العينات والاستدلال الإحصائي سليمة ، فإن العينات يجب أن تختار بحيث تكون ممثلة للمجتمع . وتسمى دراسة طرق المعاينة والمشاكل المتصلة بها بتصميم التجارب .

أحد طرق الحصول على عينة ممثلة هو استخدام أسلوب يسمى بالمعاينة العشوائية . والتي طبقاً لها تكون لكل مفردة المجتمع نفس الفرصة في أن تكون ضمن العينة . أحسد الأساليب في الحصول على عينة عشوائية هو إعطاء رقم لكل مفردة في المجتمع ، وتكتب هذه الأرقام على قطع صغيرة من الورق ، وتوضع في وعاء وتسحب الأرقام من هذا الوعاء ، على أن يراعى أن تخلط هذه الأرقام خلطاً جيداً قبل كل عملية سحب . ويمكن إحلال هذه الطريقة بطريقة أخرى باستخدام جداول الأرقام العشوائية (أنظر صفحة ٥٣٩) والتي صممت خصيصاً لهذا الغرض . أنظر المسألة ٨-٦ .

المعاينة بازجاء وبدون ارجاع :

في سحب رقم من الوعاء ، فإنه يكون لنا الخيار في إرجاع هذا الرقم أو عدم إرجاعه قبل إجراء السحبة التالية . في حالة الأول فإن الرقم يمكن أن يظهر مرات أخرى ، بينما في الطريقة الثانية يمكن أن يظهر الرقم مرة واحدة فقط . في العينات التي يمكن أن

نختار فيها مفردات المجتمع أكثر من مرة تسمى بالمعاينة بإرجاع ، بينما إذا كانت المفردة في المجتمع لا يمكن اختيارها أكثر من مرة فتسمى المعاينة بدون إرجاع .

المجتمعات إما تكون محدودة أو غير محدودة . فعلى سبيل المثال ، لو سحبنا كرات سحباً متتالياً بدون إرجاع من وعاء يحتوي على 100 كرة فإننا نعلم ، أو نسحب عينة من مجتمع محدود ، بينما لو قذفنا عملة 50 مرة وحسبنا عدد الصور ، فإننا نعلم من مجتمعاً غير محدود .

في المجتمع المحدود حيث تسحب العينة مع الإرجاع يمكن اعتباره من الناحية النظرية ، مجتمعاً غير محدود حيث أن أى عدد من العينات يمكن سحبه بدون أن يستنفد المجتمع . لأغلب الأغراض العملية ، يمكن اعتبار المعاينة من مجتمع محدود ولكنه كبير مثل المعاينة من مجتمع غير محدود .

توزيعات المعاينة :

أعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم N والتي يمكن سحبها من مجتمع معين (أما بإرجاع أو بدون إرجاع) . من كل عينة يمكننا حساب إحصائية ، مثل الوسط الحسابي . الانحراف المعياري ، وغيرها . والذي سيختلف من عينة إلى أخرى . وهذه الطريقة نحصل على توزيع الإحصائية الذي يسمى توزيع المعاينة لهذه الإحصائية .

على سبيل المثال لو كانت الإحصائية المستخدمة هي الوسط الحسابي للعينة ، فإن توزيعها يسمى توزيع العينة للأوساط أو توزيع المعاينة للوسط الحسابي . وبنفس الصورة ، يمكن أن نحصل على توزيعات المعاينة للانحراف المعياري ، التباين ، الوسيط ، النسب ، وغيرها .

ولكل توزيع معاينة ، يمكن أن نحسب له الوسط الحسابي ، الانحراف المعياري ، وغير ذلك . وهذا يمكن أن نتحدث عن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الحسابية ، وغيرها .

توزيع المعاينة للأوساط :

إذا افترضنا أن كل العينات الممكنة ذات الحجم N سحبت بدون إرجاع من مجتمع محدود حجمه $N_p > N$. وإذا رمزنا للوسط الحسابي لتوزيع المعاينة بالرمز \bar{x} ، والانحراف المعياري بالرمز $\sigma_{\bar{x}}$ والوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ والانحراف المعياري بالرمز σ ، فإن

$$(1) \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} \quad , \quad \mu_{\bar{x}} = \mu$$

إذا كان المجتمع غير محدود أو كان السحب بإرجاع ، فإن النتيجة السابقة تختصر . إلى

$$(2) \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad , \quad \mu_{\bar{x}} = \mu$$

ولقيم N الكبيرة ($N \geq 30$) فإن توزيع المعاينة للأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بمتوسط \bar{x} وانحراف معياري $\sigma_{\bar{x}}$ وذلك بصرف النظر عن المجتمع (مادام متوسط تباين المجتمع محدودين و كان حجم المجتمع ضعف حجم العينة على الأقل) .

هذه النتيجة للمجتمعات غير المحدودة هي حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية المعروفة في النظرية المتقدمة للاحتمال والتي تثبت أن دقة التقريب تزداد كلما زادت N . وهذه يشار إليها أحياناً بأن توزيع المعاينة يؤل إلى التوزيع الطبيعي .

في الحالة التي يتوزع فيها المجتمع توزيعاً طبيعياً ، فإن توزيع المعاينة للاوساط يتوزع أيضاً توزيعاً طبيعياً حتى ولو كانت N صغيرة (بمعنى $N < 30$) .

توزيع المعاينة لنسب :

افترض مجتمعاً غير محدود وأن احتمال وقوع حدث (تسمى نجاحه) هو p بينما احتمال وعدم وقوعه هو $q = 1 - p$.
على سبيل المثال يمكن أن يكون المجتمع هو كل الرميات الممكنة لعملة متوازنة حيث احتمال الحدث « صورة » هو $p = 1/2$.
اعتبر جميع العينات الممكنة ذات الحجم N والمسحوبة من هذا المجتمع ، ولكل عينة حدد نسبة النجاح P . في حالة العملة .
 P هي نسبة ظهور الصورة في N رمية . ثم نحصل توزيع المعاينة للنسب حيث متوسطه μ_p وانحرافه المعياري σ_p معطيان بالمعادلتين .

$$(٢) \quad \sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{N}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad , \quad \mu_p = p$$

والذي يمكن الحصول عليها من (٢) بكتابة $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$.

لقيم N الكبيرة ($N \geq 30$) يقترب توزيع المعاينة بشكل كبير من التوزيع الطبيعي . لاحظ أن المجتمع يتوزع توزيع ذي الحدين :

المعادلة (٣) صالحة أيضاً للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بإرجاع .

وبالنسبة للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون ارجاع فإن المعادلات (٣) تستبدل بالمعادلات (١) حيث $\mu = p$ و $\sigma = \sqrt{pq}$.

لاحظ أن المعادلات (٣) يمكن الحصول عليها بصورة أسهل بقسمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري $(Np$ و \sqrt{Npq} لتوزيع ذي الحدين على N (أنظر الفصل السابع) .

توزيع المعاينة للفروق والمجموع :

افترض أننا قد أعطينا مجتمعين . لكل عينة حجمها N_1 مسحوبة من المجتمع الأول احسب الإحصائية S_1 . وهذا ينتج توزيع المعاينة للإحصائية S_1 التي وسطها الحسابي μ_{S_1} وانحرافها المعياري σ_{S_1} . كذلك ، لكل عينة حجمها N_2 مسحوبة من المجتمع الثاني نحسب لها الإحصائية S_2 . وهذا ينتج توزيع المعاينة للإحصائية S_2 التي وسطها الحسابي μ_{S_2} وانحرافها المعياري σ_{S_2} . ومن جميع التوافيق الممكنة لهذه العينات يمكن الحصول على توزيع الفرق ، $S_1 - S_2$ ، والذي يسمى توزيع المعاينة للفرق بين الإحصائيتين . ويرمز للوسط الحسابي لتوزيع المعاينة هذا بالرمز $\mu_{S_1-S_2}$ ، وانحرافه المعياري بالرمز $\sigma_{S_1-S_2}$ ، ويعرفان بالمعادلتين :

$$(٤) \quad \mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \quad , \quad \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

وهذا تحت شرط أن العينات المختارة لاتعتمد بأى طريقة على بعضها ، بمعنى ، أن العينات مستقلة .

إذا كانت S_1 و S_2 هي الأوساط الحسابية للعينات من المجتمعين ، والذي سوف نرمز لهما بالرموز \bar{X}_1 و \bar{X}_2 ، فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط للمجتمعات غير المحدودة والتي وسطها وانحرافها المعياري هي على الترتيب μ_1, σ_1 و μ_2, σ_2 له وسط حسابي وانحراف معياري معرف كالآتي :

$$(٥) \quad \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} \quad , \quad \mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

باستخدام المعادلة (٢) . وهذه النتيجة صالحة للمجتمعات المحدودة إذا كان السحب بارجاع . ويمكن الحصول على نتائج مشابهة للمجتمعات المحدودة عندما تكون المعاينة بدون ارجاع باستخدام المعادلات (١) .

ويمكن الحصول على نتائج مقابلة لتوزيع المعاينة للفرق بين النسب من مجتمعين يتوزعان توزيع ذي الحدين بمعامل p_1, q_1 و p_2, q_2 على الترتيب .

في هذه الحالة S_1 و S_2 تقابل نسب النجاح ، P_1 و P_2 والمعادلات (٤) تغطي النتائج .

$$(٦) \quad \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{N_1} + \frac{p_2 q_2}{N_2}} \quad , \quad \mu_{P_1 - P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2$$

إذا كانت كل من N_1 و N_2 كبيرة ($N_1, N_2 \geq 30$) فإن توزيع المعاينة للفرق بين الأوساط أو النسب يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي .

وقد يكون من المفيد أحياناً الحديث عن توزيع المعاينة لمجموع إحصائيتين .

ويعطى المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع بالمعادلتين .

$$(٧) \quad \sigma_{S_1 + S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \quad , \quad \mu_{S_1 + S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2}$$

مفترضين أن البيانات مستقلة .

الخطأ المعياري :

الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة لإحصائية يسمى غالباً بالخطأ المعياري . .

في الجداول ٨ - ١ أدرجنا الأخطاء المعيارية لتوزيعات المعاينة لإحصائيات مختلفة تحت شرط المعاينة العشوائية من مجتمع غير محدود (أو كبير جداً) أو المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود . كذلك أدرجنا ملاحظات خاصة بالشروط التي يجب توافرها حتى تكون النتائج صحيحة وتعليقات أخرى لها صلة بالموضوع .

الكميات $\bar{X}, P, m, \mu, \sigma, p, \mu_r, \sigma_r$ تعبر على الترتيب (مقروءة من الشمال إلى اليمين) عن الوسط الحسابي، الانحراف المعياري، النسبة، العزم الرأى حول الوسط الحسابي وذلك للمجتمع ثم الوسط الحسابي والانحراف المعياري، النسبة، العزم الرأى حول الوسط الحسابي للعينة .

ومن الملاحظ أنه إذا كان حجم العينة N كبير بدرجة كافية ، فإن توزيعات المعاينة ستكون التوزيع الطبيعي أو قريباً من التوزيع الطبيعي .

ولهذا السبب تعرف الطريقة بطريقة العينات ذات الحجم الكبير . ولكن عندما تكون $N < 30$ فإن العينات تسمى بالعينات الصغيرة . وسوف تدرس نظرية العينات الصغيرة أو النظرية الدقيقة للعينات ، كما تسمى أحياناً .

وعندما تكون معالم المجتمع مثل σ, p, μ_r غير معلومة فإنه يمكن تقديرها بدقة بالمقاسير المحسوبة من العينة ، بالتحديد $s = \sqrt{N/(g-1)s}$, P and m_r إذا كان حجم العينة كبيراً بصورة كافية .

جداول ٨ - ١

الخطأ المعياري لبعض توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة	الخطأ المعياري	ملاحظة خاصة
الأوساط	$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$	هذه صحيحة للعينات الصغيرة والكبيرة . توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع الطبيعي عندما تكون $N \geq 30$ حتى ولو كان المجتمع غير طبيعي . $\mu_x = \mu$ وهو متوسط المجتمع في جميع الحالات .
النسب	$\sigma_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = \sqrt{\frac{pq}{N}}$	الملاحظات التي ذكرت في الأوساط تنطبق هنا كذلك . $\mu_p = p$ في جميع الحالات .
الانحرافات المعيارية :	$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \quad (١)$ $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4N\mu_2}} \quad (٢)$	لقيم $N \geq 100$ ، فإن توزيع المعاينة لـ s يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي σ_s المعطاة في (١) سليمة إذا كان المجتمع طبيعي (أو قريب من التوزيع الطبيعي) . وإذا كان التوزيع غير طبيعي فإن (٢) يمكن استخدامها . لاحظ أن (٢) تختصر لتصير (١) عندما تكون $\mu_2 = \sigma^2$ و $\mu_4 = 3\sigma^4$ ، وهذا صحيح عندما يكون المجتمع طبيعياً . عندما تكون $N \geq 100$ ، فإن $\mu_s = \sigma$ بشكل قريب جداً .

لقيم $N \geq 30$ ، فإن توزيع المعاينة للوسيط يكون قريباً جداً من التوزيع الطبيعي . النتيجة المعطاة صحيحة فقط إذا كان المجتمع طبيعياً (أو طبيعي بصورة تقريبية) .
 $\mu_{med.} = \mu$

$$\sigma_{med.} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2N}} = \frac{1.2533\sigma}{\sqrt{N}}$$

توزيع المعاينة	الخطأ المعياري	ملاحظة خاصة
الربيع الأول والربيع الثالث	$\sigma_{a_1} = \sigma_{a_3} = \frac{1.3626\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . تقرب من الربيع الأول والثالث للمجتمع . لاحظ أن $\sigma_{a_2} = \sigma_{med}$.
المتينات	$\sigma_{D_1} = \sigma_{D_9} = \frac{1.7094\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_2} = \sigma_{D_8} = \frac{1.4288\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_3} = \sigma_{D_7} = \frac{1.3180\sigma}{\sqrt{N}}$ $\sigma_{D_4} = \sigma_{D_6} = \frac{1.2680\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك μD_1 و $\mu D_2, \dots$ تقرب بدرجة كبيرة من العشر الأول ، والثاني ... للمجتمع . لاحظ أن $\sigma_{D_5} = \sigma_{med}$.
نصف المدى الطبيعي	$\sigma_a = \frac{0.7867\sigma}{\sqrt{N}}$	الملاحظات التي أبديت على الوسيط تنطبق هنا كذلك . μQ تقرب بدرجة كبيرة من نصف المدى الربيعي للمجتمع .
التباين	$\sigma_s = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{N}} \quad (1)$ $\sigma_s = \sqrt{\frac{\mu_4 - \mu_2^2}{N}} \quad (2)$	الملاحظات التي أبديت على الانحراف المعياري تنطبق كذلك . لاحظ أن (٢) ينتج عنها (١) إذا كان المجتمع طبيعياً . $\mu s_2 = \sigma^2(N-1)/N$ والذي يقترب بدرجة كبيرة من σ^2 لقيم N الكبيرة .
معاملات الاختلاف	$\sigma_v = \frac{v}{\sqrt{2N}} \sqrt{1+2v^2}$	هنا $v = \sigma/\mu$ هو معامل اختلاف المجتمع . النتيجة المعطاة تكون صحيحة إذا كان التوزيع طبيعي أو قريب من الطبيعي وكانت $N \geq 100$.

مسائل محلولة

توزيع العينات للأوساط :

٨ - ١ يتكون مجتمع من خمسة أرقام 2, 3, 6, 8, 11 . اختر كل العينات الممكنة التي يكون حجمها اثنين والتي يمكن
صحبها مع الإرجاع من هذا المجتمع . أوجد (أ) متوسط المجتمع . (ب) الانحراف المعياري للمجتمع ، (ج) متوسط توزيع
المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط ، أي ، الخطأ المعياري للأوساط .

الحل :

$$\mu = \frac{2 + 3 + 6 + 8 + 11}{5} = \frac{30}{5} = 6.0 \quad (أ)$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5} = \frac{16 + 9 + 0 + 4 + 25}{5} = 10.8, \text{ and } \sigma = 3.29. \quad (ب)$$

(ج) هناك 5(5) عينة ذات الحجم اثنين يمكن سحبها مع الإرجاع (بما أن كلا من الأرقام الخمسة التي يمكن سحبها في المرة الأولى يمكن أن يقترن بأي من الخمسة الأرقام الخمسة في السحب الثانية) . وهذه هي

(2, 2)	(2, 3)	(2, 6)	(2, 8)	(2, 11)
(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(3, 8)	(3, 11)
(6, 2)	(6, 3)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 11)
(8, 2)	(8, 3)	(8, 6)	(8, 8)	(8, 11)
(11, 2)	(11, 3)	(11, 6)	(11, 8)	(11, 11)

والأوساط المقابلة لها هي :

2.0	2.5	4.0	5.0	6.5
2.5	3.0	4.5	5.5	7.0
4.0	4.5	6.0	7.0	8.5
5.0	5.5	7.0	8.0	9.5
6.5	7.0	8.5	9.5	11.0

(١)

والوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\text{متوسط أوساط العينة في (1) أعلاه}}{25} = \frac{150}{25} = 6.0$$

وهذا يوضح حقيقة أن $\mu_{\bar{x}} = \mu$

(د) التباين $\sigma_{\bar{x}}^2$ لتوزيع المعاينة للأوساط نحصل عليه بطرح الوسط من كل رقم في (١) ، وتربيع الناتج ، وجمع الـ 25 رقم الذي حصلنا عليه والقسمه على 25 تكون النتيجة النهائية .

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 135/25 = 5.40 \quad \text{بحيث} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sqrt{5.40} = 2.32$$

وهذا يوضح حقيقة أنه في المجتمعات المحدودة والمتضمنة المعاينة بإرجاع (أو في المجتمعات غير المحدودة) ،

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/N \quad \text{وحيث أن الجانب الأيمن هو } 10.8/2 = 5.40 \text{ ، نتيجة مطابقة للقيمة أعلاه .}$$

٨ - ٢ حل المسألة ٨ - ١ في حالة المعاينة بدون إرجاع .

الحل :

كما في (أ) و (ب) في المسألة ٨ - ١ ، $\sigma = 3.29$ و $\mu = 6$.

(ج) هناك $C_2 = 10$ عينة حجم كل منها اثنان يمكن سحبها بدون إرجاع (هذا يعني أننا نسحب رقماً ثم بعد ذلك نسحب رقماً آخر يختلف عن الرقم الأول) من هذا المجتمع ، على وجه التحديد .

(2, 3), (2, 6), (2, 8), (2, 11), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 8), (6, 11), (8, 11)

اختيار (2, 3) ، على سبيل المثال ، يعتبر مثل اختيار (3, 2) .

الأوساط المقابلة لهذه العينات هي :

$$2.5, 4.0, 5.0, 6.5, 4.5, 5.5, 7.0, 7.0, 8.5, 9.5$$

ووسط توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\mu_x = \frac{2.5 + 4.0 + 5.0 + 6.5 + 4.5 + 5.5 + 7.0 + 7.0 + 8.5 + 9.5}{10} = 6.0$$

يوضح الحقيقة أن $\mu_{\bar{x}} = \mu$

(ج) تباين توزيع المعاينة للأوساط هو

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{(2.5 - 6.0)^2 + (4.0 - 6.0)^2 + (5.0 - 6.0)^2 + \dots + (9.5 - 6.0)^2}{10} = 4.05, \text{ and } \sigma_{\bar{x}} = 2.01$$

$$\frac{10.8}{2} \left(\frac{5-2}{5-1} \right) = 4.05 \quad , \quad \text{حيث أن الجانب الأيمن يساوي} \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N} \left(\frac{N_p - N}{N_p - 1} \right) \quad \text{وهذا يوضح أن}$$

كما حصلنا عليه أعلاه .

٨ - ٣ افترض أن أوزان 3000 طالب في جامعة يتوزع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 68.0 kg وانحراف معياري 3.0 kg . إذا سمحت 80 عينة كل منها مكونة من 25 طالباً ، ماهو الوسط المتوقع والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للوسط إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع ؟

الحل :

عدد العينات ذات الحجم 25 والذي يمكن الحصول عليها نظرياً من مجموعة من 3000 طالب مع الإرجاع هو $(3000)^{25}$ وبدون إرجاع $3000C_{25}$ ، وهو عدد أكبر من 80 . وهذا فإننا لم نحصل على توزيع المعاينة حقيقياً للأوساط ولكن نحصل على توزيع معاينة تجريبي . ورغم ذلك ، فيما أن عدد العينات كبير ، فإننا نتوقع أن يكون هناك اتفاق بين توزيعي المعاينة . وهذا فإن المتوسط المتوقع والانحراف المعياري سيكونان قريبين من نظائرها في التوزيع النظري . وهذا نحصل على

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 68.0 \text{ kg} \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{N} = 3 / \sqrt{25} = 0.6 \text{ kg} \quad (أ)$$

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 68.0 \text{ kg} \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{3}{\sqrt{25}} \sqrt{\frac{3000 - 25}{3000 - 1}} \quad (ب)$$

والذي يختلف قليلاً من 0.6 kg ويمكن بذلك اعتباره لجميع الأغراض العملية مثل نظير في حالة المعاينة بإرجاع .

هذا ويمكن أن نتوقع أن توزيع المعاينة التجريبي للأوساط يتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي الذي وسطه الحساب 68.0 kg وانحرافه المعياري 0.6 kg .

٨ - ٤ في كم من عينات المسألة ٨ - ٣ نتوقع أن نجد الوسط الحساب (أ) بين 66.8 kg و 68.3 kg (ب) أقل من 66.4 kg ؟

الحل :

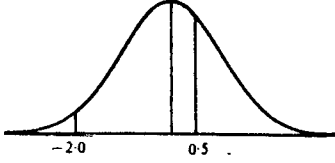
$$z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{X} - 68.0}{0.6} \quad \text{الوسط } \bar{x} \text{ لعينة معبراً عنه بوحدات معيارية في هذه الحالة يعطى بـ}$$

(أ) 66.8 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$(66.8 - 68.0) / 0.6 = -2.0$$

68.3 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$(68.3 - 68.0) / 0.6 = 0.5$$



نسبة العينات التي أوساطها بين 66. kg و 68.3 kg

(المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -2.0$ و $z = 0.5$) =

+ (المساحة بين $z = -2$ و $z = 0$) =

+ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 0.5$)

$$0.4772 + 0.1915 = 0.6687 =$$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات = $(80)(0.6687) = 53$

(ب) 66.4 معبراً عنها بوحدات معيارية =

$$66.4 - 68.0) / 0.6 = -2.67$$

نسبة العينات أوساطها أقل من 66.4 kg

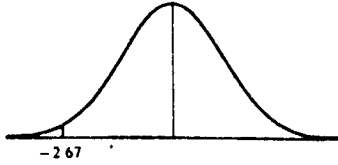
(المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = -2.67$) =

(المساحة إلى يسار $z = 0$) - (المساحة بين $z = -2.67$ و

$z = 0$)

$$0.5 - 0.4962 = 0.0038$$

وبهذا يكون العدد المتوقع للعينات = 0 أو $(80)(0.0038) = 0.304$



٨ - ٥ خمسة كرة حديدية متوسطها 5.02 N وانحرافها المعياري 0.30 N ، في عينة عشوائية من 100 كرة حديدية اختيرت من هذه المجموعة أوجد احتمال أن تكون أوزانها مجتمعة (أ) بين 496 N و 500 N (ب) أكثر من 510 N .

الحل :

لتوزيع المعاينة للأوساط $\mu_{\bar{x}} = \mu = 5.02 N$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}} \sqrt{\frac{500 - 100}{500 - 1}} = 0.027.$$

(أ) الوزن المجمع سوف يقع بين 496 N و 500 N إذا كان

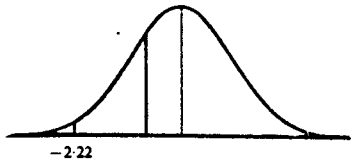
متوسط وزن الـ 100 كرة سيقع بين 4.96 N و 5.00

4.96 بوحدات معيارية =

$$(4.96 - 5.02) / 0.027 = -2.22$$

5.00 بوحدات معيارية =

$$(5.00 - 5.02) / 0.027 = -0.74$$



الفصل الثامن : مبادئ نظرية العينات

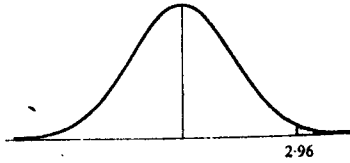
الاحتمال المطلوب :

$$\begin{aligned}
 &= (\text{المساحة بين } z = -0.74 \text{ و } z = -2.22) \\
 &= (\text{المساحة بين } z = -2.22 \text{ و } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = -0.74 \text{ و } z = 0) \\
 &= 0.4868 - 0.2704 = 0.2164
 \end{aligned}$$

(ب) الوزن المجمع سوف يزيد عن 510 N إذا كان متوسط وزن الـ 100 كرة يتجاوز 5.10 N بوحدة معيارية =

$$(5.10 - 5.02) / 0.227 = 2.96$$

الاحتمال المطلوب :



$$\begin{aligned}
 &= (\text{المساحة إلى يمين } z = 2.96) \\
 &= (\text{المساحة يمين } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.6) \\
 &= 0.5 - .4985 = 0.0015
 \end{aligned}$$

أى أن هناك 3 فرص فقط من 2000 في الحصول على عينة من 100 كرة وزنها المجمع يتجاوز 510 N.

الأرقام العشوائية :

٨ - ٦ (أ) وضع كيف يمكن اختيار 30 عينة عشوائية حجم كل منها 4 طلبة (باوجاع) من جدول الأوزان في صفحة ٥ ؛ باستخدام الأرقام العشوائية .

(ب) أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط في (أ)
(ج) قارن النتيجة في (ب) بالقيم النظرية ، اشرح أى اختلافات بين الإثنين .

الحل :

جدول ٨ - ٢

الوزن (kg)	التكرار	رقم المعاينة
60-62	5	00-04
63-65	18	05-22
66-68	42	23-64
69-71	27	65-91
72-74	8	92-99

(أ) استخدام عديدين لترقيم كل من المائة طالب

00, 01, 02, ... 99 (أنظر الجدول ٨ - ٢) .

وبهذا فإن الـ 5 طلبة الذين تكون أوزانهم

60-62 kg يرقموا 00-04 ، والـ 18 طالب

الذين تكون أوزانهم 63-65 kg يرقموا 05-22

وهكذا . ورقم كل طالب يسمى برقم المعاينة .

ثم نقوم بسحب رقم المعاينة من جدول الأرقام

العشوائية (صفحة ٣٩) . من الصف الأول نجد

الأرقام 51, 77, 27, 46, 40 وغيرها والذي نستعملها

كأرقام معاينة ، وكل منها ينتج وزن طالب معين .

مثلا 51 تقابل وزن طالب في الفئة 68 kg — 66 وتأخذه يساوى 67 (مركز الفئة) .
كذلك 46, 27, 77 ينتج عنها أوزان 67, 67, 70 . بهذا الأسلوب نحصل على الجدول ٨ - ٣ والذي
يبين رقم المعاينة المسحوب ، الأوزان المقابلة له ومتوسط الوزن من الـ 30 عينة . ويجب أن نشير أنه على الرغم
من أننا عند استخدامنا لجدول الأرقام العشوائية بدأنا بالصف الأول فإنه من الممكن أن نبدأ من أى مكان
وأن نستخدم أى نمط خاص في استعمال الجدول .

جدول ٨ - ٣

رقم المعاينة المسحوب	الأوزان المقابلة	متوسط الوزن	رقم المعاينة المسحوب	الأوزان المقابلة	متوسط الوزن
16. 11, 64, 55, 58	64, 67, 67, 67	66.25	1. 51, 77, 27, 46	67, 70, 67, 67	67.75
17. 70, 56, 97, 43	70, 67, 73, 67	69.25	2. 40, 42, 33, 12	67, 67, 67, 64	66.25
18. 74, 28, 93, 50	70, 67, 73, 67	69.25	3. 90, 44, 46, 62	70, 67, 67, 67	67.75
19. 79, 42, 71, 30	70, 67, 70, 67	68.50	4. 16, 28, 98, 93	64, 67, 73, 73	69.25
20. 58, 60, 21, 33	67, 67, 64, 67	66.25	5. 58, 20, 41, 86	67, 64, 67, 70	67.00
21. 75, 79, 74, 54	70, 70, 70, 67	69.25	6. 19, 64, 08, 70	64, 67, 64, 70	66.25
22. 06, 31, 04, 18	64, 67, 61, 64	64.00	7. 56, 24, 03, 32	67, 67, 61, 67	65.50
23. 67, 07, 12, 97	70, 64, 64, 73	67.75	8. 34, 91, 83, 58	67, 70, 70, 67	68.50
24. 31, 71, 69, 88	67, 70, 70, 70	69.25	9. 70, 65, 68, 21	70, 70, 70, 64	68.50
25. 11, 64, 21, 87	64, 67, 64, 70	66.25	10. 96, 02, 13, 87	73, 61, 64, 70	67.00
26. 03, 58, 57, 93	61, 67, 67, 73	67.00	11. 76, 10, 51, 08	70, 64, 67, 64	66.25
27. 53, 81, 93, 88	67, 70, 73, 70	70.00	12. 63, 97, 45, 39	67, 73, 67, 67	68.50
28. 23, 22, 96, 79	67, 64, 73, 70	68.50	13. 05, 81, 45, 93	64, 70, 67, 73	68.50
29. 98, 56, 59, 36	73, 67, 67, 67	68.50	14. 96, 01, 73, 52	73, 61, 70, 67	67.75
30. 08, 15, 08, 84	64, 64, 64, 70	65.50	15. 07, 82, 54, 24	64, 70, 67, 67	67.00

جدول ٨ - ٤

وسط العينة	الحزم	f	u	f u	f u ²
64.00	/	1	-4	-4	16
64.75		0	-3	0	0
65.50	//	2	-2	-4	8
66.25	///	6	-1	-6	6
A → 67.00	////	4	0	0	0
67.75	////	4	1	4	4
68.50	/// //	7	2	14	28
69.25	///	5	3	15	45
70.00	/	1	4	4	16
		Σf = N = 30		Σfu = 23	Σfu ² = 123

(ب) الجدول ٨ - ٤ : يوضح التوزيع التكرارى للوسط الحسابى للأوزان في العينات والتي حصلنا عليه في (أ) .
هذا هو توزيع المعاينة للأوساط . الوسط الحسابى والانحراف المعياري نحصل عليهما باستخدام طريقة الترميز
للمشار إليها في الفصل الثالث والرابع

$$\text{الوسط الحسابى} = A + cu = A + \frac{c \sum fu}{N} = 67.00 + \frac{(0.75)(23)}{30} = 67.58 \text{ kg}$$

$$\text{الانحراف المعياري} = c\sqrt{u^2 - \bar{u}^2} = c\sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = 0.75 \sqrt{\frac{123}{30} - \left(\frac{23}{30}\right)^2} = 1.41 \text{ kg}$$

(ج) الوسط النظري لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعطى بـ μ_p ، يجب أن يساوى وسط المجتمع μ والذي يساوى 67.45 kg (أنظر المسألة ٣ - ٢٢ الفصل الثالث) وهذا يتفق مع القيمة 67.58 kg التي حصلنا عليها في المسألة (ب) .

الانحراف المعياري النظري (الخطأ المعياري) لتوزيع المعاينة للأوساط ، والمعروف بـ σ_p ، يجب أن يساوى σ/\sqrt{N} ، وحيث أن الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 2.92$ kg وبما أن $\sigma/\sqrt{N} = 2.92/\sqrt{4} = 1.46$ kg فإن هذا يتفق مع القيمة 1.41 kg والتي حصلنا عليها في الجزء (ب) .

الفروق ترجع إلى حقيقة أن هناك 30 عينة فقط تم اختبارها وأن حجم هذه العينة يعتبر صغيراً .

توزيع المعاينة للنسب :

٧ - ٨ في 120 رمية لعملة متوازنة أوجد احتمال (أ) بين 40% و 60% ستكون صور (ب) $5/8$ أو أكثر ستكون صور .

الحل :

نعتبر أن الـ 120 رمية للعملة كمينة من المجتمع غير المحدود المكونة من جميع الرميات الممكنة للعملة . في هذا المجتمع تكون احتمال الصورة $p = 1/2$ واحتمال البكثابة $q = 1 - p = 1/2$.

(أ) المطلوب هو أن يكون الصور في الـ 120 رمية بين 48 (40% × 120) و 72 (60% × 120) . سنسير في الحل كما في الفصل السابع ، باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين . وبما أن عدد الصور هو متغير متقطع ، فإننا نطلب احتمال أن يقع عدد الصور بين 47.5 و 72.5 .

$$\mu = Np = 120(1/2) = 60, \text{ and } \sigma = \sqrt{Nqp} = \sqrt{(120)(1/2)(1/2)} = 5.48.$$

$$47.5 \text{ بوحدة معيارية} = (47.5 - 60)/5.48 = -2.28$$

$$72.5 \text{ بوحدة معيارية} = (72.5 - 60)/5.48 = 2.28$$

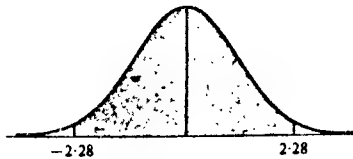
الاحتمال المطلوب :

$$z = -2.28 \text{ (المساحة تحت المنحنى المعتدل بين } z = -2.28 \text{ و } z = 2.28 \text{)}$$

$$z = 2.28$$

$$\times 2 = \text{(المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.28 \text{)}$$

$$2(0.4887) = 0.9774$$



طريقة أخرى :

$$\mu_p = p = 1/2 = 0.50, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{(1/2)(1/2)/120} = 0.0456.$$

$$40\% \text{ معبراً عنها بوحدة معيارية} = (0.40 - 0.50)/0.0456 = -2.19$$

$$60\% \text{ معبراً عنها بوحدة معيارية} = (0.60 - 0.50)/0.0456 = 2.19$$

وهذا فإن الاحتمال المطلوب هو المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $(z = -2.19$ و $z = 2.19)$ $= 2(0.4857) = 0.9714$

على الرغم من أن هذه النتيجة دقيقة إلى رقبين عشريين ، ولكنها لا تتفق بالضبط حيث أننا لم نستخدم الحقيقة

وهي أن النسب في الواقع متغير متقطع . ولأخذ ذلك في الاعتبار نطرح $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ من 0.40

ونضيف $\frac{1}{2N} = \frac{1}{2(120)}$ إلى 0.60 . وهذا فإن النسب المطلوبة معبراً عنها بوحدات قياسية هي ، معلومية أن $1/240 = 0.00417$

$$\frac{0.40 - 0.00417 - 0.50}{0.0456} = -2.28 \text{ and } \frac{0.60 + 0.00417 - 0.50}{0.0456} = 2.28$$

وهذا نصل إلى اتفاق مع الطريقة الأولى .

لاحظ أن $(0.40 - 0.00417)$ و $(0.060 + 0.00417)$ تقابل النسب $47.5/120$ و $72.5/120$ في الطريقة الأولى أعلاه .

(ب) باستخدام الطريقة الثانية في (أ) ، نجد بمعلومية أن $9/8 = 0.6250$

$$= \frac{0.6250 - 0.00417 - 0.50}{-0.0456} = 2.65 \text{ معبراً عنها بوحدات مميارية } = (0.6250 - 0.00417)$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين من $z=2.65$)

$$= (\text{المساحة إلى اليمين من } z = 0) - (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.65) \\ = 0.5 - 0.4960 = 0.0040$$

٨ - ٨ قام كل شخص من مجموعة مكونة من 500 شخص يقذف عملة متوازنة 120 مرة . ما هو العدد المتوقع للأشخاص الذين يقررون أن

(أ) بين 40% و 60% من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

(ب) $9/8$ أو أكثر من رمياتهم أظهرت الصورة ؟

الحل :

هذه المسألة لها علاقة وثيقة بالمسألة السابقة . نعتبر هنا أن هناك 500 عينة ، حجم كل منها 120 ، مسحوبة من مجتمع غير محدود يمثل جميع الرميات الممكنة للعملة .

(أ) الجزء (أ) من المسألة ٨ - ٧ يوضح أنه في جميع العينات الممكنة ، والتي تتكون كل منها من 120 رمية لعملة ، فإنه يمكن أن نتوقع أن نجد 97.74% حيث تكون نسبة ظهور الصورة فيها يقع بين 40% و 60% في 500 عينة يمكن أن نتوقع وجود حوالي 97.74% من 500 أو 489 عينة لها هذه الخاصية . ويترب على ذلك أن حوالي 489 شخص من المتوقع أن يقرروا أن تجربتهم عنهما ما بين 40% إلى 60% صورة .

وجدير بالملاحظة أن $11 = 500 - 489$ شخص من المتوقع أن يقرروا أن نسبة الصورة لا تقع بين 40% و 60% . مثل هؤلاء الأشخاص قد ينتهون إلى عملاتهم غير متوازنة على الرغم من أنها ليست كذلك . وهذا النوع من الخطأ هو المخاطرة التي تظهر كلما تعاملنا مع الاحتمالات .

(ب) بنفس المبررات كما في (أ) ، نستنتج أن $(500)(0.0040) = 2$ شخص سوف يقررون أن $5/8$ أو أكثر من رمياتهم ينتج عنها ظهور الصورة .

٨-٩ وجد أن 2% من الأدوات المنتجة بواسطة إحدى الآلات تالفة . ما هو احتمال أن يكون في شحنة مكونة من 400 وحدة من هذه الأدوات (أ) 2% أو أكثر (ب) 3% أو أقل يظهر أنها تالفة .

الحل :

$$\mu_p = p = 0.02 \text{ and } \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.02(0.98)/400} = 0.14/20 = 0.007$$

(أ) باستخدام التصحيح للمتغيرات المتقطعة ، $1/2N$ ، أن $1/800 = 0.00125$ فإننا نحصل على $(0.03 - 0.00125) / 0.007 = 1.25$ معبراً عنها بوحدات قياسية = 1.25 الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = 1.25$) 0.1056 وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.0764 .

طريقة أخرى :

عدد الأدوات التالفة = 12 (3% من 400) . بافترض أن المتغير متصل ، فإن 12 أو أكثر من الأدوات تعني 11.5 أو أكثر . .

$$\bar{X} = (2\% \text{ of } 400) = 8, \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(400)(0.02)(0.98)} = 2.8.$$

إذن 11.5 بوحدات معيارية = $(11.5 - 8)/2.8 = 1.25$ ، وكما سبق فإن الاحتمال المطلوب هو 0.1056

$$(ب) (0.02 + 0.00125) / 0.007 = 0.18 = \text{معبراً عنها بوحدات قياسية} \\ \text{الاحتمال المطلوب} = \text{« المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار من } z = 0.18 \text{»} \\ = 0.500 + 0.0714 = 0.5714$$

وإذا لم يستخدم التصحيح فإن ما كنا سنحصل عليه هو 0.5000

الطريقة الثانية في الجزء (أ) يمكن أيضاً استخدامها .

٨-١٠ أظهرت نتيجة الانتخابات أن مرشحاً معيناً قد حصل على 46% من الأصوات . في مجموعة مكونة من (أ) 200 ، (ب) 1000 شخص اختيروا بصورة عشوائية من مجتمع الناخبين أوجد احتمال أنها سوف تظهر أغلبية في الأصوات هذا المرشح .

الحل :

$$\mu_p = p = 0.46 \text{ and } \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.46(0.54)/200} = 0.0352 \quad (أ)$$

وبما أن $1/2N = 1/400 = 0.0025$ ، فإن الأغلبية تظهر في العينة إذا كانت النسبة في صالح المرشح هي $0.5025 = (0.50 + 0.0025)$ أو أكثر . (هذه النسبة يمكن الحصول عليها كذلك بالتحقق أن 101 أو أكثر تعبر عن أغلبية ولكن لو أردنا التعبير عن ذلك كتغير متصل فنعتبره 100.5 ، وبهذا فإن النسبة هي $100.5/200 = 0.4025$)

$$\begin{aligned} \text{إذن } 0.5025 \text{ معبراً عنها بوحدة معيارية} &= 1.21 = (0.5025 - 0.46)/0.0352 \\ \text{الاحتمال المطلوب} &= \text{« المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين } (z = 1.21) \\ &= 0.5000 - 0.3869 = 0.1131 \end{aligned}$$

$$\mu_p = p = 0.46, \sigma_p = \sqrt{pq/N} = \sqrt{0.46(0.54)/1000} = \quad (ب)$$

$$\begin{aligned} 0.5025 \text{ معبراً عنها بوحدة معيارية} &= 2.69 = (0.5025 - 0.46)/0.0158 \\ \text{الاحتمال المطلوب} &= \text{« المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين } (z = 2.69) \\ &= 0.5000 - 0.4964 = 0.0036 \end{aligned}$$

توزيع المعاينة لفرق والمجموع :

٨-١١ إذا كان U_1 متغيراً يعبر عن أى عنصر من عناصر المجتمع 3, 7, 8 وكان U_2 متغيراً يعبر عن عناصر المجتمع 2, 4 احسب (أ) μ_{U_1} ، (ب) μ_{U_2} ، (ج) $\mu_{U_1 - U_2}$ ، (د) σ_{U_1} ، (هـ) σ_{U_2} ، (و) $\sigma_{U_1 - U_2}$.

الحل :

$$\mu_{U_1} = U_1 \text{ متوسط المجتمع} = \frac{1}{4} (3 + 7 + 8) = 6 \quad (أ)$$

$$\mu_{U_2} = U_2 \text{ متوسط المجتمع} = \frac{1}{2} (2 + 4) = 3 \quad (ب)$$

(ج) المجتمع المكون من الفروق بين أى عنصر من U_1 وأى عنصر من U_2 هو

$$\begin{array}{ccccc} 3 - 2 & 7 - 2 & 8 - 2 & & 1 & 5 & 6 \\ 3 - 4 & 7 - 4 & 8 - 4 & \text{or} & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\mu_{U_1 - U_2} \text{ (} U - U \text{) متوسط} = \frac{1 + 5 + 6 + (-1) + 3 + 4}{6} = 3 \quad \text{إذن}$$

$$\mu_{U_1 - U_2} = \mu_{U_1} - \mu_{U_2} \quad \text{وهذا يوضح الصيغة العامة}$$

$$\sigma_{U_1}^2 \text{ تباين المجتمع} = U_1 = \frac{(3 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2}{3} = \frac{14}{3}, \text{ or } \sigma_{U_1} = \sqrt{\frac{14}{3}} \quad (د)$$

$$\sigma_{U_2}^2 \text{ تباين المجتمع} = U_2 = \frac{(2 - 3)^2 + (4 - 3)^2}{2} = 1, \text{ or } \sigma_{U_2} = 1 \quad (هـ)$$

$$= \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (6-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{6} = \frac{17}{3}, \text{ or } \sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\frac{17}{3}} \text{ (ج)}$$

$$\sigma_{U_1-U_2} = (U_1 - U_2) \text{ تباين المجتمع} =$$

وهذا يوضح الصيغة العامة للعينات المستقلة $\sigma_{U_1-U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2}$ كما هو موضح في الأجزاء من (د) و (هـ).

٨ - ١٢ إذا كان متوسط العمر الانتاجي للمبات كهربائية من إنتاج المصنع A هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري 200 ساعة، بينما تلك التي ينتجها المصنع B فإن متوسط عمرها الانتاجي هو 1200 وانحرافها المعياري 100. إذا سحبت عينة عشوائية مكونة من 125 لمبة من كل مصنع وتم اختبارها، ماهو احتمال أن يكون متوسط العمر الانتاجي للمبات A على الأقل (أ) 160 ساعة (ب) 250 ساعة أطول من العمر الانتاجي للمبات B ؟

الحل :

اعتبر أن \bar{X}_A تعبر عن متوسط العمر الإنتاجي للعينه A و \bar{X}_B تعبر عن متوسط العمر الانتاجي للعينه B إذن

$$\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \mu_{\bar{X}_A} - \mu_{\bar{X}_B} = 1400 - 1200 = 200 \text{ h}$$

$$\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B} = \sqrt{\frac{\sigma_A^2}{N_A} + \frac{\sigma_B^2}{N_B}} = \sqrt{\frac{(100)^2}{125} + \frac{(200)^2}{125}} = 20 \text{ h}$$

المتغير المعياري للفرق بين وسطين هو

$$z = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - (\mu_{\bar{X}_A - \bar{X}_B})}{\sigma_{\bar{X}_A - \bar{X}_B}} = \frac{(\bar{X}_A - \bar{X}_B) - 200}{20}$$

والذي يقترب بصورة كبيرة من التوزيع الطبيعي .

$$\text{(أ) فرق الـ } 160 \text{ ساعة بوحدة معيارية} = -2 = (160 - 200)/20$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = -2$)

$$= 0.500 + 0.4772 = 0.9772$$

$$\text{(ب) فرق الـ } 250 \text{ ساعة بوحدة معيارية} = 2.50 = (250 - 200)/20$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 2.50$)

$$= 0.5000 - 0.4938 = 0.0062$$

٨ - ١٣ كرة مصبوبة من الزنك من نوع معين تزن 0.50 N بانحراف معياري 0.02 N في مجموعتين ، بكل منها 1000 كرة ماهو احتمال أنهما سوف يختلفان في الوزن بأكثر من 2N .

الحل :

اعتبر أن \bar{X}_1 تعبر عن متوسط وزن الكرة من المجموعة الأولى و \bar{X}_2 تعبر عن متوسط وزن الكرة في المجموعة الثانية . إذن

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} - \mu_{\bar{X}_2} = 0.50 - 0.50 = 0$$

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}} = \sqrt{\frac{(0.02)^2}{1000} + \frac{(0.02)^2}{1000}} = 0.000895$$

المتغير المعياري للفرق بين وسطين هو $z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 0}{0.000895}$ ر يقترب بشكل كبير من التوزيع الطبيعي .

اختلاف مقداره $2N$ في المجموعتين يكافئ فرقاً مقداره $2/1000 = 0.002 N$ في الأوساط . وهذا يمكن

أن يحدث في حالة أما إذا كانت $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 0.002$ أو $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq -0.002$ ، بمعنى ،

$$z \leq \frac{-0.002 - 0}{0.000895} = -2.23 \quad \text{أو} \quad z \geq \frac{0.002 - 0}{0.000895} = 2.23$$

إذن

$$\Pr\{z \geq 2.23 \text{ or } z \leq -2.23\} = \Pr\{z \geq 2.23\} + \Pr\{z \leq -2.23\} = 2(0.5000 - 0.4871) = 0.0258$$

٨ - ١٤ A و B يلعبان مباراة في « الصورة أو الكتابة » ، حيث يقوم كل منهم برمي 50 عملة A . سوف يكسب المباراة إذا ظهر في رمياته 5 صور أو أكثر من تلك التي حصل عليها B ، وبخلاف ذلك يكسب B . حدد نسبة المضاربة ضد A أن يكسب أي مباراة معينة .

الحل :

إذا كانت P_A تعبر عن نسبة الصورة التي حصل عليها A و P_B تعبر عن نسبة الصورة التي حصل عليها B .

إذا افترضنا أن العملات كلها غير متحيزة ، فإن احتمال ظهور الصورة p هو $1/2$. إذن

$$\mu_{P_A - P_B} = \mu_{P_A} - \mu_{P_B} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_{P_A - P_B} = \sqrt{\sigma_{P_A}^2 + \sigma_{P_B}^2} = \sqrt{\frac{pq}{N_A} + \frac{pq}{N_B}} = \sqrt{\frac{2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}{50}} = 0.10$$

المتغير المعياري للفرق بين نسبتي هو $z = (P_A - P_B - 0)/0.10$

باعتبار أن المتغير متغير مستمر ، فإن 5 أو أكثر صورة تعبر عن 4.5 أو أكثر صورة ، بحيث أن الفرق بين النسب يجب أن يكون $4.5/50 = 0.09$ أو أكثر بمعنى أن z أكبر من أو يساوي

$$(z \geq 0.9) \quad \text{أو} \quad (0.09 - 0)/0.10 = 0.9$$

واحد ذلك هو المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 0.9$ ، والتي تساوي

$$(0.5000 - 0.3159) = 0.1841$$

وهذا تكون نسبة المضاربة ضد A أن يكسب هي $0.1841 : 0.8159 = 0.1841 : (1 - 0.1841)$

أي 4.43 إلى 1 .

٨ - ١٥ قيست مسافتان فكانتا 27.3 mm بانحراف معيارى (خطأ معيارى) قدره 0.16 mm و 15.6 mm بانحراف معيارى (خطأ معيارى) قدره 0.08 mm .

حدد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى (أ) للمجموع (ب) للفرق بين المسافتين .

الحل :

إذا عبرنا عن المسافتين بالرمز D_1 و D_2 إذن

$$\begin{aligned} \mu_{D_1+D_2} &= \mu_{D_1} + \mu_{D_2} = 27.3 + 15.6 = 42.9 \text{ mm} \\ \sigma_{D_1+D_2} &= \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ mm} \\ \mu_{D_1-D_2} &= \mu_{D_1} - \mu_{D_2} = 27.3 - 15.6 = 11.7 \text{ mm} \\ \sigma_{D_1-D_2} &= \sqrt{\sigma_{D_1}^2 + \sigma_{D_2}^2} = \sqrt{(0.16)^2 + (0.08)^2} = 0.18 \text{ mm} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (أ) \\ \\ (ب) \end{matrix}$$

٨ - ١٦ نوع معين من المبات الكهربية لها عمر إنتاجى 1500 ساعة وانحرافها المعيارى 150 ساعة . تم توصيل ثلاث لمبات معاً بحيث إذا احترقت إحداها ، فإن الأخيرتين سيحترقان أيضاً . افترض أن العمر الإنتاجى يتوزع توزيعاً طبيعياً ، ماهو احتمال أن تستمر الإضاءة (أ) على الأقل 5000 ساعة (ب) 4200 ساعة على الأكثر ؟

الحل :

افترض ان الأعمار الإنتاجية هي L_1, L_2, L_3 . إذن

$$\begin{aligned} \mu_{L_1+L_2+L_3} &= \mu_{L_1} + \mu_{L_2} + \mu_{L_3} = 1500 + 1500 + 1500 = 4500 \text{ hours} \\ \sigma_{L_1+L_2+L_3} &= \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2 + \sigma_{L_3}^2} = \sqrt{3(150)^2} = 260 \text{ hours} \end{aligned}$$

$$(أ) \quad 5000 \text{ ساعة معبراً عنها بوحدات معيارية} = (5000 - 4500)/260 = 1.92$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبقي إلى يمين $z = 1.92$)

$$= 0.5000 - 0.4726 = 0.0274$$

$$(ب) \quad 4200 \text{ ساعة معبراً عنها بوحدات معيارية} = (4200 - 4500)/260 = -1.15$$

الاحتمال المطلوب = (المساحة تحت المنحنى الطبقي إلى يمين $z = -1.15$)

$$= 0.5000 - 0.3749 = 0.1251$$

مسائل متنوعة

٨ - ١٧ بالرجوع إلى المسألة ٨ - ١ أوجد (أ) الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة للتباينات ، (ب) الانحراف المعيارى لتوزيع المعاينة للتباينات أى ، الخطأ المعيارى للتباينات .

الحل :

(أ) تباينات المعاينة المقابلة لكل من 25 عينة في المسألة ٨ - ١ هي

0	0.25	4.00	9.00	20.25
0.25	0	2.25	6.25	16.00
4.00	2.25	0	1.00	6.25
9.00	6.25	1.00	0	2.25
20.25	16.00	6.25	2.25	0

متوسط توزيع المعاينة للتباينات هو

$$\mu_s^2 = \frac{\text{مجموع كل التباينات في الجدول أعلاه}}{25} = \frac{135}{25} = 5.40$$

وهذا يوضح حقيقة أن $\mu_s^2 = (N - 1) \sigma^2 / N$ ، حيث أن $N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ (أنظر المسألة ٨ - ١) ، الجانب الأيسر هو $5.4 = \frac{1}{2}(10.8)$.

النتيجة تظهر تفضيل تعريف التباين المصحح للعينات مثل $s^2 = \frac{N}{N-1} s^2$.

وهذا يؤدي إلى أن $\mu_{s^2} = \sigma^2$ (أنظر أيضاً الملاحظات صفحة ١١٤) . ويجب ملاحظة أن تباين المجتمع يجب أن يعرف كما عرفناها سابقاً ولكن التصحيح يتم على تباين العينة).

(ب) تباين توزيع المعاينة للتباينات $\sigma_{s^2}^2$ نحصل عليه بطرح الوسط 5.40 من كل من 25 رقم في الجدول السابق ، تربيع هذه الأرقام ، ثم جمعها ، ثم قسمة الناتج على 25 . وهذا $\sigma_{s^2}^2 = 575.75/25 = 23.03$ or $\sigma_{s^2} = 4.80$

٨ - ١٨ حل المعادلة السابقة إذا كان السحب بدون إرجاع .

الحل :

(أ) هناك 10 عينات تبايناتها معطاة بالأرقام أعلى (أو أسفل) قطر الأصفار في جدول المسألة ٨ - ١٧ (أ) . إذن

$$\mu_{s^2} = \frac{0.25 + 4.00 + 9.00 + 20.25 + 2.25 + 6.25 + 16.00 + 1.00 + 6.25 + 2.25}{10} = 6.75$$

وهذه حالة خاصة من النتيجة العامة $\mu_{s^2} = \left(\frac{N_p}{N_n - 1}\right) \left(\frac{N-1}{N}\right) \sigma^2$ التي يمكن إثباتها بوضع $N_p = 5$ ،

$N = 2$ و $\sigma^2 = 10.8$ في الجانب الأيمن من μ_{s^2} لنحصل على $\mu_{s^2} = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (10.8) = 6.75$

(ب) إ طرح 6.75 من كل من 10 أرقام أعلى قطر الأصفار في المسألة ٨ - ١٧ (أ) ، تربيع هذه الأرقام ، بالجمع والقسمة على 10 نحصل على $\sigma_{s^2}^2 = 39.675$ or $\sigma_{s^2} = 6.30$

٨ - ١٩ إذا كان الانحراف المعياري لأوزان مجتمع كبير جداً من الذكور هو 10.0 kg . سميت من هذا المجتمع عينات حجم كل منها 200 من الذكور ، وحسب الانحراف المعياري للأوزان في كل عينة . أوجد

(أ) الوسط الحسابي ، (ب) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري .

الحل :

من الممكن أن نعتبر أن المعاينة أماً من مجتمع غير محدود أو بدون إرجاع من مجتمع محدود . من صفحة ٢٣٠ نحصل على :

$$(أ) \text{ متوسط توزيع المعاينة للانحراف المعياري } = \mu_s = \sigma = 10.0 \text{ kg}$$

$$(ب) \text{ الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للانحراف المعياري } = \sigma_s = \sigma/\sqrt{2N} = 10/\sqrt{400} = 0.50 \text{ kg}$$

٨ - ٢٠ ماهي النسبة المئوية للعينات في المسألة السابقة التي لها انحراف معياري

(أ) أكبر من 11.0 kg (ب) أقل من 8.8 kg ؟

الحل :

توزيع المعاينة للانحراف المعياري يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي الذي متوسطه 10.0 kg وانحرافه المعياري 0.50 kg

(أ) 11.0 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= (11.0 - 10.0)/0.50 = 2.0$. المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يمين $z = 2.0$ هي $0.0228 = (0.5 - 0.4772)$ وهذا فإن النسبة المطلوبة هي 2.3% .

(ب) 8.8 kg معبراً عنها بوحدات معيارية $= (8.8 - 10.0)/0.50 = -2.4$ المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى يسار $z = -2.4$ هي $0.0082 = (0.5 - 0.4918)$ وهذا فإن النسبة المطلوبة هي 0.8% .

مسائل إضافية

توزيع المعاينة للأوساط :

٨ - ٢١ يتكون مجتمع من أربعة أرقام 3, 7, 11, 15 . اعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم إثنين والتي يمكن سحبها بدون إرجاع من هذا المجتمع .

أوجد (أ) متوسط المجتمع ، (ب) الانحراف المعياري للمجتمع ، (ج) متوسط توزيع المعاينة للأوساط ، (د) الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط .

أثبت (ج) ، (د) مباشرة من (أ) و (ب) باستخدام صيغة ملائمة .

ج : (أ) 0.9 (ب) 4.47 (ج) 9.0 (د) 3.16

٨ - ٢٢ حل المسألة ٨ - ٢١ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع .

ج : (أ) 9.0 (ب) 4.47 (ج) 9.0 (د) 2.58

٨ - ٢٣ وزن 1500 كرة حديدية يتوزع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي 22.40 newtons وانحرافه المعياري 0.048 newtons . سمحت 300 عينة حجم كل منها 36 من هذا المجتمع ، أوجد المتوسط المتوقع والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .

ج : (أ) $\mu_{\bar{x}} = 22.40 \text{ N}, \sigma_{\bar{x}} = 0.008 \text{ N}$ (ب) $\mu_{\bar{x}} = 22.40 \text{ N}, \sigma_{\bar{x}} = 0.008 \text{ N}$

٨ - ٢٤ حل المسألة ٨ - ٢٣ إذا كان المجتمع مكوناً من 72 من الكرات الحديدية .

ج : (أ) $\mu_{\bar{x}} = 22.4 \text{ N}, \sigma_{\bar{x}} = 0.008 \text{ N}$ (ب) $\mu_{\bar{x}} = 22.4 \text{ N}, \sigma_{\bar{x}} = 0.0057 \text{ N}$

٨ - ٢٥ في المسألة ٨ - ٢٣ كم من العينات العشوائية أوساطها (أ) بين 22.39 N و 22.41 N (ب) أكبر من 22.42 N (ج) أقل من 22.37 N (د) أقل من 22.38 N أو أكبر من 22.41 N ؟

ج : (أ) 237 (ب) 2 (ج) لا يوجد (د) 34

٨ - ٢٦ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات بمتوسط عمرها الانتاجي 800 h وانحرافها المعياري 60 h . في عينة عشوائية مكونة من 10 لمبة أخذت من المجموعة ، أوجد احتمال أن يكون متوسط عمرها الإنتاجي

(أ) بين 790 h و 810 h ، (ب) أقل من 785 h ، (ج) أكبر من 820 h (د) بين 770 h و 830 h .

ج : (أ) 0.4972 (ب) 0.1587 (ج) 0.0918 (د) 0.9544

٨ - ٢٧ حل المسألة ٨ - ٢٦ إذا أخذت عينة من 64 لمبة . اشرح الفرق .

ج : (أ) 0.8164 (ب) 0.0228 (ج) 0.0038 (د) 1.0000

٨ - ٢٨ إذا كان متوسط وزن طرود مرسله إلى أحد المتاجر هو 300 N وانحرافها المعياري 50 N . اختبر 25 طرداً بصورة عشوائية ووضعت في مصعد لرفعها ما هو احتمال أن وزن الطرود سوف يتجاوز حدود الامان المحددة للصمود والمقررة بـ 8200 N ؟

ج : 0.0026

الأرقام العشوائية :

٨ - ٢٩ حل المسألة ٨ - ٦ باستخدام مجموعات مختلفة من الأرقام العشوائية واختيار (أ) 15 ، (ب) 30 ، (ج) 45 ، (د) 60 عينة حجم كل منها 4 ، مع الإرجاع .

فان بالنتائج النظرية في كل حالة .

٨ - ٣٠ حل المسألة ٨ - ٢٩ باختيار عينات ذات الحجم (أ) 2 (ب) 8 ، بإرجاع بدلا من 4 .

٨ - ٣١ حل المسألة ٨ - ٦ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع . قارن بالنتائج النظرية .

٨ - ٣٢ (أ) اشرح كيفية اختيار 30 عينة حجم كل منها 2 من التوزيع بالمسألة ب - ٦١ الفصل الثالث .

(ب) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للأوساط الذي حصلت عليه وقارن بالنتائج النظرية.

٨ - ٣٣ حل المسألة السابقة باستخدام عينات حجمها 4 .

توزيع المعاينة للنسب :

٣٤ - ٨ أوجد احتمال أن يكون بين 400 طفل سوف يولدون (أ) أقل من 40% سيكونوا أولاداً (ب) بين 43% و 57% سيكونون بنات . (ج) أكبر من 54% سيكونون أولاداً . مفترضاً احتمالات متساوية لميلاد الأولاد والبنات .

$$ج : (أ) 0.0019 (ب) 0.9596 (ج) 0.1151$$

٣٥ - ٨ من بين 1000 عينة بكل منها 200 طفل ، في كم تتوقع أن تجد

(أ) أقل من 40% أولاد (ب) بين 40% و 60% بنات (ج) 53% أو أكثر بنات

$$ج : (أ) 2 (ب) 996 (ج) 218$$

٣٦ - ٨ حل المسألة ٣ - ٨ إذا كانت العينة 100 بدلا من 200 طفل ووضع الفروق في النتائج .

$$ج : (أ) 0.0179 (ب) 0.8664 (ج) 0.1841$$

٣٧ - ٨ إناء يحتوي على 80 بلية منها 60% لونها أحمر و 40% لونها أبيض . من بين 50 عينة كل منها مكون من 20

بلية تحبب بإرجاع من الإناء ، كم من العينات نتوقع أن تتكون من (أ) عدد متساو من البلى الأحمر والأبيض (ب) 12

لوناً أحمر و 8 لونها أبيض (ج) 8 لونها أحمر و 12 لونها أبيض (د) 10 أو أكثر من البلى الأبيض ؟

$$ج : (أ) 6 (ب) 9 (ج) 2 (د) 12$$

٣٨ - ٨ صمم تجربة تهدف إلى توضيح الإجابة على المسألة ٣٧ - ٨ . بدلا من البلى الأحمر والأبيض يمكنك استخدام قطع من الورق حيث الرمز R أو W مكتوب حسب النسب الصحيحة . ماهو الخطأ الذي يمكن أن ينتج عن استخدام مجموعتين من العملات ؟

٣٩ - ٨ أرسل مصنع 1000 طرد يتكون كل منها من 100 لمبة كهربائية إذا كانت 5% من اللامبات تالفة حسب التوزيع الطبيعي . ماهو عدد الطرود التي تتوقع أن يكون بها (أ) أقل من 90 لمبة صالحة (ب) 98 أو أكثر من لمبة صالحة .

$$ج : (أ) 6 (ب) 125$$

توزيع المعاينة لفروق والمجموع :

٤٠ - ٨ A و B ينتجان نوعين من الكابلات ، متوسط مقاومتها للكسر هو 4000 N و 4500 N وانحرافاتها المعيارية 300 N و 200 N على الترتيب . إذا اختير 100 كابل من إنتاج A و 50 كابل من إنتاج B ، ماهو احتمال أن يكون متوسط مقاومتها للكسر لكابلات B .

(أ) على الأقل 600 N أكبر من A . (ب) على الأقل 450 N أكبر من A ؟

$$ج : (أ) 0.0077 (ب) 0.8869$$

٤١ - ٨ ماهو الاحتمالات في المسألة ٤٠ - ٨ إذا كان 100 كابل من النوعين قد تم اختيارهما ؟ ضع في الاعتبار الفروق.

$$ج : (أ) 0.0028 (ب) 0.9172$$

٤٢ - ٨ متوسط درجات طلبة في امتحان قدرات هو 72 نقطة وانحرافها المعياري 8 نقط . في مجموعتين من الطلبة ، مكونة من 28 و 36 طالباً على الترتيب ، ماهو احتمال أن تختلف في متوسط درجاتها (أ) 3 أو أكثر نقطة (ب) 6 أو أكثر نقطة (ج) بين 2 و 5 نقطة ؟

$$ج : (أ) 0.2150 (ب) 0.0064 (ج) 0.4504$$

٨ - ٤٣ وعاء يحتوى على 60 بلى أحمر و 40 بلى أبيض . مجموعتان تتكون كل منهما من 30 من البلى سمحت بإرجاع من العواء وتم تسجيل ألوانهما .

ما هو احتمال أن تكون المجموعتان مختلفتين عن بعض ب 8 أو أكثر من البلى الأحمر ؟

ج : 0.0482

٨ - ٤٤ حل المسألة ٨ - ٤٣ إذا كانت المعاينة بدون إرجاع في كل مجموعة

ج : 0.0136

٨ - ٤٥ أظهرت نتائج الانتخابات أن مرشحاً معيناً حصل على 65% من الأصوات . في عينتين عشوائيتين ، تتكون كل منها من 200 ناخب ، أوجد احتمال أن النتائج تشير إلى أكثر من 10% اختلاف في النسب التي صوتت لصالح المرشح .

ج : 0.0316

٨ - ٤٦ إذا كانت U_1 و U_2 مجموعتين من الأرقام في المسألة ٨ - ١١ أثبت أن (أ)

$$\mu_{U_1+U_2} = \mu_{U_1} + \mu_{U_2} \quad (ب) \quad \sigma_{U_1+U_2} = \sqrt{\sigma_{U_1}^2 + \sigma_{U_2}^2}$$

٨ - ٤٧ ثلاث مجموعات من السكتل وزنت فكانت متوسطاتها 62.34 kg ، 35.97 ، 20.48 وانحرافاتها المعيارية 0.54 kg ، 0.46 ، 0.21 على الترتيب . أوجد (أ) الوسط الحسابي (ب) الانحراف المعياري للأوزان

ج : (أ) 118.79 kg (ب) 0.74 kg

٨ - ٤٨ متوسط تيار بطارية هو 15.0 فولت وانحرافها المعياري 0.2 فولت . إذا وصلت أربع من هذه البطاريات على التوالي ما هو احتمال أن يكون المتوسط المجموع لتيارها هو 60.8 فولت أو أكثر ؟

ج : 0.0228

مسائل متنوعة

٨ - ٤٩ مجتمع يتكون من 7 أرقام متوسطها 40 وانحرافها المعياري 3 . إذا سمحت عينة حجمها 5 من المجتمع وحسب تباين كل عينة ، أوجد متوسط توزيع المعاينة للتيانينات إذا كانت المعاينة (أ) بإرجاع (ب) بدون إرجاع .

ج : (أ) 7.2 (ب) 8.4

٨ - ٥٠ لمبات من نوع معين من إنتاج إحدى الشركات متوسط عمرها الإنتاجي 900 h وانحرافها المعياري 80 h . أرسلت الشركة 1000 مجموعة بكل مجموعة 100 لمبة . في كم مجموعة من الممكن أن نتوقع أن (أ) أن يزيد متوسط العمر الإنتاجي عن 910 h ، (ب) الانحراف المعياري يتجاوز 95 h ؟ ماهي الفروض التي يجب وضعها ؟

ج : (أ) 106 (ب) 4

٨ - ٥١ في المسألة ٨ - ٥٠ إذا كان وسيط العمر الإنتاجي هو 900 h في كم من المجموعات نتوقع أن يتجاوز وسيط العمر الإنتاجي 910 h ؟ قارن إجابتك بالمسألة ٨ - ٥٠ (أ) وفسر النتائج .

ج : 159

٨ - ٥٢ في امتحان عام تتوزع الدرجات توزيعاً طبيعياً بمتوسط 72 وانحراف معياري 8 . (أ) أوجد أقل درجة في الـ 20% الأوائل (ب) في عينة عشوائية من 100 طالب أوجد احتمال أن تكون أقل درجة في الـ 20% الأوائل أقل من 76 .

ج : (أ) 78.7 (ب) 0.0090

الفصل التاسع

نظرية التقدير الاحصائية

تقدير المعالم :

في الفصل الأخير شاهدنا كيف يمكن استخدام نظرية العينات للحصول على معلومات عن عينات مسحوبة بصورة عشوائية من مجتمع معلوم . ومن وجهة النظر العملية ، قد يكون أكثر أهمية أن يكون لدينا القدرة على اسقاط المعلومات الخاصة بالمجتمع باستخدام عينات مسحوبة من هذا المجتمع . مثل هذه المشاكل يتم دراستها في اطار الاستدلال الاحصائي ، والذي يستخدم أساسيات نظرية العينات .

أحد المشاكل المهمة في الاستدلال الاحصائي هو تقدير معالم المجتمع أو باختصار المعالم (مثل متوسط المجتمع ، التباين ،) من احصائيات العينة المقابلة أو باختصار الاحصائيات (مثل متوسط العينة ، تباينها ،) . وسوف نقوم بدراسة هذه المشكلة في هذا الفصل .

التقديرات غير المتحيزة :

إذا كان متوسط توزيع المعاينة الاحصائية يساوي معلمة المجتمع المقابلة ، فإن الاحصائية تسمى مقدرًا غير متحيز للمعلمة ، بخلاف ذلك يسمى مقدرًا متحيزًا . القيمة المقابلة لمثل هذه الاحصائية تسمى تقديرات غير متحيزة أو متحيزة على الترتيب .

مثال ١ : متوسط توزيع المعاينة للأوساط $\mu_X = \mu$ ، متوسط المجتمع (أنظر صفحة ٢٢٨) . هذا فإن متوسط العينة \bar{X} هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ .

مثال ٢ : متوسط توزيع المعاينة للتباينات ، $\mu_{s^2} = \frac{N-1}{N} \sigma^2$ ، حيث σ^2 تباين المجتمع و N هو حجم العينة (أنظر صفحة ٢٣٠) . هذا فإن تباين العينة s^2 هو تقدير متحيز لتباين المجتمع σ^2 . باستخدام التباين المعدل $s^2 = \frac{N}{N-1} s^2$ نجد أن $\mu_{s^2} = \sigma^2$ بحيث أن \hat{s}^2 هو تقدير غير متحيز لـ σ^2 . ومع ذلك فإن \hat{s} بعد تقديرًا متحيزًا لـ σ .

وباستخدام تعبير التوقع (انظر الفصل السادس) يمكن القول بأن الاحصائية غير متحيزة إذا كان توقعها يساوي معلمة المجتمع المقابلة لها . هذا فإن \bar{X} و \hat{s}^2 هما غير متحيزين حيث أن $E\{\bar{X}\} = \mu$ و $E\{\hat{s}^2\} = \sigma^2$.

التقدير الكفوء :

إذا كان توزيع المعاينة لاحصائيتين لهما نفس الوسط الحسابي (أو التوقع) ، فإن الاحصائية ذات التباين الأقل تسمى مقدر كفوء للوسط الحسابي بينما الاحصائية الأخرى تسمى مقدر غير كفوء . القيمة المقابلة للاحصائية تسمى تقدير كفوء أو تقدير غير كفوء على الترتيب .

إذا اعتبرنا جميع الاحصائيات التي يكون توزيع المعاينة لها له نفس الوسط الحسابي ، فإن الإحصائية ذات التباين الأقل يسمى أحيانا التقدير الأكثر كفاءة أو التقدير الأحسن لهذا الوسط .

مثال : توزيع المعاينة للوسط الحسابي والوسيط كلاهما له نفس الوسط الحسابي ، بالتحديد وسط المجتمع . ولكن تباين توزيع المعاينة للأوساط أقل من تباين توزيع المعاينة للوسيطات (أنظر صفحة ٢٣٠) . وبذلك فإن متوسط العينة يعطى تقديرا كفواً للمتوسط المجتمع ، بينما وسيط العينة يعطى تقديرا غير كفوء له . ومن بين جميع الاحصائيات التي تقدر متوسط المجتمع ، فإن متوسط العينة يعطى تقديرا أكثر كفاءة .

من الناحية العملية قد نستخدم تقدير غير كفوء نظرا للسهولة النسبية التي نحصل بها على بعض هذه التقديرات .

التقدير بنقطة والتقدير بفترة . المأمونية :

إذا قدرت معلمة المجتمع برقم واحد فهذا يسمى بتقدير المعلمة بنقطة . تقدير معلمة المجتمع المعطى برقين والذي يمكن اعتبار أن المعلمة تقع بينهما يسمى بالتقدير بفترة لهذه المعلمة .

التقديرات بفترة تشير إلى معنوية أو دقة التقدير وبالتالي تفضل عن التقدير بنقطة .

مثال : إذا ذكرنا أن مسافة قيست وكانت 5.28 mm ، فإننا نعطي تقدير بنقطة . ومن الناحية الأخرى إذا ذكرنا أن المسافة هي 5.28 ± 0.03 mm أى أن المسافة تقع بين 5.25 mm و 5.31 mm ، فإننا نعطي تقديرا بفترة . التعبير عن الخطأ أو الدقة في التقدير يسمى بالمأمونية .

تقدير فترة الثقة لمعالم المجتمع :

أعتبر أن μ_S تعبر عن الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة للاحصائية S ، σ_S الانحراف المعياري (الخطأ المعياري) لها . فإذا كان توزيع المعاينة للاحصائية S تتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي (والذي يعد صحيحا لكثير من الاحصائيات كما سبق أن رأينا إذا كان حجم العينة $N \geq 30$) فإننا يمكن أن نتوقع أن نجد قيمة فعلية للاحصائية S تقع في الفترات $\mu_S - 3\sigma_S$ to $\mu_S + 3\sigma_S$ ، $\mu_S - 2\sigma_S$ to $\mu_S + 2\sigma_S$ or $\mu_S - \sigma_S$ to $\mu_S + \sigma_S$.

حوالي 99.73% and 95.45% و 68.27% مرة على الترتيب

وبالمثل فإنه يمكننا أن نتوقع أن نجد أو يمكن أن نكون على ثقة من الحصول على μ_S في الفترات $S - 3\sigma_S$ to $S + 3\sigma_S$ or $S - 2\sigma_S$ to $S + 2\sigma_S$ or $S - \sigma_S$ to $S + \sigma_S$ حوالي 99.73% and 95.45% و 68.27% مرة على الترتيب .

ولهذا السبب نسمى الفترات 99.73% and 95.45% و 68.27% بفترة الثقة لتقدير μ_S . حدود هذه الفترات $(S \pm \sigma_S, S \pm 2\sigma_S, S \pm 3\sigma_S)$ تسمى بـ 99.73% ، 95.45% و 68.27% حدود الثقة أو كما تسمى أحيانا حدود الطمأنينة .

كذلك ، $S \pm 1.96\sigma_S$ و $S \pm 2.58\sigma_S$ هما 95% ، 99% (أو 0.95 ، 0.99) حدود ثقة لـ S . نسبة الثقة تسمى أحيانا مستوى الثقة . الأرقام 1.96، 2.58، ... في حدود الثقة تسمى معاملات الثقة أو القيم الحرجة ويرمز لها بالرمز z_c . من مستوى الثقة يمكن أن نحصل على معاملات الثقة ، والعكس . في الجدول ٩ - ١ نعطي قيم z_c المقابلة

للقيم المختلفة لمستويات الثقة المستخدمة في الحياة العملية . لمستويات الثقة غير الموجودة بالجدول ، نحصل على قيم z_c من جداول مساحات المنحنى الطبيعي (أنظر المسألة ٩ - ٧) .

جدول ٩-١

مستوى الثقة	99-73%	99%	98%	96%	95-45%	95%	90%	80%	68-27%	50%
z_c	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

تقدير فترة الثقة للأوساط :

إذا كانت الاحصائية S هي متوسط العينة \bar{X} ، فإن حدود الثقة بنسبة 95 % لتقدير متوسط المجتمع μ تعرف بـ $\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}}$ وبنسبة 99 % هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma_{\bar{X}}$. وبشكل أكثر عمومية ، فإن حدود الثقة تعرف بـ $\bar{X} \pm z_c\sigma_{\bar{X}}$ حيث z_c ، والذي يعتمد على مستوى الثقة المعلن المطلوب ، يمكن قراءته من الجدول أعلاه . باستخدام قيم $\sigma_{\bar{X}}$ التي حصلنا عليها في الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لمتوسط المجتمع يعطى كما يلي :

$$(١) \quad \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

في حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة بأرجاع من مجتمع محدود . كما يعرف كما يلي :

$$(٢) \quad \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$$

إذا كانت المعاينة بدون ارجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

بشكل عام فإن الانحراف المعياري للمجتمع σ يكون غير معروف ، وللحصول على حدود الثقة السابقة نستخدم التقدير من العينة $\hat{\sigma}$ أو s . ويمكن اثبات أنها مرضية على أساس أن $N \geq 30$. ولكن لقيم $N < 30$ ، فإن التقريب غير جيد ، ويجب استخدام نظرية العينات الصغيرة (أنظر الفصل الحادى عشر) .

فترة الثقة للنسب :

إذا كانت الاحصائية S هي نسبة « النجاح » في عينة حجمها N مسحوبة من مجتمع ذى حدين حيث P هي نسبة النجاح (احتمال النجاح) ، فإن حدود الثقة لـ p تعطى بالمعادلة $P \pm z_c\sigma_p$ حيث P هي نسبة النجاح في عينة حجمها N باستخدام قيم σ_p التي حصلنا عليها في الفصل الثامن ، فإن حدود الثقة لنسب المجتمع تعطى كما يلي :

$$(٣) \quad P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{N}} = P \pm z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

في حالة ما إذا كانت المعاينة من مجتمع غير محدود أو إذا كانت المعاينة بأرجاع من مجتمع محدود . وتعطى كما يلي :

$$(٤) \quad P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}}$$

. إذا كانت المعاينة بدون أرجاع من مجتمع محدود حجمه N_p .

لحساب حدود الثقة هذه فيمكن استخدام تقدير العينة P لقيمة p ، والتي يمكن استخدامها بشكل مرض لقيم $N \geq 30$.
طريقة أكثر دقة للحصول على حدود الثقة في هذه الحالة معطاة في المسألة ٩-١٢ .

فترات الثقة للفروق والمجموع :

إذا كانت S_1 و S_2 احصائيتين من عينة توزيع معايتها يقترب من التوزيع الطبيعي ، فإن حدود الثقة للفروق بين معالم المجتمع المقابلة لـ S_1 و S_2 تعطى كما يلي :

$$(٥) \quad S_1 - S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 - S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

بينما حدود الثقة لمجموع معالم المجتمع هي

$$(٦) \quad S_1 + S_2 \pm z_c \sigma_{S_1 + S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2}$$

وذلك بافتراض أن العينات مستقلة (أنظر الفصل الثامن) .

على سبيل المثال ، حدود الثقة للفروق بين متوسطات مجتمعين ، في حالة ما إذا كان المجتمع غير محدود ، تعطى كما يلي :

$$(٧) \quad \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm z_c \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1} + \frac{\sigma_2^2}{N_2}}$$

حيث يرمز للمتوسط والانحراف المعياري وحجم العينة الأولى بالرموز \bar{X}_1 ، σ_1 ، N_1 على الترتيب وفي العينة الثانية بالرموز \bar{X}_2 و σ_2 و N_2 على الترتيب .

وبنفس الطريقة ، فإن حدود الثقة للفروق بين النسب في مجتمعين ، حيث المجتمعات غير محدودة ، تعطى كما يلي :

$$(٨) \quad P_1 - P_2 \pm z_c \sigma_{P_1 - P_2} = P_1 - P_2 \pm z_c \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{N_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{N_2}}$$

حيث P_1 و P_2 هي نسب العينتين ، N_1 و N_2 حجم العينتين المسحوبتين من المجتمعين ، p_1 و p_2 هي النسب في المجتمعين (مقدرة بالنسب P_1 و P_2) .

فترة الثقة للانحرافات المعيارية :

حدود الثقة للانحراف المعياري σ لمجتمع يتوزع حسب التوزيع الطبيعي كما هي مقدرة من عينة انحرافها المعياري s ، تعطى كما يلي :

$$(٩) \quad s \pm z_c \sigma_s = s \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{2N}}$$

باستخدام الجدول ٨-١ صفحة (٢٣٠) . لحساب حدود الثقة هذه تستخدم s أو S كتقدير لـ σ .

الخطأ المحتمل :

حدود الثقة 50 % لمعالم المجتمع المقابلة للاحصائية S تعطى بالصورة $S \pm 0.6745\sigma_s$. الكمية $0.6745\sigma_s$ تعرف بأنها الخطأ المحتمل للتقدير .

مسائل محلولة**للتقديرات غير المتحيزة والكفوء :**

٩-١ أعط أمثلة لمقدرات (أو تقديرات) تكون (أ) غير متحيزة وكفوء (ب) غير متحيزة وغير كفوء ، (ج) متحيزة وغير كفوء .

الحل :

(أ) متوسط العينة \bar{X} وتباين العينة المعدل $s^2 = \frac{N}{N-1} s^2$ مثالان لهذه الحالة .

(ب) وسيط العينة واحصائية العينة $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_3)$ حيث Q_1 الربيع الأدنى و Q_3 الربيع الأعلى للعينة مثالان لهذه الحالة . كلا الاحصائيتين تقديرات غير متحيزة لمتوسط المجتمع ، حيث أن أن متوسط توزيع المعاينة لهما هو متوسط المجتمع .

(ج) الانحراف المعياري للعينة s ، الانحراف المعياري المعدل $\hat{\sigma}$ ، الانحراف المتوسط ، نصف المدى الربيعي أربعة أمثلة لهذه الحالة .

٩-٢ عينة من خمسة قياسات لقطر جسم كروي سجلت بواسطة عالم كالاتي :

6.33 ، 6.37 ، 6.36 ، 6.37 ، 6.37 mm

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء (أ) للمتوسط الحقيقي (ب) للتباين الحقيقي .

الحل :

(ا) التقدير غير المتحيز والكفوء للمتوسط الحقيقي (متوسط المجتمع) =

$$= \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37}{5} = 6.35 \text{ mm}$$

(ب) التقدير غير المتحيز والكفوء للتباين الحقيقي (تباين المجتمع) =

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N - 1} = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{5 - 1} \\ &= \frac{(6.33 - 6.35)^2 + (6.37 - 6.35)^2 + (6.36 - 6.35)^2 + (6.32 - 6.35)^2 + (6.37 - 6.35)^2}{5 - 1} \\ &= 0.00055 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

لاحظ أن $s = \sqrt{0.00055} = 0.023$ هو تقدير للانحراف المعياري الحقيقي ولكن هذا التقدير ليس غير متحيز ولا كفوء .

٣-٩ افترض أن أوزان المائة طالب في جامعة XYZ تمثل عينة عشوائية للأوزان من مجموع طلبة الكلية البالغ عددهم 1546 في هذه الجامعة . أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء (ا) للوسط الحقيقي (ب) التباين الحقيقي .

الحل :

(ا) من المسألة ٣-٢٢ الفصل الثالث :

التقدير غير المتحيز والكفوء للوسط الحقيقي للأوزان $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$.

(ب) من المسألة ٤-١٧ الفصل الرابع :

$$s^2 = \frac{N}{N-1} s^2 = \frac{100}{99} (8.5275) = 8.6136 = \text{التقدير غير المتحيز والكفوء للتباين الحقيقي}$$

بهذا فإن $s = \sqrt{8.6136} = 2.93$ لاحظ أنه بما أن N كبيرة فإنه لا يوجد فرق أساسي بين s^2

و s^2 أو بين s و s

لاحظ أننا لم نستخدم معامل شبر د للتصحيح في حالة التجميع . ولأخذ هذا في الاعتبار فيجب أن نأخذ $s = 2.79$ في الصيغ أعلاه (أنظر المسألة ٤-٢١ ، الفصل الرابع) .

٤-٩ أوجد تقديرا غير متحيز وكفوء للوسط الحقيقي لأقطار الجسم الكروي في المسألة ٢-٩ .

الحل :

الوسيط هو مثال لتقدير غير متحيز وغير كفوء لمتوسط المجتمع . وسيط الخمس قياسات مرتبة حسب قيمها هو 6.36 .

تقدير فترات الثقة لأوساط المجتمع :

٥-٩ أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % فترات ثقة لتقدير متوسط أوزان الطلبة في جامعة XYZ بالمسألة ٣-٩ .

الحل :

(أ) الـ 95 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N}$

باستخدام $\bar{X} = 67.45 \text{ kg}$ ، $\hat{\sigma} = 2.93 \text{ kg}$ كتقدير لـ σ (أنظر المسألة ٣-٩) ، حدود الثقة هي $(67.45 \pm 1.96(2.93/\sqrt{100}))$ أو $67.45 \pm 0.57 \text{ kg}$ وبهذا فإن الـ 95 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هي 66.88 إلى 68.02 kg ، والذي يمكن التعبير عنها كالاتي $66.88 < \mu < 68.02$.

وبهذا يمكن القول بأن احتمال أن يقع متوسط المجتمع بين 66.88 و 68.02 kg هو حوالي 95 % أو 0.95 وبالرمز نكتب .

$\Pr \{ 66.88 < \mu < 68.02 \} = 0.95$. وهذا يساوي القول بأننا 95 % واثقين بأن متوسط المجتمع (أو المتوسط الحقيقي) يقع بين 66.88 و 68.02 kg .

(ب) الـ 99 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2.58\hat{\sigma}/\sqrt{N} = 67.45 \pm 2.58(2.93/\sqrt{100}) = 67.45 \pm 0.76 \text{ kg}$

وبهذا فإن الـ 99 % فترة ثقة لمتوسط المجتمع μ هي من 66.69 إلى 68.21 kg ، والتي يمكن التعبير عنها بـ $66.69 < \mu < 68.21$.

للحصول على فترات الثقة السابقة ، فإننا افترضنا أن المجتمع غير محدود أو على درجة من الكبر بحيث يمكن أن نعتبره مثلاً حالة المعاينة مع الإرجاع . للمجتمعات المحدودة حيث المعاينة بدون إرجاع ، يجب أن نستخدم

$$\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p}{N_p - 1}} \quad \text{بدلاً من} \quad \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \text{ولكن يمكن اعتبار المعامل}$$

$$\sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = \sqrt{\frac{1546 - 100}{1546 - 1}} = 0.967$$

لاستخدامه . أما إذا استخدمنا فإن حدود الثقة أعلاه ستصير $67.45 \pm 0.73 \text{ kg}$ ، 67.45 ± 0.56 ، الترتيب .

٦-٩ قراءات أوزان عينة عشوائية حجمها 200 من رولمان البلى مصنوعة في آلة معينة خلال أسبوع واحد أظهرت متوسط 0.824 N وانحرافاً معيارياً 0.042 N . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لمتوسط الوزن لجميع رولمان البلى .

الحل :

(أ) الـ 95 % حدود ثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 1.96s/\sqrt{N} = 0.824 \pm 1.96(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0058 \text{ N, or } 0.824 \pm 0.006 \text{ N.}$$

(ب) الـ 99 % حدود ثقة هي

$$\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = \bar{X} \pm 2.58s/\sqrt{N} = 0.824 \pm 2.58(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0077 N, \text{ or } 0.824 \pm 0.008 N.$$

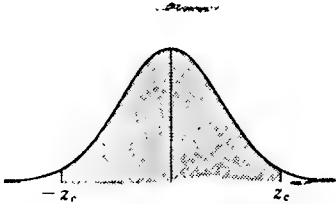
لاحظ أننا افترضنا أن الانحراف المعياري المذكور هو الانحراف المعياري المعدل $\hat{\sigma}$. أما إذا كان الانحراف

المعياري هو s ، فإننا سنستخدم $s = \sqrt{N/(N-1)}s = \sqrt{200/199}s$ والتي يمكن أن نعتبرها مثل s لجميع الأغراض العملية . وبشكل عام ، لقيم $N \geq 30$ يمكن أن نفترض s و $\hat{\sigma}$ متساويتين من الناحية العملية .

٧-٩ أوجد (أ) 98 % (ب) 90 % (ج) 99.73 % حدود ثقة لمتوسط وزن رولمان البلى في المسألة ٩-٦ .

الحل :

(أ) اعتبر $z = z_c$ بحيث تكون المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين هي 1 % . وبالمقابل المساحة إلى يسار $z = -z_c$ هي أيضا 1 % بحيث تكون المساحة المظللة هي 98 % من المساحة الكلية .



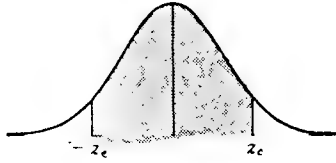
وبما أن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوى واحد فإن المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هي 0.49 ، وبذلك فإن $z_c = 2.33$ وهذا فإن حدود الثقة 98 % هي

$$\bar{X} \pm 2.33\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 2.33 (0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0069 N.$$

(ب) المطلوب هو z_c بحيث تكون المساحة من $z = 0$ إلى $z = z_c$ هي 0.45 ، إذن $z_c = 1.645$

وهذا فإن حدود الثقة 90 % هي

$$\bar{X} \pm 1.645\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 1.645(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0049 N.$$



(ج) حدود الثقة 99.73 % هي

$$\bar{X} \pm 3\sigma/\sqrt{N} = 0.824 \pm 3(0.042/\sqrt{200}) = 0.824 \pm 0.0089 N.$$

٨-٩ لقياس زمن رد الفعل ، قدر عالم سيكولوجي الانحراف المعياري بـ 0.05 ثانية . ماهو حجم العينة من القياسات بحيث تكون (أ) 95 % ، (ب) 99 % واثقين أن خطأ تقديره لن يتجاوز 0.01 ثانية ؟

الحل :

(أ) حدود الثقة 95 % هي $\bar{X} \pm 1.96 \sigma / \sqrt{N}$ وخطأ التقدير هو $1.96 \sigma / \sqrt{N}$. إذا أخذنا $\sigma = s = 0.05$ ثانية ، فإن هذا الخطأ يساوى 0.01 ثانية إذا كانت $(1.96)(0.05) / \sqrt{N} = 0.01$ أى $\sqrt{N} = (1.96)(0.05)/0.01$ أو $N = 96.04$. وهذا فإننا سنكون على ثقة بدرجة 95 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 97 أو أكبر .

$$\frac{(1.96)(0.05)}{\sqrt{N}} \leq 0.01 \text{ if } \frac{\sqrt{N}}{(1.96)(0.05)} \geq \frac{1}{0.01} \text{ or } \sqrt{N} \geq \frac{(1.96)(0.05)}{0.01} = 9.8 :$$

$$N \geq 97 \text{ أو } N \geq 96.04$$

(ب) إلى 99 % حدود الثقة هي $\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N}$. إذن $(2.58)(0.05)/\sqrt{N} = 0.01$ أو $N = 166.4$ وهذا سيكون على ثقة بدرجة 99 % بأن خطأ التقدير سيكون أقل من 0.01 إذا كانت N تساوى 167 أو أكبر .

٩-٩ عينة عشوائية من 50 من درجات الرياضة مسجوبة من 200 درجة أظهرت متوسطا 75 وانحرافا معياريا 10 .

(أ) ماهي إلى 95 % حدود الثقة لتقديرات وسط إلى 200 درجة

(ب) بأي درجة ثقة يمكن القول بأن متوسط إلى 200 درجة هو 75 ± 1 ؟

الحل :

(أ) بما أن حجم المجتمع ليس كبيرا بالمقارنة بحجم العينة ، فيجب أن نعدل لمراعاة ذلك .

وهذا فإن إلى 95 % حدود ثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm 1.96 \frac{(10)}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{200 - 50}{200 - 1}} = 75 \pm 2.4$$

(ب) حدود الثقة يمكن أن تمثل كما يلي

$$\bar{X} = z_c \sigma_{\bar{X}} = \bar{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N_p - N}{N_p - 1}} = 75 \pm z_c \frac{10}{\sqrt{50}} \sqrt{\frac{200 - 50}{200 - 1}} = 75 \pm 1.23z_c$$

بما أن هذه يجب أن تساوى 75 ± 1 ، فإن $1.23z_c = 1$ أو $z_c = 0.81$ المساحة تحت المنحنى

الطبيعي من $z = 0$ إلى $z = 0.81$ هي 0.2910 ، وهذا فإن درجة الثقة المطلوبة هي

$$58.2\% \text{ أو } 2(0.2910) = 0.582$$

تقديرات فترات الثقة للنسب :

٩-١٠ و، اصطلاح للرأى العام بالعينة بحيث عينة عشوائية حجمها 100 من جميع الناخبين في هي معين حيث دلت على أن 55 % منهم صالح مرشح معين . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود ثقة للنسبة بين جميع الناخبين المؤيدين لهذا المرشح .

الحل :

(أ) 95 % حدود الثقة للنسبة p للمجتمع هي :

$$P \pm 1.96\sigma_p = P \pm 1.96\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm 1.96\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.10$$

حيث استخدمنا النسبة P لتقدير p .

(ب) 99 % حدود ثقة للنسبة p هي : $0.55 \pm 2.58\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.13$

(ج) 99.73 % حدود ثقة للنسبة p هي : $0.55 \pm 3\sqrt{(0.55)(0.45)/100} = 0.55 \pm 0.15$

للمحصل على طريقة أكثر دقة حل هذه المسألة ، أنظر المسألة ٩-١٢ .

٩-١١ ما هو حجم العينة التي يجب أخذها من الناخبين في المسألة ٩-١٠ بحيث تكون (أ) 95 % (ب) 99.73 % ، واثقين من أن المرشح المعطى سوف يختار من مرشحين اثنين .

الحل :

حدود الثقة لـ p هي : $P \pm z_c\sqrt{p(1-p)/N} = 0.55 \pm z_c\sqrt{(0.55)(0.45)/N} = 0.55 \pm 0.50z_c/\sqrt{N}$ حيث استخدمنا التقدير $P = p = 0.55$ على أساس بيانات المسألة ٩-١٠ وبما أن المرشح سينجح فقط إذا حصل على أكثر من 50 % من أصوات المجتمع ، فإننا نطلب أن تكون $0.50z_c/\sqrt{N}$ أقل من 0.05 .

(أ) لـ 95 % ثقة ، $0.50z_c/\sqrt{N} = 0.50(1.96)/\sqrt{N} = 0.05$ ، عندما تكون $N = 384.2$ بهذا فإن N يجب أن تساوى 385 على الأقل .

(ب) لـ 99.73 % ثقة ، $0.50z_c/\sqrt{N} = 0.50(3)/\sqrt{N} = 0.05$ ، عندما تكون $N = 900$ بهذا فإن N يجب أن تساوى 901 على الأقل .

طريقة أخرى :

عندما تكون $1.50/\sqrt{N} < 0.05$ أو $\sqrt{N} > 1.50/0.05$ ،

إذن $\sqrt{N} > 30$ أو $N > 900$ ، بحيث N يجب أن تكون 901 على الأقل .

٩-١٢ (أ) إذا كانت P هي نسبة النجاح المشاهدة في عينة حجمها N ، وضح أن حدود الثقة لتقدير نسبة النجاح في المجتمع p عند مستوى معنوية محددة بـ z_c يعطى كما يلي .

$$p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2N} \pm z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{N} + \frac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{N}}$$

(ب) استخدم الصيغة التي حصلنا عليها في (١) للحصول على % 99.73 حدود ثقة المسألة ٩-١٠ .

(ج) وضح أنه لقيم N الكبيرة فإن الصيغة في (١) تختصر إلى $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$ ، كما اتبع في المسألة ٩-١٠ .

الحل :

$$(١) \text{ نسبة العينة } P \text{ بوححدات معيارية } = \frac{P - p}{\sigma_P} = \frac{P - p}{\sqrt{p(1-p)/N}}$$

أكبر قيمة وأصغر قيمة لهذا المتغير المعياري هي $\pm z_c$ حيث z_c تحدد مستوى الثقة . عند هذه القيم المتطرفة يجب تبعا لذلك أن نحصل على

$$P - p = \pm z_c \sqrt{p(1-p)/N}$$

بتربيع الطرفين

$$P^2 - 2pP + p^2 = z_c^2 p(1-p)/N$$

بضرب الطرفين في N والتبسيط ، نجد أن

$$(N + z_c^2)p^2 - (2NP + z_c^2)p + NP^2 = 0$$

إذا كانت $c = NP^2$ ، $a = N + z_c^2$ ، $b = -(2NP + z_c^2)$ تصبح هذه المعادلة $ap^2 + bp + c = 0$ والتي حلها بالنسبة لـ p تعطى بالصيغة من الدرجة الثانية .

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2NP + z_c^2 \pm \sqrt{(2NP + z_c^2)^2 - 4(N + z_c^2)(NP^2)}}{2(N + z_c^2)} \\ = \frac{2NP + z_c^2 \pm z_c \sqrt{4NP(1-P) + z_c^2}}{2(N + z_c^2)}$$

بقسمة البسط والمقام على $2N$ ، تصبح الصيغة

$$p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2N} \pm z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{N} + \frac{z_c^2}{4N^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{N}}$$

(ب) لـ % 99.73 حدود ثقة ، $z_c = 3$. إذن باستخدام $p = 0.55$ و $N = 100$ في الصيغة التي حصلنا عليها في (١) نجد أن $p = 0.40$ و $P = 0.69$ ، وهذا يتفق مع نتيجة المسألة ٩-١٠ (ج) .

(ج) إذا كانت N كبيرة ، فإن $z_c^2/(2N)$ ، $z_c^2/(4N^2)$ and z_c^2/N تكون قيمة صغيرة يمكن إهمالها ويحل بدلا منها الصفر . بحيث نحصل على النتيجة المطلوبة

١٣-٩ في 40 رمية لعملة ، حصلنا على 24 صورة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99.73 % حدود ثقة لنسبة الصور التي يمكن الحصول عليها في عدد غير محدود من رميات العملة .

الحل :

(أ) عند المستوى 95 % ، $z_c = 1.96$ ، بالتعويض عن $P = 24/40 = 0.6$ و $N = 40$ في صيغة المسألة ١٢-٩ (أ) ، نجد أن $p = 0.45$ و $p = 0.74$ بحيث يمكن أن نقول بدرجة ثقة 95 % أن p تقع بين 0.45 و 0.74 .

، نجد أن $p = 0.60 \pm 0.15$ ، باستخدام الصيغة التقريبية $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$ وهذه تؤدي إلى الحصول على الفترة من 0.45 إلى 0.75 .

(ب) عند المستوى 99.73 % ، $z_c = 3$. باستخدام صيغة المسألة ١٢-٩ (أ) نجد أن $p = 0.37$ و $p = 0.79$.

، نجد أن $p = 0.60 \pm 0.23$ ، باستخدام الصيغة التقريبية $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/N}$ وهذه تؤدي إلى الحصول على الفترة من 0.37 إلى 0.83 .

فترات الثقة للفروق والمجتمع :

١٤-٩ عينة من 150 لمبات إضاءة من الصنف A كان متوسط عمرها الانتاجي هو 1400 ساعة وانحرافها المعياري 120 . عينة من لمبات الإضاءة من الصنف B مكونة من 200 لمبة كان متوسط عمرها الانتاجي 1200 ساعة وانحرافها المعياري 80 ساعة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين متوسط العمر الانتاجي لمجمعي الأصناف A و B .

الحل :

حدود الثقة للفرق بين المتوسطين للصنفين A و B تعطى بما يلي :

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \pm z_c \sqrt{\sigma_A^2/N_A + \sigma_B^2/N_B}$$

(أ) 95 % حدود ثقة هي $1400 - 1200 \pm 1.96 \sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/100} = 200 \pm 24.8$

أي أننا نكون 95 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين سوف يقع بين 175 h و 225 h .

(ب) 99 % حدود الثقة هي $1400 - 1200 \pm 2.58 \sqrt{(120)^2/150 + (80)^2/100} = 200 \pm 32.6$

أي أننا نكون 99 % واثقين بأن الفرق بين متوسطات المجتمعين تقع بين 167 h و 233 h .

١٥-٩ في عينة مكونة من 400 من البالغين و 600 من المراهقين الذين شاهدوا برنامجا تلفزيونيا معينا ، ذكر 100 من البالغين و 300 من المراهقين أنهم يفضلون هذا البرنامج . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق بين نسبة كل البالغين و نسبة كل المراهقين الذين شاهدوا هذا البرنامج و يفضلونه .

الحل :

حدود الثقة للفرق بين نسب المجموعتين تعطى كما يلى :

$$P_1 - P_2 \pm z_c \sqrt{p_1 q_1 / N_1 + p_2 q_2 / N_2}$$

حيث الدليل 1 يرمز للمراهقين والدليل 2 للبالغين . هنا $P_1 = 300/600 = 0.50$ و $P_2 = 100/400 = 0.25$ هي نسب المراهقين ونسب البالغين الذين يفضلون البرنامج على الترتيب .

$$(أ) 95 \% \text{ حدود ثقة : } 0.50 - 0.25 \pm 1.96 \sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.06$$

أى أننا نكون 95 % واثقين أن الفرق الحقيقى للنسب يقع بين 0.19 و 0.31

$$(ب) 99 \% \text{ حدود ثقة : } 0.50 - 0.25 \pm 2.58 \sqrt{(0.50)(0.50)/600 + (0.25)(0.75)/400} = 0.25 \pm 0.08$$

أى أننا نكون 99 % واثقين أن الفرق الحقيقى يقع بين 0.17 و 0.33 .

١٦-٩ متوسط e.m.f. لبطارية من إنتاج احدى الشركات هو 45.1 فولت وانحرافها المعياري هو 0.04 فولت .

إذا أوصلت أربعة من هذه البطاريات على التوالي ، أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % (د) 50 % . حدود ثقة لمجموع الـ e.m.f.

الحل :

إذا كانت E_1 و E_2 و E_3 و E_4 تمثل الـ e.m.f.'s للبطاريات الأربع ، فإن.

$$\mu_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \mu_{E_1} + \mu_{E_2} + \mu_{E_3} + \mu_{E_4} \text{ and } \sigma_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \sqrt{\sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 + \sigma_{E_3}^2 + \sigma_{E_4}^2}$$

$$\mu_{E_1} = \mu_{E_2} = \mu_{E_3} = \mu_{E_4} = 45.1 \text{ volts and } \sigma_{E_1} = \sigma_{E_2} = \sigma_{E_3} = \sigma_{E_4} = 0.04 \text{ volts. وبما أن}$$

إذن

$$\mu_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = 4(45.1) = 180.4 \text{ and } \sigma_{E_1 + E_2 + E_3 + E_4} = \sqrt{4(0.04)^2} = 0.08$$

- (أ) 95 % حدود ثقة هي : $180.4 \pm 0.16 \text{ volts}$ $180.4 \pm 1.96(0.08)$
 (ب) 99 % حدود ثقة هي : $180.4 \pm 0.21 \text{ volts}$ $180.4 \pm 2.58(0.08)$
 (ج) 99.73 % حدود ثقة هي : $180.4 \pm 0.24 \text{ volts}$ $180.4 \pm 3(0.08)$
 (د) 50 % حدود ثقة هي : $180.4 \pm 0.054 \text{ volts}$ $180.4 \pm 0.6745(0.08)$

القيمة 0.054 فولت تسمى بالخطأ المحتمل .

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

١٧-٩ الانحراف المعياري للعمر الانتاجي لعينة من 200 لمبة كهربائية كان 100 ساعة . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع اللامبات الكهربائية من نفس النوع .

الحل :

حدود الثقة للانحراف المعياري للمجتمع σ يعطى بالصورة $s \pm z_c \sigma / \sqrt{2N}$ حيث z_c تعبر عن مستوى الثقة . تستخدم الانحراف المعياري للعينة لتقدير σ .

$$(أ) \text{ الـ } 95 \% \text{ حدود ثقة هي : } 100 \pm 9.1 \quad 100 \pm 1.96(100)/\sqrt{400}$$

أى أننا نكون 95 % واثقين بأن الانحراف المعياري للمجتمع سوف يقع بين 90.2 h و 109.8 h .

$$(ب) \text{ الـ } 99 \% \text{ حدود ثقة هي : } 100 \pm 12.9 \quad 100 \pm 2.58(100)/\sqrt{400}$$

أى أننا نكون 99 % واثقين بأن الانحراف المعياري للمجتمع سوف يقع بين 87.1 h و 112.9 h

١٨-٩ ما هو حجم العينة من لمبات الاضاءة فى المسألة السابقة التى يجب أن نأخذها بحيث تكون 99.73 % واثقين بأن الانحراف المعياري الحقيقي ان يختلف عن الانحراف المعياري للعينة بأكثر من (أ) 5 % (ب) 10 % ؟

الحل :

99.73 % حدود ثقة لـ σ هي $s \pm 3\sigma / \sqrt{2N} = s \pm 3s / \sqrt{2N}$ باستخدام s كتقدير لـ σ .

$$\text{وهذا فإن نسبة الخطأ فى الانحراف المعيارى} = \frac{3s / \sqrt{2N}}{s} = \frac{300}{\sqrt{2N}} \% .$$

(أ) إذا كانت $300 / \sqrt{2N} = 5$ إذن $N = 1800$. وهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 1800 أو أكثر .

(ب) إذا كانت $300 / \sqrt{2N} = 10$ ، إذن $N = 450$. وهذا فإن حجم العينة يجب أن يكون 450 أو أكثر .

٢٩-٩ شركة بها 500 كابل . تم اختبار 40 كابل اختيرت عشوائيا فأظهرت أن متوسط قوة المقاومة للكسر $2400 N$ وانحراف معياري $150 N$.

(أ) ما هي الد 95% و الد 99% حدود ثقة لتقدير متوسط المقاومة للكسر بالنسبة للكابلات الباقية والتي عددها 4600 كابل ؟

(ب) ما هي درجة الثقة التي يمكن أن نقول بها أن متوسط المقاومة للكسر بالنسبة للكابلات الد 460 الباقية هو $2400 \pm 35 N$.

ج : (أ) $2400 \pm 59 N$, $2400 \pm 45 N$ (ب) 87.6%

تقدير فترات الثقة للنسب :

٣٠-٩ يحتوى وعاء على عدد غير معروف من البلى الأحمر والأبيض . عينة عشوائية من 60 من البلى إختيرت مع الارجاع من الوعاء أظهرت 70% من البلى الأحمر . أوجد (أ) 95% (ب) 99% (ج) 99.73% حدود ثقة للنسبة الفعلية للبلى الأحمر .

استخدم في الحل كلا من الصيغة التقريبية والصيغة المضبوطة المستخدمة في المسألة ٩-١٢ .

ج : (أ) 0.70 ± 0.12 , 0.69 ± 0.11 (ب) 0.70 ± 0.15 , 0.68 ± 0.15
(ج) 0.70 ± 0.18 , 0.67 ± 0.17

٣١-٩ ما هو حجم العينة من البلى التي يجب أن يأخذها الشخص في المسألة السابقة بحيث يكون (أ) 95% (ب) 99% (ج) 99.73% على ثقة من أن النسبة الحقيقية لن تختلف عن نسبة العينة بأكثر من 5% ؟

ج : (أ) 323 على الأقل

(ب) 560 على الأقل

(ج) 756 على الأقل .

٣٢-٩ من المعلوم أن نتيجة أحد الانتخابات سوف تظهر أصواتا متقاربة لكلا المرشحين . ما هو الحد الأدنى للأصوات التي يجب جمعها بحيث تكون (أ) 80% (ب) 90% (ج) 95% (د) 99% واثقين من قرار ترجيح أحد المرشحين على الآخر ؟

ج : (أ) 16 400 (ب) 27100 (ج) 38420 (د) 66600

فترات الثقة للفروق والمجموع :

٣٣-٩ في مجموعتين مئائيتين من المرضى ، A و B تتكونان من 50 و 100 شخص على الترتيب ، المجموعة الأولى أعطيت نوعا جديدا من الحبوب المنومة والمجموعة الثانية أعطيت نوعا معروفا من الحبوب . للمرضى من المجموعة A كان متوسط ساعات النوم هو 7.82 بانحراف معياري 0.24 ساعة . للمرضى من المجموعة B كان متوسط ساعات النوم هو 6.75 بانحراف معياري 0.30 ساعة .

أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة للفرق في متوسط ساعات النوم الناتجة من استخدام نوعي الحبوب المنومة .

$$\text{ج : (أ) } 1.07 \pm 0.09 \text{ h (ب) } 1.07 \pm 0.12 \text{ h}$$

٣٤-٩ عينة مكونة من 200 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة كان بها 15 مسمار تالف، بينما عينة مكونة من 100 مسمار قلاووظ من إنتاج آلة أخرى كان بها 12 مسمار تالف . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود ثقة للفرق بين نسب المسامير التالفة في الآلتين ناقش النتائج التي حصلت عليها .

$$\text{ج : (أ) } 0.045 \pm 0.073 \text{ (ب) } 0.045 \pm 0.097 \text{ (ج) } 0.045 \pm 0.112$$

٣٥-٩ شركة تصنع رولمان البلى لها متوسط 0.638 kg وانحرافها المعياري 0.012 kg . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لأوزان مجموعات يتكون كل منها من 100 من رولمان البلى .

$$\text{ج : (أ) } 63.8 \pm 0.24 \text{ kg (ب) } 63.8 \pm 0.31 \text{ kg}$$

فترات الثقة للانحرافات المعيارية :

٣٦-٩ الانحراف المعياري للمقاومة للكسر لـ 100 كابل تم اختيارها بواسطة الشركة كان 180 N . أوجد (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % حدود الثقة للانحراف المعياري لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

$$\text{ج : (أ) } 180 \pm 24.9 \text{ N (ب) } 180 \pm 32.8 \text{ N (ج) } 180 \pm 38.2 \text{ N}$$

٣٧-٩ أوجد الخطأ المحتمل للانحراف المعياري في المسألة السابقة .

$$\text{ج : } 8.6 \text{ N}$$

٣٨-٩ ما هو حجم العينة التي يجب سحبها بحيث يكون الشخص واثق (أ) 95 % (ب) 99 % (ج) 99.73 % من أن الانحراف المعياري للمجتمع لن يختلف عن الانحراف المعياري للعينة بأكثر من 2 % ؟

$$\text{ج : (أ) } 4802 \text{ على الأقل .}$$

$$\text{(ب) } 8321 \text{ على الأقل .}$$

$$\text{(ج) } 11250 \text{ على الأقل .}$$

الخطأ المحتمل :

٩-١٩ قيس الفولت لـ 50 بطارية من نفس النوع لها متوسط 18.0 فولت وانحراف معياري 0.5 فولت . أوجد
(١) الخطأ المحتمل للوسط . (ب) 50 % حدود ثقة .

الحل :

$$(١) \text{ الخطأ المحتمل للوسط} = 0.6745 \frac{s}{\sqrt{N-1}} = 0.6745 \frac{\hat{s}}{\sqrt{N}} = 0.6745 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0.6745 \sigma_{\bar{x}} = 0.6745 \sigma_{\bar{x}}$$

$$= 0.6745(0.5)/\sqrt{49} = 0.048 \text{ volts}$$

لاحظ أنه لو حسبنا الانحراف المعياري 0.5 فولت بصيغة σ ، فإن الخطأ المحتمل هو
 $0.048 = 0.6745 (0.5 / \sqrt{50})$ كذلك ؛ وبهذا يمكن استخدام أى التقديرين إذا كانت N كبيرة بدرجة كافية .

(ب) 50 % حدود ثقة هي 18 ± 0.048 فولت .

٩-٢٠ سجلت قياسات قيمتها 216.480 جرام ، بخطأ ± 0.272 جرام ما هي الـ 95 % حدود ثقة لهذه القياسات ؟

الحل :

$$\text{الخطأ المحتمل} = 0.272 = 0.6745 \sigma_{\bar{x}} \text{ or } \sigma_{\bar{x}} = 0.272/0.6745$$

$$95 \% \text{ حدود ثقة} = 216.480 \pm 1.96(0.272/0.6745) = 216.480 \pm 0.790$$

$$\text{جرام } \bar{x} \pm 1.96 \sigma_{\bar{x}} = 216.480 \pm 1.96(0.272/0.6745) = 216.480 \pm 0.790$$

مسائل اضافية

التقديرات غير المتحيزة والكفؤ :

٩-٢١ قياسات لعينة من الأوزان حددت كالاتي 8.3, 10.6, 9.7, 8.8, 10.2 and 9.4 kg

أوجد تقديرات غير متحيزة وكفوء لما يلي (١) متوسط المجتمع . (ب) تباين المجتمع . (ج) قارن بين الانحراف المعياري للعينة والانحراف المعياري المقدّر للمجتمع .

$$\text{ج : } (١) 9.5 \text{ kg} \quad (ب) 0.74 \text{ kg}^2 \quad (ج) 0.78$$

٩-٢٢ عينة من 10 لمبات تلفزيون من إنتاج إحدى الشركات كان متوسط عمرها الانتاجي 1200 h وانحرافها المعياري 100 h قدر (١) المتوسط (ب) الانحراف المعياري لمجتمع جميع لمبات التلفزيون المنتجة بهذه الشركة .

$$\text{ج : } (١) 1200 \text{ h} \quad (ب) 105.4 \text{ h}$$

٢٣-٩ (١) حل المسألة ٩-٢٢ إذا كانت نفس النتيجة التي حصلنا عليها للأعداد 100 و 50 و 30 لمبة تلفزيون .

(ب) ما هو استنتاجك بخصوص العلاقة بين الانحراف المعياري للعينة وتقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لأحجام مختلفة للعينة ؟

ج : (١) تقديرات الانحرافات المعيارية للمجتمع لعينات أحجامها 100 و 50 و 30 لمبة هي على الترتيب 100.5 h ، 101.0 ، 101.7 . تقديرات متوسطات المجتمع هي 1200 h في جميع الحالات .

تقدير فترات الثقة لوسط المجتمع :

٢٤-٩ إذا كان الوسط الحسابي للعمل الأعظم المنقول خلال 60 كابل (أنظر المسألة ٣-٥٩ ، الفصل الثالث) هو 11.09 kw والانحراف المعياري هو 0.73 kw . أوجد (١) 95 % (ب) 99 % حدود ثقة لوسط الحمل الأعظم لجميع الكابلات المنتجة بواسطة الشركة .

ج : (١) $11.09 \pm 0.18 \text{ kN}$ (ب) $11.09 \pm 0.24 \text{ kN}$

٢٥-٩ الوسط الحسابي لأقطار عينة من 250 مسار برشام .منتجة بواسطة شركة هو 7.2642 mm وانحرافها المعياري 0.0058 mm (أنظر المسألة ٣-٦١ ، الفصل الثالث) . أوجد (١) 99 % (ب) 98 % (ج) 95 % (د) 90 % حدود ثقة للوسط الحسابي لأقطار جميع المسامير البرشام المنتجة بواسطة هذه الشركة .

ج : (١) $7.2642 \pm 0.00095 \text{ mm}$ (ب) $7.2642 \pm 0.00085 \text{ mm}$

(ج) $7.2642 \pm 0.00072 \text{ mm}$ (د) $7.2642 \pm 0.00060 \text{ mm}$

٢٦-٩ أوجد (١) ا. 50 % حدود ثقة و (ب) الخطأ المحتمل لمتوسط الأقطار في المسألة ٩-٢٥ .

ج : (١) $7.2642 \pm 0.00025 \text{ mm}$ (ب) 0.00025 mm

٢٧-٩ إذا كان الانحراف المعياري للعمر الانتاجي للمبات التلفزيون يقدر بـ 100 ساعة ، ماهو حجم العينة التي يجب أن نأخذها بحيث نكون (١) 95 % (ب) 90 % (ج) 99 % (د) 99.73 % واثقين من أن الخطأ من تقدير متوسط العمر الانتاجي لن يتجاوز 20 ساعة .

ج : (١) على الأقل 96 (ب) على الأقل 68

(ج) على الأقل 167 (د) على الأقل 225

٢٨-٩ ماهو حجم العينة في المسألة السابقة إذا كان الخطأ في تقدير متوسط العمر الانتاجي يجب ألا يتجاوز 10 ساعات ؟

ج : (١) على الأقل 384 (ب) على الأقل 271

(ج) على الأقل 666 (د) على الأقل 900

الفصل العاشر

نظرية القرارات الاحصائية

واختبارات الفروض والمعنوية

القرارات الاحصائية :

في كثير من المشاكل العملية يكون المطلوب هو اتخاذ قرارات تخص المجتمع وذلك بناء على بيانات مستمدة من العينة . مثل هذه القرارات تسمى قرارات احصائية . فمثل سبيل المثال ، قد نريد أن نقرر بناء على بيانات العينة ما إذا كان مصلى جديد يؤثر بشكل حقيقى فى شفاء مرض معين ، وما إذا كانت طريقة تدريس معينة أحسن من طريقة أخرى ، وما إذا كانت عملة معينة متحيزة ، وهكذا .

الفروض الاحصائية . فرض العدم :

فى محاولة الوصول إلى قرار ، فن المفيد وضع فروض أو تخمينات عن المجتمعات موضوع الدراسة . مثل هذه الفروض ، والتي قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ، تسمى بالفروض الاحصائية وبشكل عام هي تعبيرات عن التوزيعات الاحتمالية لهذه المجتمعات .

فى كثير من الأحيان نصيغ الفروض الاحصائية وهدفنا الوحيد هو رفضه أو ابطاله . على سبيل المثال ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت عملة معينة متحيزة فإننا نصيغ الفرض أن العملة غير متحيزة ، بمعنى ، $p = 0.5$ ، حيث p هو احتمال الصور . وبنفس الصورة ، إذا أردنا تقرير ما إذا كانت إحدى الطرق أحسن من غيرها ، فإننا نصيغ الفرض بأنه لا يوجد اختلاف بين الطرق (بمعنى ، أن أى اختلافات مشاهدة ترجع تقريبا إلى تقلبات المعاينة من نفس المجتمع) . مثل هذه الفروض تسمى فروض العدم ويرمز لها بالرمز H_0 .

أى فرض يختلف عن الفرض المعطى يسمى بالفرض البديل . على سبيل المثال ، إذا كان أحد الفروض هو $p = 0.5$ ، فإن الفروض البديلة هي $p > 0.5$ و $p < 0.5$ و $p \neq 0.5$. الفرض البديل لفرض العدم يرمز له بالرمز H_1 .

اختبارات الفروض والمعنوية :

إذا حصلنا تحت افتراض أن فرضا معيننا صحيحا على بيانات مشاهدة من عينة عشوائية تختلف بشكل ملحوظ عما يتوقع تحت الفرض على أساس من العشوائية البحتة طبقا لنظرية المعاينة ، فإننا نقول أن الفروق المشاهدة معنوية وسنكون أكثر ميلا لرفض الفرض (أو على الأقل عدم قبوله على أساس الأدلة المعطاة) . على سبيل المثال ، إذا رميت عملة 20 مرة

وننتج عنها 16 صورة فإننا سنكون أكثر ميلا لرفض الفرض القائل أن العملة متوازنة ، على الرغم من أن هناك امكانية في أن نكون على خطأ .

الطرق التي تمكننا من تقرير قبول أو رفض الفروض أو تحديد ما إذا كانت العينات المشاهدة تختلف معنويا عن النتائج المتوقعة تسمى باختبارات الفروض ، اختبارات المعنوية أو قواعد اتخاذ القرار .

الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني :

إذا رفضنا فرضا كان من الواجب قبوله ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الأول . ومن الناحية الأخرى ، إذا قبلنا فرضا كان من الواجب رفضه ، فإننا نرتكب خطأ من النوع الثاني . وفي كلتا الحالتين فإن قرارا خاطئا يتخذ أو خطأ في الحكم يقع .

وحتى تكون اختبارات الفروض أو قواعد اتخاذ القرارات جيدة ، فيجب أن تصمم بحيث تؤدي إلى التقليل من أخطاء القرار . ولكن هذا ليس بالأمر السهل ، حيث أنه لحجم عينة معين ، فإن محاولة انقاص أحد أنواع الخطأ يصاحبه بشكل عام زيادة في النوع الآخر من الخطأ . ومن الناحية العملية فإن أحد أنواع الخطأ قد يكون أكثر خطورة من النوع الآخر ، وبهذا فإنه يجب الوصول إلى حل وسط لصالح تحديد الخطأ الأكثر خطورة . الطريقة الوحيدة للتقليل من نوعي الخطأ هو زيادة حجم العينة ، وقد يكون هذا ممكنا وقد لا يكون .

مستوى المعنوية :

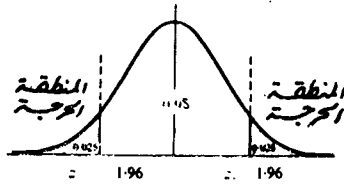
في اختبار فرض معين ، فإن أقصى احتمال والذي يمكن أن نتحمل به خطأ من النوع الأول يسمى مستوى المعنوية للاختبار . هذا الاحتمال ، ويرمز له بالرمز α ، يحدد بشكل عام قبل سحب أى عينة ، بحيث لا تؤثر النتائج التي حصلنا عليها في اختيارنا .

من الناحية العملية فإننا نستخدم عادة مستوى المعنوية 0.05 أو 0.01 ، وإن كانت هناك قيم أخرى يتم استخدامها . وعلى سبيل المثال إذا استخدمنا 0.05 أو 5% مستوى معنوية في تصميم اختبار للفرض ، فإن هناك حوالى 5 فرص في كل 100 أننا سوف نرفض الفروض عندما يجب أن نقبله ، بمعنى ، أننا سنكون واثقين بنسبة 95% في أننا سنتخذ القرار السليم . في هذه الحالة فإننا نقول أن الفرض رفض عند مستوى المعنوية 0.05 ، وهذا يعنى أنه من الممكن أن نكون على خطأ باحتمال 0.05 .

اختبارات تتضمن التوزيع الطبيعي :

لأعطاء أمثلة للأفكار التي عرضناها أعلاه تصور أنه تحت فرض معين أن توزيع المعاينة للاحصائية S هو التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_S وانحراف معياري σ . بهذا فإن توزيع المتغير المعياري (أو درجات z) ، وتعطى بالصورة $z = (S - \mu_S) / \sigma_S$ هو المتغير الطبيعي المعياري (متوسطه 0 ، تباينه 1) ويظهر بالشكل ١٠-١ .

فإذا أخذنا عينة واحدة عشوائية وكانت قيم z للاحصائية تقع خارج المدى 1.96 — إلى 1.96 ، فإننا



شكل ١٠ - ١

نستنتج أن مثل هذا الحدث يمكن أن يقع باحتمال 0.05 فقط (مجموع المساحة المظلة بالشكل) إذا كان الفرض صحيحا . وبهذا يمكن أن نقول أن قيم z تختلف معنويا عما يجب أن يكون متوقعا تحت الفرض وبهذا نميل إلى رفض الفرض .

المساحة الكلية المظلة 0.05 هي مستوى المعنوية للاختبار . وهذه تمثل احتمال ارتكاب خطأ رفض الفرض ، أو احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول . وبهذا نقول أن الفرض رفض عند مستوى معنوية 0.05 أو أن قيم z لاحصائية العينة معنوية عند مستوى المعنوية 0.05 .

قيم z خارجة المدى من 1.96 — إلى 1.96 تكون ما يسمى بالمنطقة الحرجة أو منطقة رفض الفرض أو منطقة المعنوية . مجموعة قيم z داخل المدى من 1.96 إلى 1.96 يمكن أن تسمى بمنطقة قبول الفرض أو منطقة عدم المعنوية .

على أساس الملاحظات السابقة يمكن صياغة القواعد التالية للقرارات أو اختبار الفروض أو المعنوية .

(أ) ارفض الفرض عند مستوى معنوية 0.05 إذا كانت قيم z للاحصائية K تقع خارج المدى من 1.96 — إلى 1.96 بمعنى ، $z > 1.96$ أو $z < -1.96$.

وهذا يكافئ القول بأن القيمة المشاهدة للاحصائية العينة معنوية عند المستوى 0.05 .

(ب) اقبل الفرض (أو إذا كان من المرغوب عدم اتخاذ أى قرار على الإطلاق) خلاف ذلك .

ونظرا لأن قيم z تلعب دورا هاما في اختبارات الفروض والمعنوية . فلها تسمى أيضا احصائية الاختبار .

ويجب ملاحظة أن هناك مستويات أخرى للمعنوية يمكن استخدامها على سبيل المثال ، إذا استخدمنا مستوى 0.01 فإننا نستبدل 1.96 التي استخدمت أعلاه بـ 2.58 (أنظر الجدول ١٠-١ أدناه) . جدول ٩-١ صفحة ٢٥١ يمكن أيضا استخدامه بما أن مجموع مستوى المعنوية ومستوى الثقة هو 100% .

اختبار من طرف واحد واختبار من طرفين :

في الاختبار السابق أظهرنا الاهتمام بالقيم المتطرفة للاحصائية K أو قيم z المقابلة لها على جانبي المتوسط ، أو على كل من « أطراف » التوزيع . ولهذا السبب تسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين أو الاختبار في الجانبين .

غالبا ، ما تكون مهتمين فقط بالقيم المتطرفة في جانب واحد من المتوسط ، أى في « طرف » واحد من التوزيع ،

فعل سبيل المثال عندما تكون مهمتين باختبار الفرض أن تكون أحد المعالجات أحسن من غيرها (والتي تهدف عن اختبار ما إذا كانت معالجة أحسن أو أسوأ من غيرها) . مثل هذه الاختبارات تسمى اختبارات من طرف واحد أو اختبارات من جانب واحد . وفي هذه الحالات فإن المنطقة الحرجة هي منطقة في جانب واحد من التوزيع ، مساحتها تساوي مستوى المعنوية . الجدول ١٠-١ يعطى القيم الحرجة لـ z لكل من الاختبارات من طرف واحد والاختبارات من طرفين لمستويات مختلفة من المعنوية ، وهو مفيد للرجوع إليه . القيم الحرجة لـ z لمستويات المعنوية الأخرى يمكن الحصول عليها باستخدام جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي .

جدول ١٠-١

مستوى المعنوية α	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
قيم z الحرجة للاختبارات من طرف واحد	-1.28 or 1.28	-1.645 or 1.645	-2.33 or 2.33	-2.58 or 2.58	-2.88 or 2.88
قيم z الحرجة للاختبارات من طرفين	-1.645 and 1.645	-1.96 and 1.96	-2.58 and 2.58	-2.81 and 2.81	-3.08 and 3.08

اختبارات خاصة :

للعينات الكبيرة يتبع توزيع المعاينة لكثير من الاحصائيات التوزيع الطبيعي (أو على الأقل قريب من التوزيع الطبيعي) بمتوسط μ_S وانحراف معياري σ_S . في مثل هذه الحالات يمكن أن نستخدم النتائج السابقة لصياغة قواعد اتخاذ القرار أو اختبارات الفروض والمعنوية . الحالات الخاصة التالية ، مأخوذة من الجدول ٨-١ ، صفحة ٢٣٠ هي حالات قليلة من الاحصائيات ذات الأهمية العملية . في كل حالة فإن النتائج صالحة للمجتمع غير المحدودة أو للمعاينة بارجاع . أما للمعاينة بدون ارجاع من المجتمعات المحدودة فإن النتائج يجب تعديلها . أنظر الصفحة ٢٢٧ .

١ - الأوساط :

هنا $S = \bar{X}$ ، الوسط الحسابي للعينة $\mu = \mu_{\bar{X}} = \mu$ متوسط المجتمع ، $\sigma_S = \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث σ هو الانحراف المعياري للمجتمع ، N هو حجم العينة . قيم z تعطى بالصيغة

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$$

وعند الضرورة نستخدم الانحراف المعياري للعينة s أو $\hat{\sigma}$ لتقدير σ .

٢ - النسب :

هنا $S = P$ ، نسبة النجاح « في عينة » ، $\mu_S = \mu_P = p$ ، حيث p هي نسبة النجاح في المجتمع و N

هو حجم العينة ، $\sigma_S = \sigma_P = \sqrt{pq/N}$ حيث $q = 1 - p$. قيم z تعطى كما يلي

$$z = \frac{P - p}{\sqrt{pq/N}}$$

في حالة $P = X/N$ ، حيث X هو العدد الفعلي لحالات النجاح في عينة ، وبهذا فإن قيم z تصبح .

$$z = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$$

أى أن

$$\mu_X = \mu = Np, \sigma_X = \sigma = \sqrt{Npq}, \text{ and } S = X$$

النتائج للاحصائيات الأخرى يمكن الحصول عليها بالمثل .

منحنيات توصيف العمليات . قوة الاختبار :

درسنا فيما سبق كيف يمكن تقليل الخطأ من النوع الأول باختيار مستوى المعنوية المناسب . ومن الممكن تجنب الوقوع في الخطأ من النوع الثانى كلية ، وذلك بعدم الوقوع فيه ، وهذا يتطلب عدم قبول أى فرض . وفى كثير من الحالات العملية يعد هذا غير ممكن . فى مثل هذه الحالات فإنه يتم استخدام منحنيات توصيف العمليات أو منحنيات OC ، وهى أشكال الخطأ من النوع الثانى تحت فروض مختلفة . وهكذا يعطى مؤشر الحرف α على الكلمة الأولى الذى ما يتيح اختبار معين لنا من وهذه المنحنيات مفيدة فى الثانى ، أى أنها تعطى مؤشرا لقوة الاختبار فى تلافى الوقوع فى اتخاذ القرارات خاطئة . تقليل للأخطاء من النوع تصميم التجارب فإنها توضح على سبيل المثال ، ما هو حجم العينة الذى يمكن استخدامه .

خرائط الرقابة :

من المهم فى الناحية العملية معرفة ما إذا كانت عملية صناعية قد تغيرت بشكل كاف بحيث يجب اتخاذ خطوات لمعالجة الموقف . مثل هذه المشاكل تظهر ، على سبيل المثال ، فى الرقابة على جودة الإنتاج عندما يجب ، وبسرعة ، تقرير ما إذا كانت التغيرات المشاهدة ترجع إلى تقلبات الصدفة أو إلى تغيرات فعلية فى العملية الصناعية لأسباب مثل تقادم أجزاء الماكينة ، أو أخطاء العاملين ، وغير ذلك . وتعطى خرائط الرقابة طريقة مفيدة وبسيطة للتعامل مع هذه المشاكل (أنظر المسألة ١٠ - ١٦) .

اختبارات المعنوية التى تتضمن الفروق بين العينات :

١ - الفروق بين الأوساط :

اعتبر أن \bar{X}_1 و \bar{X}_2 هى أوساط العينة التى حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 و N_2 بحيث من مجتمعات أوساطها μ_1 و μ_2 وانحرافاتهما المعيارية σ_1 و σ_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لا يوجد فروق بين أوساط المجتمعين . أى أن $\mu_1 = \mu_2$ أو أن العينات مسحوبة من مجتمعين لها نفس الوسط الحسابى .

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ . المعادلة (٥) ، إذا وضعنا $\mu_1 = \mu_2$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين الأوساط يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري معطين كما يلي .

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{(\sigma_1^2/N_1) + (\sigma_2^2/N_2)}$$

ويمكن هنا ، إذا كان ذلك ضرورياً ، استخدام الانحرافات المعيارية للعينات s_1 و s_2 (أو \hat{s}_1 و \hat{s}_2) لتقدير σ_1 و σ_2 .

باستخدام المتغير المعياري أو قيم z المعطاة كما يلي .

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

يمكن اختبار فرض العدم ضد الفروض البديلة (أو معنوية الفروق) عند مستوى ملائم للمعنوية

٢ — الفروق بين النسب :

اعتبر أن P_1 و P_2 هي نسب العينة التي حصلنا عليها من عينات كبيرة أحجامها N_1 ، N_2 مسحوبة من مجتمع ذيها p_1 ، p_2 . اعتبر فرض العدم بأنه لا يوجد فرق بين معاملي المجتمعين ، أي أن $p_1 = p_2$ ، وهذا فإن العينات مسحوبة فعلاً من نفس المجتمع .

من الفصل الثامن ، صفحة ٢٢٩ . المعادلة (٦) إذا وضعنا $p_1 = p_2 = p$ فإننا نجد أن توزيع المعاينة للفروق بين النسب يتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي بوسط حسابي وانحراف معياري معطين كما يلي .

$$(١٠) \quad \mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)}$$

حيث $p = \frac{N_1 P_1 + N_2 P_2}{N_1 + N_2}$ (١٠) يستخدم كتقدير لنسب المجتمع p و $q = 1 - p$ باستخدام المتغير المعياري

$$(١٤) \quad z = \frac{P_1 - P_2 - 0}{\sigma_{P_1 - P_2}} = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1 - P_2}}$$

يمكن أن تختار الفروض المساعدة عند مستوى ملائم وبالتالى تختبر فرض العدم .

الاختبارات المتضمنة احصائيات أخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة .

اختبارات تتضمن توزيعات ذي الحدين :

الاختبارات المتضمنة لتوزيع ذي الحدين ومثل ذلك التوزيعات الأخرى يمكن تصميمها بصورة مشابهة لتلك التي تستخدم فيها

التوزيع الطبيعي . حيث تقع الحدود الأساسية في كل مـ (أنظر المسألة ١٠ - ٢٣ إلى ١٠ - ٢٨)

مسائل محلولة

اختبارات الأوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ - ١ أوجد احتمال الحصول على ما بين 40 و 60 صورة (بما في ذلك 40 ، 60) في 100 رمية لعملة متوازنة .

الحل :

طبقاً لتوزيع الطبيعي فإن الاحتمال المطلوب هو :

$${}_{100}C_{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{60} + {}_{100}C_{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{59} + \dots + {}_{100}C_{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{60}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}$$

بما أن $Np = 100\left(\frac{1}{2}\right)$ و $Nq = 100\left(\frac{1}{2}\right)$ وكلاهما أكبر من 5 ، وهذا يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين لحساب هذا المجموع

المتوسط والانحراف المعياري لعدد الصور في 100 رمية يعطيان بما يلي :

$$\mu = Np = 100\left(\frac{1}{2}\right) = 50 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 5$$

وباستخدام الفرض بأن المتغير مستمر ، فإن عدد الصور بين 40 و 60 متضمنة 40 و 60 (مثل عدد الصور بين 39.5 و 60.5)

$$39.5 \text{ مقاسة بوحدات معيارية } = (39.5 - 50)/5 = -2.10$$

$$60.5 \text{ مقاسة بوحدات معيارية } = (60.5 - 50)/5 = 2.10$$

الاحتمال المطلوب = المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -2.10$ و $z = 2.10$

$$2 \times (\text{المساحة بين } z = 0 \text{ و } z = 2.10) = 2(0.4821) = 0.9642$$

١٠ - ٢ لاختبار الفرض أن عملة غير متحيزة ، اعتبرت القواعد التالية لاتخاذ القرار : (١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور في عينة واحدة من 100 رمية تقع بين 40 و 60 (بما فيها 40 ، 60) (٢) ارفض الفرض فيما عد ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

(ب) عبر بالرسم عن قواعد اتخاذ القرار والنتائج في الجزء (أ)

(ج) ماهو استنتاجك إذا كانت العينة المكونة من 100 رمية ينتج عنها 53 صورة ؟ 60 صورة ؟

(د) هل يمكن أن تكون مخطئاً في استنتاجك في (ج) ؟ وضح

الحل :

(أ) من المسألة ١٠ - ١ ، احتمال عدم الحصول

على عدد صور بين 40 و 60 (بما فيها

40 و 60) إذا كانت العملة غير متحيزة

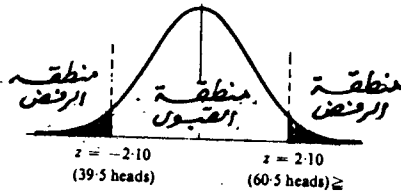
$1 - 0.9642 = 0.0358 =$ إذن احتمال

رفض الفرض على الرغم من أنه سليم $0.0358 =$

(ب) قواعد اتخاذ القرار موضحة بالشكل ١٠-١

والذي يوضح التوزيع الاحتمالي للصور في 100

رمية لعملة غير متحيزة .



شكل ١٠ - ٢

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z بين -2.10 و 2.10 ، فإننا نقبل الفرض بخلاف ذلك نرفض ونقرر أن العملة متحيزة .

الخطأ الناتج من رفض الفرض عندما يجب أن نقبله هو الخطأ من النوع الأول في قواعد اتخاذ القرار : واحتمال الوقوع في هذا الخطأ ، هو 0.0358 من الجزء (أ) ويمثل بالأجزاء المظلة في الرسم .

إذا كانت عينة مكونة من 100 رمية ينتج عنها قيم z (أو إحصائية z) تقع في المناطق المظلة ، فإننا نقول أن هذه القيم تختلف اختلافاً معنوياً مما يمكن أن نتوقعه إذا كان الفرض صحيحاً . ولهذا السبب فإن إجمالى المساحة المظلة (احتمال الخطأ من النوع الأول) تسمى بمستوى المعنوية لقواعد اتخاذ القرار وتساوى في هذه الحالة 0.0358 . وبهذا نتكلم عن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.0358 أو 3.58% .

(ج) طبقاً لقاعدة اتخاذ القرار ، فإننا نقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة في كلتا الحالتين . ويمكن مناقشة هذه القاعدة على أساس لو ظهرت صورة واحدة أخرى فإن هذا كان سيؤدي إلى رفض الفرض . وهذا مايواجهه الشخص عند استخدام خط فاصل في تقسيم مناطق القبول والرفض عند اتخاذ القرارات .

(د) نعم . سوف نقبل الفرض عندما يجب رفض هذا الفرض بالفعل ، كما في الحالة على سبيل المثال عندما يكون احتمال الصور هو 0.7 حقيقة بدلا من 0.5 .

الخطأ من قبول الفرض عندما يجب رفضه هو الخطأ من النوع الثاني . لمزيد من المناقشة أنظر المسائل من ١٠ - ١٠

إلى ١٠ - ١٢ .

١٠ - ٣ ميم قاعدة لاتخاذ قرار بشأن اختبار الفرض بأن عملة غير متحيزة إذا أخذت عينة مكونة من 54 رمية للعملة وكان

مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

(أ) الطريقة الاولى : إذا كان مستوى المنوية

0.05 ، فإن كلا من المنطقة المظلة في الشكل

١٠ - ٣ يساوي 0.0250 بالتأثيل . وهذا فإن

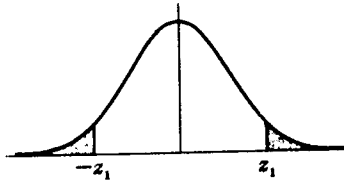
المساحة بين الصفر و z_1 ستساوي

$$z_1 = 1.96 \text{ و } 0.5000 - 0.0250 = 0.4750$$

وبهذا فإن أحد القواعد الممكنة لاتخاذ القرار

هي :

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كانت

 z تقع بين 1.96 - و 1.96

شكل ١٠ - ٣

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

القيم الحرجة 1.96 - و 1.96 يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١ .

للتعبير عن هذه القاعدة بدلالة عدد الصور التي سوف نحصل عليها في 64 رمية للعملة ، لاحظ أن المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع الصور هما :

$$\mu = Np = 64(0.5) = 32, \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{64(0.5)(0.5)} = 4$$

وذلك تحت فرض أن العملة غير متحيزة .

$$z = (X - \mu) / \sigma = (X - 32) / 4 \quad \text{إذن}$$

إذا كانت $z = 1.96, (X - 32) / 4 = 1.96$ or $X = 39.84$. If $z = -1.96, (X - 32) / 4 = -1.96$ or $X = 24.16$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ، ستكون

(١) اقبل الفرض بأن العملة غير متحيزة إذا كان عدد الصور يقع بين 24.16 و 39.84 أى بين 25 و 39 (شاملة 25 و 39)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

الطريقة الثانية : باحتمال 0.95 ، فإن عدد الصور سوف يقع بين .

$$Np - 1.96\sqrt{Npq} \text{ and } Np + 1.96\sqrt{Npq} \quad \text{أى} \quad \mu - 1.96\sigma \text{ and } \mu + 1.96\sigma$$

$$32 - 1.96(4) = 24.16 \text{ and } 32 + 1.96(4) = 39.84 \quad \text{أو بين}$$

والذى سيؤدى إلى القاعدة السابقة في اتخاذ القرار .

طريقة ثالثة : $-1.96 < z < 1.96$ — تكافئ $1.96 < \frac{1}{4}(X - 32) < 1.96$ —

إذن $1.96(4) < (X - 32) < 1.96(4)$ — أو $32 - 1.96(4) < X < 32 + 1.96(4)$, i.e. $24.16 < X < 39.84$

والذي يؤدي أيضاً إلى القاعده السابقة في اتخاذ القرار .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن كلا من المنطقة المظلة في الرسم أعلاه تساوى 0.005 . إذن المساحة

بين الصفر و z_1 تساوى $0.4950 = 0.0050 - 0.5000 = 0.5000$ و $z_1 = 2.58$ (بصورة أكثر دقة 2.575) .

وهذه القيمة يمكن الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١

باستخدام الأسلوب في الطريقة الثانية في (أ) ، فإننا نجد باحتمال 0.99 أن عدد الصور سيقع بين

$$\mu - 2.58\sigma \text{ and } \mu + 2.58\sigma, \text{ i.e. } 32 - 2.58(4) = 21.68 \text{ and } 32 + 2.58(4) = 42.32$$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار ستكون

(١) اقبل الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 ، 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

١٠ - ٤ : كيف يمكنك تصميم قاعدة لاتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٣ بحيث تتجنب الخطأ من النوع الثاني ؟

الحل :

نقع في الخطأ من النوع الثاني وذلك بقبول الفرض عندما يكون من الواجب رفضه . لتجنب هذا الخطأ ، فإنه بدلا من قبول الفرض فإننا ببساطة لانرفضه ، والذي يعنى أننا نؤجل اتخاذ القرار في هذه الحالة . هذا ، على سبيل المثال ، يمكن صياغة قاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٣ (ب) كما يلي :

(١) لانرفض الفرض إذا كان عدد الصور يقع بين 22 و 42 (شاملة 22 و 42)

(٢) ارفض الفرض فيما عدا ذلك .

في كثير من النواحي العملية ، يكون من المهم تقرير ما إذا كان من الواجب قبول الفرض أو رفضه . المناقشة السكاملة لمثل هذه الحالات تتطلب الأخذ في الاعتبار الخطأ من النوع الثاني (أنظر المسائل من ١٠ - ١٠ إلى ١٠ - ١٢)

١٠ - ٥ : في تجربة لقياس القدرة الحارقة على الإدراك (الحاسة السادسة) (E.S.P.) طلب من شخص (موضوع التجربة)

في حجرة أن يوضح لون (أحمر أو أزرق) كارت من 50 كارت مخلوطة خلطاً جيداً اختير بواسطة شخص في حجرة ثانية . وكان من غير المعروف للشخص موضوع التجربة عدد الكروت الحمراء أو الزرقاء في مجموعة الكروت . إذا أمكن للشخص موضوع التجربة أن يميز 32 كارت تمييزاً صحيحاً ، حدد ما إذا كانت النتائج معنوية عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية .

الحل :

إذا كانت p هي احتمال أن يختار الشخص موضوع التجربة اللون الصحيح ، وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين التاليين :

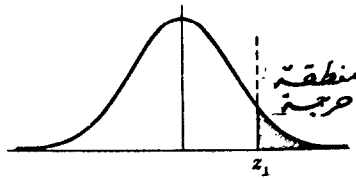
$H_0 : p = 0.5$ ، أى أن الشخص يخمن وأن النتائج ترجع للصدفة .

$H_1 ; p > 0.5$ ، والشخص له قدره خارقة على الإدراك .

ونختار هنا اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا لانهم بقدرة الشخص على تسجيل قيم ضئيلة ولكن نهم فقط بقدرة على تسجيل قيم مرتفعة .

إذا كان الفرض H_0 صحيحاً ، فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد الكروت الذى أمكن تمييزها بشكل سليم هما :

$$\mu = Np = 50(0.5) = 25 \text{ and } \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{50(0.5)(0.5)} = \sqrt{12.5} = 3.54$$



شكل ١٠ - ٤

(١) للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية

0.05 فإننا يجب اختيار z_1 في الشكل

١٠ - ٤ بحيث تساوى المساحة المظلة

في المنطقة الحرجة للقيم الكبيرة ، 0.05 .

إذن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى

0.4500 و $z_1 = 1.645$. ويمكن

الحصول عليها أيضاً من الجدول ١٠ - ١ .

وبهذا تكون قواعد اتخاذ القرار أو اختبار المعنوية كما يلي :

(١) إذا كانت قيم z الملاحظة أكبر من 1.645 ، فإن النتيجة معنوية عند مستوى 0.05 ويكون لدى الشخص قوة خارقة على الإدراك .

(٢) إذا كانت قيم z أقل من 1.645 فإن النتيجة ترجع للصدفة ، أى غير معنوية عند المستوى 0.05 .

وبما أن 32 معبراً عنها بوحدات معيارية تساوى $1.98 = (32 - 25)/3.54$ وهى أكبر من 1.645

فإن القرار (١) ينطبق ، بمعنى أننا نستنتج عند المستوى 0.05 أن الشخص عنده قدرة خارقة على الإدراك .
E.S.P.

لاحظ أنه يجب أن نطبق التصحيح الخاص بالمتغيرات المتصلة ، وبما أن 32 في مقياس الاستمرار تقع بين

31.5 و 32.5 . والرقم 31.5 معبراً عنها بوحدات معيارية هى $1.84 = (31.5 - 25)/3.54$ وبهذا

تصل إلى نفس الاستنتاج السابق .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن المساحة بين الصفر و z_1 تساوى 0.4900 و $z_1 = 2.33$ وبما أن 32 (أو 31.5) معبراً عنها بوحدة معيارية هي 1.98 (أو 1.84) وهي أقل من 2.33 فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند 0.01.

يتبنى بعض الإحصائيين المصطلح بأن النتائج المعنوية عند المستوى 0.01 تسمى مرتفعة المعنوية ، والنتائج المعنوية عند المستوى 0.05 وغير المعنوية عند 0.01 بأنها محتملة المعنوية ، بينما النتائج المعنوية عند مستويات أكبر من 0.05 غير معنوية .

وبما أن مستويات المعنوية تستخدم كؤشر في اتخاذ القرارات ، فإن بعض الإحصائيين يذكر الاحتمالات الفعلية المستخدمة . على سبيل المثال في هذه المسألة فيما أن $\Pr\{z \geq 1.84\} = 0.0322$ ، فإن الاحصائي يمكنه القول بأنه استناداً إلى التجربة فإن فرصة ارتكاب الخطأ بالقول أن هذا الشخص له قوة خارقة على الإدراك E.P.S. هي حوالى 3 في كل 100 . الاحتمال المذكور في هذه الحالة 0.0322 ، يسمى أحياناً بالمعنوية الوصفية أو المعنوية التجريبية .

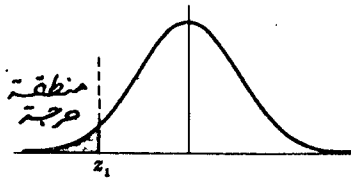
١٠ - ٦ مصنع للأدوية المسجلة يدعى أن دواء من انتاجه له فاعلية بنسبة 90% في التخفيف من الحساسية لفترة 8 ساعات . في عينة من 200 شخص مصابين بالحساسية ، أدى الدواء إلى تخفيف آلام 160 منهم . قرر ما إذا كان ادعاء المصنع صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال أن يؤدي الدواء إلى التخفيف من آلام الحساسية . وبهذا فإنه يجب أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : p = 0.9 \text{ والادعاء صحيح}$$

$$H_1 : p < 0.9 \text{ والادعاء باطل}$$



شكل ١٠ - ٥

نختار اختباراً من طرف واحد ، حيث أننا نهم بتحديد ما إذا كانت نسبة الأشخاص الذين شفوا باستخدام الدواء نسبة قليلة.

إذا كان مستوى المعنوية المأخوذ هو 0.01 بمعنى أن المساحة المظللة في الشكل ١٠ - ٥ هي 0.01 فإن $z_1 = -2.33$ كما في المسألة ١٠ - ٥ (ب) باستخدام خاصية التماثل في المنحنى ، أو من الجدول ١٠ - ١ . ونستخدم كأساس لاتخاذ القرار :

(١) الفرض ليس صحيحاً إذا كانت z أقل من -2.33 (وفي هذه الحالة نرفض H_0).

(٢) في غير ذلك من الحالات ، الادعاء صحيح والنتائج المشاهدة ترجع إلى الصدفة (في هذه الحالة نقبل H_0).

إذا كانت H_0 صحيحة ، $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

في هذه الحالة 160 معبراً عنها بوحدة معيارية $4.73 = (160 - 80)/4$ وهي أقل بكثير من -2.33 وطبقاً لقاعدة اتخاذ القرار التي وضعناها فإننا نستنتج أن الادعاء غير صحيح وأن نتائج العينة مرتفعة المعنوية (أنظر نهاية المسألة ١٠ - ٥) .

١٠ - ٧ متوسط العمر الإنتاجي لعينة من 100 لمبة من لمبات الفلورسنت من إنتاج أحد المصانع هو 1570 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة . إذا كان μ هو متوسط العمر الإنتاجي لجميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu \neq 1600$ ساعة ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

ساعة $H_0 : \mu = 1600$ ، ساعة $H_1 : \mu \neq 1600$

يجب أن نستخدم هنا اختباراً من طرفين حيث أن $\mu \neq 1600$ تشمل كلا من القيم الأكبر من أو الأصغر من 1600 .

(أ) للاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستخدم قواعد اتخاذ القرار التالية .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z المحسوبة من العينة تقع خارج المدى 1.96 إلى -1.96 .

(٢) اقبل H_0 (أولاً تتخذ أى قرار) خلاف ذلك .

الاحصائية المتبعة هنا متوسط العينة \bar{X} . توزيع المعاينة لـ \bar{X} له متوسط $\mu = \mu$ وانحراف معياري $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N}$ ، حيث μ هو متوسط المجتمع و σ الانحراف المعياري للمجتمع المكون من جميع اللمبات المنتجة بواسطة الشركة .

تحت الفرض H_0 ، فإن $\mu = 1600$ ، $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{N} = 120/\sqrt{100} = 12$ ، باستخدام الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ . بما أن $z = (\bar{X} - 1600)/12 = (1570 - 1600)/12 = -2.50$ يقع خارج المدى 1.96 إلى -1.96 فإننا نرفض الفرض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية 0.01 ، فالمدى 1.96 إلى -1.96 في قواعد اتخاذ القرار في الجزء (أ) يحل بدلا منه المدى من 2.58 إلى -2.58 . بما أن قيمة z المساوية لـ -2.50 تقع داخل هذا المدى ، فإننا نقبل H_0 (أولاً نتخذ أى قرار) عند مستوى المعنوية 0.01 .

١٠ - ٨ في المسألة ١٠ - ٧ ، اختبر الفرض $\mu = 1600$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1600$ ساعة ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين

$$H_0 : \mu = 1600 \text{ ساعة} , H_1 : \mu < 1600 \text{ ساعة}$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد ، والقيم المقابلة لمطابقة تلك القيم في المسألة ١٠ - ٦ .

(أ) إذا كان مستوى المعنوية 0.05 ، المنطقة المظلة في الشكل ١٠ - ٥ مساحتها 0.05 ، ونجد أن $z_1 = -1.645$. ولهذا نستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -1.645 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -1.645 ، فإننا نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . لاحظ أن هذا القرار مائل لما توصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام اختبار من طرفين .

(ب) إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01 ، فإن قيم z_1 في الشكل ١٠ - ٥ هي -2.33 . ولهذا نستخدم القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

(١) ارفض H_0 إذا كانت z أقل من -2.33 .

(٢) اقبل H_0 (أولا تتخذ أى قرار) فيما عدا ذلك .

وبما أن ، كما في المسألة ١٠ - ٧ (أ) ، قيمة z هي -2.50 وهي أقل من -2.33 ، فإننا نرفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . لاحظ أن هذا القرار يختلف عما وصلنا إليه في المسألة ١٠ - ٧ (أ) باستخدام الاختبار من طرفين .

ينتج عن ذلك أن القرارات الخاصة بفرض معين H_0 المبينة على اختبار من طرف واحد أو اختبار من طرفين ليست دائماً على اتفاق . وهذا ، بالطبع ، متوقع حيث أننا نختبر H_0 في مقابل بديل مختلف في كل حالة .

١٠ - ٩ متوسط قوة مقاومة حبال للقطع من إنتاج أحد المصانع هو 1800 N وانحرافها المعياري 100 N . باستخدام طريقة جديدة للتصنيع ادعى أن قوة مقاومة الحبال سوف تزداد . لاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 50 حبلًا وتم اختبارها ووجد أن متوسط مقاومتها للقطع هو 1850 N . هل يمكن تأييد هذا الادعاء عند مستوى المعنوية 0.01 ؟

الحل :

يجب أن نختار بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 1800 \text{ N} , \text{ ولا يوجد تغيير حقيقي في قوة مقاومة الحبال}$$

$$H_1 : \mu > 1800 \text{ N} , \text{ ويوجد تغيير في قوة مقاومة الحبال}$$

ونستخدم هنا اختباراً من طرف واحد . الشكل المرتبط بهذا الاختبار مماثل للشكل بالمسألة ١٠ - ٥ عند مستوى معنوية 0.01 ولذلك فإن قاعدة اتخاذ القرار هي

(١) إذا كانت قيم z المشاهدة أكبر من 2.33 ، فإن النتائج معنوية عند مستوى 0.01 ونرفض H_0 .

(٢) بخلاف ذلك نقبل H_0 (أو نؤجل اتخاذ القرار)

تحت الفرض بأن H_0 صحيح ، فإننا نجد

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{1850 - 1800}{100/\sqrt{50}} = 3.55$$

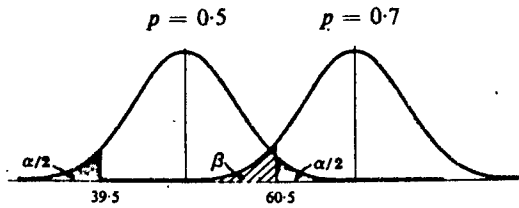
وهو أكبر من 2.33 . وبهذا نستنتج أن النتائج مرتفعة المعنوية أى أن الادعاء يجب تأييده .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠-١٠ بالرجوع إلى المسألة ١٠-٢ ، ما هو احتمال قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما يكون الاحتمال الفعل للصورة هو $p = 0.7$ ؟

الحل :

الفرض H_0 القائل بأن العملة غير متحيزة ، أى $p = 0.5$ يقبل إذا كان عدد الصور في مائة رمية يقع بين 39.5 و 60.5 . احتمال رفض H_0 عندما يجب أن نقبله (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول) . وتمثل بالمساحة الكلية α للمنطقة المظلة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليسار في الشكل ١٠-٦ . كما حسبنا في المسألة ١٠-٢ (١) ، المساحة α ، والتي تمثل مستوى المعنوية لاختبار H_0 تساوى 0.0358 .



إذا كان احتمال الصور هو $p = 0.7$ ، فإن توزيع الصور في 100 رمية تمثل بالمنحنى الطبيعي بالشكل ١٠-٦ . يتضح من الشكل أن احتمال قبول H_0 عندما تكون $p = 0.07$ بالفعل (احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني) يعطى بالمنطقة β المظلة بخطوط مائلة في الشكل .

لحساب هذه المساحة نلاحظ أن التوزيع تحت الفرض $p = 0.7$ له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.7) = 70 \quad \text{and} \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.7)(0.3)} = 4.58$$

$$60.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -2.07 = (60.5 - 70)/4.58$$

$$39.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -6.66 = (39.5 - 70)/4.58$$

إذن

$0.0192 =$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين $z = -6.66$ و $z = -2.07$). بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ

القرار المعطاة فإن هناك فرصة ضئيلة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما تكون $p = 0.7$ بالفعل .

لاحظ أننا في هذه المسألة قد أعطينا أسس اتخاذ القرار والتي حسبنا منها α و β . ومن الناحية العملية من الممكن ظهور الحالتين :

(١) نختار قيمة α (مثل 0.05 أو 0.01) ، نصل إلى أساس لاتخاذ القرار ثم نحسب β

(٢) نختار قيمة β و α ثم نصل إلى أساس اتخاذ القرار .

١٠-١١ حل المسألة السابقة إذا كانت (١) $p = 0.6$ (ب) $P = 0.8$ (ج) $p = 0.9$ (د) $p = 0.4$

الحل :

(١) إذا كانت $p = 0.6$ فإن توزيع الصور له متوسط وانحراف معياري كالآتي :

$$\mu = Np = (100)(0.6) = 60 \quad \sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.6)(0.4)} = 4.90$$

$$60.5 \text{ بوحدهات معيارية} = 0.0102 = (60.5 - 60)/4.90$$

$$39.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -4.18 = (39.5 - 60)/4.90$$

إذن

$$0.5040 = \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -4.18 \text{ و } z = 0.0102 \text{) } \beta$$

بهذا وباستخدام قواعد اتخاذ القرار المعطاة فإن هناك فرصة كبيرة في قبول الفرض بأن العملة غير متحيزة عندما

تكون القيمة الفعلية هي $p = 0.6$

(ب) إذا كانت $p = 0.8$ ، فإن $\mu = Np = (100)(0.8) = 80$ and $\sigma = \sqrt{Npq} = \sqrt{(100)(0.8)(0.2)} = 4$

$$60.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -4.88 = (60.5 - 80)/4$$

$$39.5 \text{ بوحدهات معيارية} = -10.12 = (39.5 - 80)/4$$

إذن

$$0.0000 = \text{ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي بين } z = -10.12 \text{ و } z = -4.88 \text{) } \beta$$

(قرينة جدا من الصفر) .

(ج) من المقارنة بـ (١) أو بالحساب ، نجد أنه إذا كانت $p = 0.9$ ، فإن $\beta = 0$ وذلك لجميع الأغراض العملية .

(د) بالتأمل $p = 0.4$ تعطي قيمة β مثل $p = 0.6$ ، أى $\beta = 0.5040$

١٠-١٢ عبر بياناً عن نتائج المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ برسم شكل (١) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .
فسر الأشكال الناتجة .

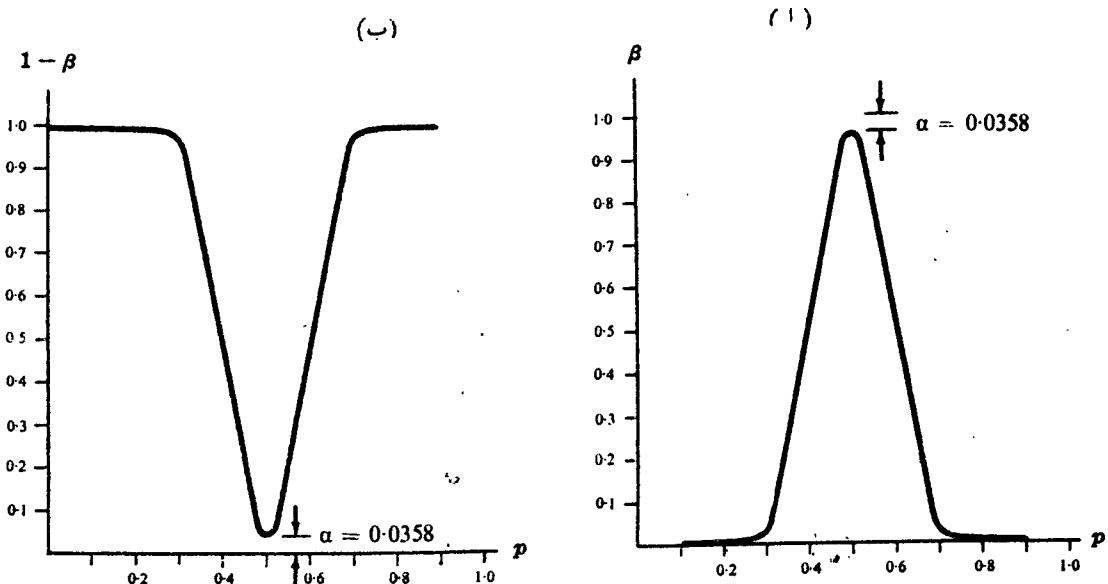
الحل :

الجدول ١٠-٢ يوضح قيم β المقابلة لقيم p المعطاة كما حصلنا عليها في المسائل ١٠-١٠ و ١١-١٠ .

جدول ١٠-٢

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	0.0000	0.0000	0.0192	0.5040	0.9642	0.5040	0.0192	0.0000	0.0000

لاحظ أن β تمثل احتمال قبول الفرض بأن $p = 0.5$ عندما تكون قيمة p الفعلية قيمة أخرى غير 0.5 .
أما إذا كانت قيمة p الفعلية هي 0.5 فإن β تمثل احتمال قبول $p = 0.5$ عندما يكون من المفروض قبولها . هذا الاحتمال يساوى $1 - 0.0358 = 0.9642$ وهو موضح بالجدول ١٠-٢ .



شكل ١٠-٧

(١) الشكل البياني β مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى توصيف العمليات أو منحني OC لقاعدة اتخاذ القرار أو لاختيار الفرض .

المسافة بين نقطة النهاية العظمى للمنحنى OC والخط $\beta = 1$ يساوي $0.0358 = \alpha$ ، مستوى المعنوية للاختبار .

وبشكل عام ، كلما زادت حدة قبة المنحنى OC كانت قواعد اتخاذ القرار أفضل في رفض الفروض غير الصحيحة .

(ب) الشكل البياني $(1 - \beta)$ مقابل p ، موضح بالشكل ١٠-٧ (١) ، يسمى بمنحنى قوة اختبار الفرض أو قواعد اتخاذ القرار . وهذا المنحنى نحصل عليه ببساطة كقلوب لمنحنى OC ، بحيث أن الشكلين من الناحية الفعلية متكافئين .

الكمية $(1 - \beta)$ تسمى غالباً دالة القوة حيث أنها تشير إلى قابلية أو قوة الاختبار لرفض الفرض غير الصحيح ، أى الذى يجب رفضه . وتسمى الكمية β دالة توصيف العمليات للاختبار .

١٠-١٣ تنتج شركة كابلات متوسطة قوة مقاومتها للكسر هو 300 N وانحرافها المياري 24 N . ومن المعتقد أنه باستخدام طريقة جديدة مبتكرة يمكن زيادة قوة المقاومة للكسر .

(١) صمم قاعدة لاتخاذ القرار بشأن رفض الأسلوب القديم في التصنيع عند مستوى معنوية 0.01 إذا اتفق على اختبار 64 كابل .

(ب) بنفس قاعدة اتخاذ القرار المستخدمة في (١) ، ما هو احتمال قبول الطريقة القديمة عندما تكون الطريقة الحديثة قد أدت في الواقع إلى زيادة متوسط المقاومة للكسر إلى 310 N ؟ افترض أن الانحراف المعياري لا يزال 24 N .

الحل :

(١) إذا كانت μ هي متوسط المقاومة للكسر ، فإننا نريد أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu = 300\text{ N} \text{ أى أن الطريقة الجديدة مثل الطريقة القديمة ،}$$

$$H_1 : \mu > 300\text{ N} \text{ ، أى أن الطريقة الجديدة أفضل من الطريقة القديمة .}$$

للاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، فإننا نحصل على القواعد التالية لاتخاذ القرار (ارجع إلى الشكل ١٠-٨ (١)) .

(١) ارفض H_0 إذا كانت قيم z لمتوسط المقاومة للكسر في العينة أكبر من 2.33

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .

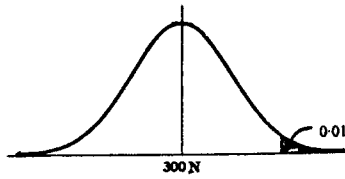
بما أن $z > 2.33$,

فإنه إذا كانت $\bar{X} = 300 + 3z$ فإن $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X} - 300}{24/\sqrt{64}}$

وبهذا فإن قواعد اتخاذ القرار السابقة تصبح : $\bar{X} > 300 + 3(2.33) = 307.0 \text{ N}$

(١) ارفض H_0 إذا كان متوسط المقاومة للكسر في الـ 64 كابلا يتجاوز 307.0 N

(٢) أقبّل H_0 فيما عدا ذلك .



شكل ١٠-٨ (أ)

(ب) اعتبر الفرضين $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$

و $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$. توزيعات متوسط

المقاومة للكسر المقابل لهذين الفرضين يمثل على

الترتيب بالمنحنى الطبيعي على اليسار والمنحنى

الطبيعي على اليمين في الشكل ١٠-٨ (١) .

احتمال قبول عملية التصنيع القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر للطريقة الجديدة هو 310 N بالفعل يمثل بالمنطقة التي مساحتها β في الشكل ١٠-٨ (١) . للحصول على ذلك ، لاحظ أن 307.0 N معبرا عنها بوحدة قياسية $1.00 = (307.0 - 310)/3$ إذن

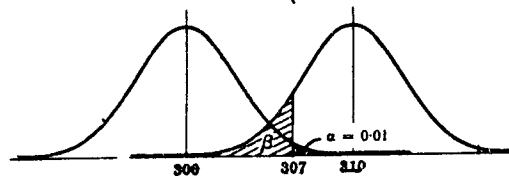
$0.1587 = (\text{المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار } z = -1.00) = \beta$ وهذا هو احتمال

قبول $H_0 : \mu = 300 \text{ N}$ عندما تكون $H_1 : \mu = 310 \text{ N}$ هي فعلا القيمة الصحيحة ، أى احتمال ارتكاب خطأ من النوع الثاني .

١٠-١٤ كون (١) منحنى OC (ب) منحنى القوة للمسألة ١٠-١٣ ، مفترضا أن الانحراف المعياري للمقاومة للكسر سيظل 24 N

الحل :

باستخدام مبررات مماثلة لتلك المستخدمة في المسألة ١٠-١٣ (١) ، يمكن الحصول على β في الحالات التي تنتج فيها الطريقة الجديدة متوسط مقاومة للكسر μ يساوى 305 N ، 315 N ، ... على سبيل المثال إذا كانت $\mu = 305 \text{ N}$ ، فإن 307 N معبرا عنها بوحدة معيارية $0.67 = (307.0 - 305)/3$



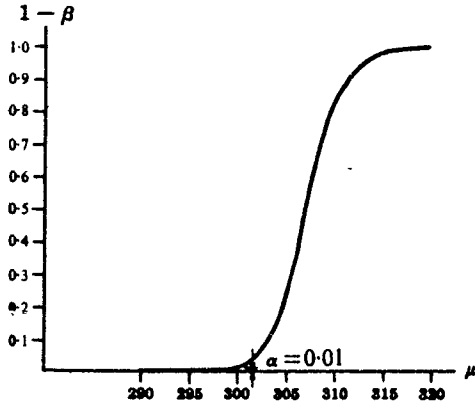
إذن

$\beta = 0.7486$ (المساحة تحت المنحنى الطبيعي إلى اليمين وإلى يسار $z = 0.67$) β وهذه الطريقة يمكن الحصول

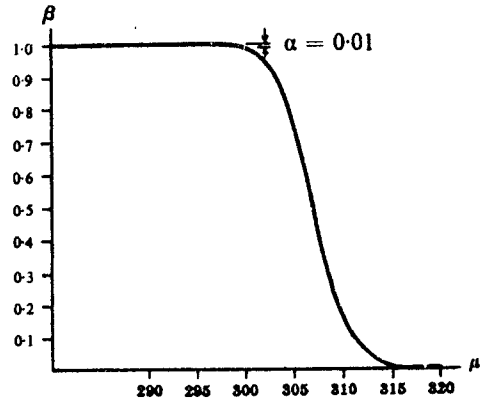
على الجدول ٣-١٠

جدول ٣-١٠

μ	290	295	300	305	310	315	320
β	1.0000	1.0000	0.9900	0.7486	0.1587	0.0038	0.0000



(ب)



(أ)

شكل ٩-١٠

(أ) يظهر منحنى OC في الشكل ٩-١٠ (أ) . من هذا المنحنى نجد أن احتمال الإبقاء على الطريقة القديمة في التصنيع إذا كانت قوة المقاومة للكسر الجديدة أقل من 300 N ، من الناحية العملية يساوي 1 (فيما عدا عند مستوى المعنوية 0.01 عندما يكون متوسط الطريقة الجديدة هو 300 N) ثم يأخذ المنحنى في الهبوط إلى الصفر بحيث لا تكون هناك فرصة من الناحية العملية في الاحتفاظ بالطريقة القديمة عندما يكون متوسط المقاومة للكسر أكبر من 315 N .

(ب) يظهر منحنى القوة في الشكل ٩-١٠ (ب) . وهو يعطى نفس التفسير مثل منحنى OC . والواقع أن المنحنين أساساً متكافئان .

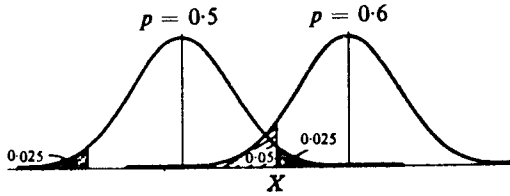
١٠-١٥ لاختبار أن عملة غير متحيزة ($p = 0.5$) عن طريق عدد من رميات العملة ، فإننا نرغب في فرض القيود التالية :

(أ) احتمال رفض الفرض عندما يكون الفرض صحيحا بالفعل 0.05 على الأكثر .

(ب) احتمال قبول الفرض أن p تختلف فعلا عن 0.5 بما يساوى 0.1 أو أكثر (أى $p \geq 0.6$ أو $p \leq 0.4$) يجب أن يكون هذا الاحتمال 0.05 على الأكثر .

حدد الحد الأدنى الضروري لحجم العينة وأذكر قواعد اتخاذ القرار .

الحل :



شكل ١٠ - ١٠

وضعنا هنا حدوداً على الخطأ من النوع الأول والخطأ من النوع الثاني . على سبيل المثال ، فإن القيد المذكور في (أ) يتطلب أن يكون احتمال الخطأ من النوع الأول $\alpha = 0.05$ على الأكثر بينما القيد (ب) يتطلب أن يكون احتمال $\beta = 0.05$. وقد صور الوضع في الشكل ١٠ - ١٠ .

اعتبر N هو حجم العينة المطلوب و X عدد الصور في N رمية ، والتي إذا زاد عدد هذه الصور عن ذلك نرفض الفرض أن $p = 0.5$. من الشكل ١٠ - ١٠

(١) المساحة تحت المنحنى الطبيعي $p = 0.5$ إلى اليمين من $\frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هي 0.025

(٢) المساحة تحت المنحنى الطبيعي $p = 0.6$ إلى اليسار من $\frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = \frac{X - Np}{\sqrt{Npq}}$ هي 0.05

[من الناحية العملية المساحة بين $(X - 0.6N)/0.49\sqrt{N}$ و $(N - X) - 0.6N/0.49\sqrt{N}$ هي 0.05 ، (٢) تقريب جيد) .

من (١) $\frac{X - 0.5N}{0.5\sqrt{N}} = 1.96$ أو (٣) $X = 0.5N + 0.980\sqrt{N}$

من (٢) $\frac{X - 0.6N}{0.49\sqrt{N}} = -1.645$ أو (٤) $X = 0.6N - 0.806\sqrt{N}$

إذن من (٣) و (٤) ، $N = 318.98$. أى أن حجم العينة يجب أن يكون على الأقل 319 ، أى يجب أن نقذف 319 مرة على الأقل . بوضع $N = 319$ في (٣) أو (٤) فإن $X = 177$.

لقيم $p = 0.5$ فإن $X - Np = 177 - 159.5 = 17.5$ بهذا فإننا نتبين القاعدة التالية لاتخاذ القرار :

(أ) اقبل الفرض $p=0.5$ إذا كان عدد الصور في 319 رمية في المدى من 159.5 ± 17.5 أى بين 142 و 177 صورة .

(ب) ارفض الفرض فيما عدأ ذلك .

خرائط الرقابة :

١٠ - ١٦ ماكينة مصممة لإنتاج رولمان البلى متوسط قطره 5.74 mm وانحرافه المياري 0.08 mm . لتحديد ما إذا كانت الماكينة تعمل حسب المواصفات ، أخذت عينة من 6 من رولمان البلى كل ساعتين ، على سبيل المثال ، وحسب منها متوسط القطر

(أ) صمم قاعدة لاتخاذ القرار تمكن الشخص من أن يكون متأكداً بشكل معقول من أن مواصفات المنتجات تتفق مع المستويات المطلوبة .

(ب) وضح كيف يمكن تمثيل قاعدة اتخاذ القرار في (أ) بيانياً .

الحل :

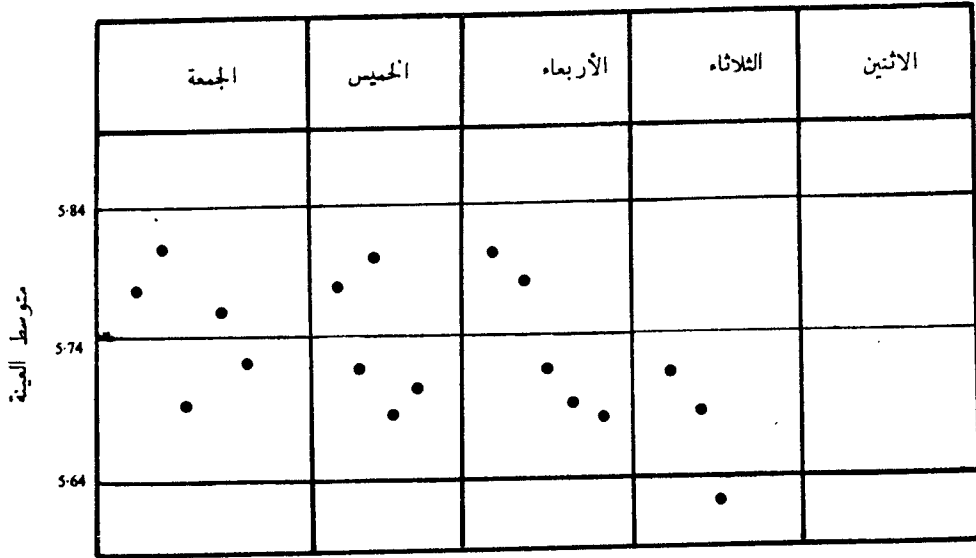
(أ) بدرجة ثقة 99.73% يمكن القول بأن متوسط العينة \bar{X} يجب أن يقع في المدى من $(\mu - 3\sigma)$ إلى $(\mu + 3\sigma)$ أو $(\mu - 3\sigma/\sqrt{N})$ إلى $(\mu + 3\sigma/\sqrt{N})$. وبما أن $\mu = 0.574$ و $\sigma = 0.08$ و $N = 6$ ، يترتب على ذلك أنه بدرجة ثقة 99.73% فإن متوسط العينة يجب أن يقع بين $(5.74 - 0.24/\sqrt{6})$ و $(5.74 + 0.24/\sqrt{6})$ أى بين 5.64 و 5.84 mm .
وهذا فإن أسلوبنا لاتخاذ القرار سيكون كما يلي :

(1) إذا كان متوسط العينة واقع داخل المدى 5.64 إلى 5.84 mm افترض أن الماكينة تعمل حسب المواصفات .

(2) خلاف ذلك استنتج بأن الماكينة لاتعمل حسب المواصفات ، وابحث عن الأسباب .

(ب) يمكن الاحتفاظ بتسجيل لمتوسطات العينات وذلك بواسطة لوحة مثل تلك الموضحة في الشكل ١٠ - ١١ ، وتسمى بخرائط مراقبة جودة الإنتاج . وفي كل وقت تحسب فيه متوسط العينة يمثل في هذه الخريطة بنقطة . ومادامت هذه النقطة تقع بين الحد الأدنى 5.64 mm والحد الأعلى 5.84 mm ، فإن العملية تكون تحت المراقبة . وعندما تقع نقطة خارج حدود المراقبة هذه (مثل العينة الثالثة المسحوبة يوم الخميس) ، فإن هناك إمكانية أن هناك خطأ ما المطلوب استقصاء أسبابه .

حدود المراقبة المذكورة أعلاه تسمى 99.73% حدود ثقة أو باختصار حدود 3σ . كذلك يمكن استخدام حدود ثقة ، مثل 99% أو 95% . ويعتمد الاختيار في كل حالة على الظروف الخاصة .



شكل ١٠ - ١١

الاختبارات المتضمنة الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ - ١٧ أعطى اختبار لفصلين يتكون الأول من 40 طالباً والثاني من 50 طالباً . في الفصل الأول كان متوسط الدرجات 74 والانحراف المعياري 8 ، بينما في الفصل الثاني كان متوسط الدرجات هو 78 والانحراف المعياري 7 .

هل هناك اختلاف معنوي في أداء الفصلين عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

افترض أن الفصلين مسحوبين من مجتمعين متوسطاتهما هي μ_1 و μ_2 . وبهذا فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والاختلاف يرجع تقريباً للصدفة

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، وهناك فرق معنوي بين الفصلين .

تحت الفرض H_0 كلا الفصلين مسحوبين من نفس المجتمع . المتوسط والانحراف المعياري للفرق بين المتوسطين يعطى كما يلي :

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ and } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{8^2/40 + 7^2/50} = 1.606$$

حيث استخدمنا الانحرافات المعيارية للمينات كتقدير لـ σ_1 و σ_2 .

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (74 - 78)/1.606 = -2.49 \quad \text{إذن}$$

(أ) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.05 إذا وقعت z خارج المدى من -1.96 إلى 1.96 . وبهذا نستنتج أنه عند المستوى 0.05 فإن هناك فرقاً معنوياً في أداء الفصلين وأنه من المحتمل أن يكون أداء الفصل الثاني أفضل .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرفين فإن النتائج تكون معنوية عند المستوى 0.01 إذا وقعت z خارج المدى من 2.58 — إلى 2.58 . وبهذا نستنتج أنه لا يوجد هناك فرق معنوي بين الفصلين .

وبما أن النتائج معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01 ، فإننا نستنتج أن النتائج محتملة المعنوية وذلك طبقاً للمصطلح المستخدم في نهاية المسألة ١٠ - ٥ .

١٠ - ١٨ إذا كان متوسط أوزان 50 طالباً من المشاركين في النشاط الرياضي في كلية هو 68.2 kg بانحراف معياري 2.5 kg بينما كان متوسط وزن 50 طالباً لم يظهروا اهتماماً بالمشاركة في النشاط الرياضي في الكلية هو 67.5 kg بانحراف معياري 2.8 kg . اختبر الفرض بأن الطلبة الذين يسهون في النشاط الرياضي أثقل وزناً من غيرهم في الكلية.

الحل :

يجب أن نقرر بين الفرضين :

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{لا يوجد فرق بين متوسط الأوزان}$$

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad \text{متوسط أوزان المجموعة الأولى أكبر من متوسط أوزان المجموعة الثانية .}$$

تحت الفرض H_0 :

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 9 \quad \text{and} \quad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N_1 + \sigma_2^2/N_2} = \sqrt{(2.5)^2/50 + (2.8)^2/50} = 0.53$$

حيث استخدمنا الانحراف المعياري للعينة كتقدير لـ σ_1 و σ_2

$$z = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)/\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = (68.2 - 67.5)/0.53 = 1.32. \quad \text{إذن}$$

باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وبهذا فإنه لن يمكننا رفض الفرض عند هذا المستوى من المعنوية .

يجب ملاحظة ، أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.10 إذا كنا على استعداد لتحمل مخاطرة أن نقع في الخطأ باحتمال 0.10 ، أي فرصة واحدة كل 10 .

١٠ - ١٩ بأي مقدار يجب زيادة حجم العينة في كل من المجموعتين في المسألة ١٠ - ١٨ بحيث يكون الفرق المشاهد 0.7 kg

في متوسط الأوزان معنوياً عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

افترض أن حجم العينة في كل مجموعة هو N وأن الانحراف المعياري للمجموعتين لن يتغير . بهذا يكون تحت الفرض H_0 فإن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\sigma_1^2/N + \sigma_2^2/N} = \sqrt{[(2.5)^2 + (2.8)^2]/N} = \sqrt{14.09/N} = 3.75/\sqrt{N}$$

قيمة z للفرق المشاهد 0.7 kg بين متوسط الأوزان هي

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{0.7}{3.75/\sqrt{N}} = \frac{0.7\sqrt{N}}{3.75}$$

(أ) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.05 إذا كانت $1.645 = 0.7\sqrt{N}/3.75$ ، على الأقل بحيث أن N يجب أن تكون 78 على الأقل . وبهذا يجب أن نزيد حجم العينة في كل مجموعة بما مقداره $28 = (78 - 50)$ على الأقل .

طريقة أخرى :

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 1.645, \sqrt{N} \geq (3.75)(1.645)/0.7, \sqrt{N} \geq 8.8, N \geq 77.4 \text{ or } N \geq 78$$

(ب) الفرق المشاهد سيكون معنوياً عند المستوى 0.01 إذا كانت

$$0.7\sqrt{N}/3.75 \geq 2.33, \sqrt{N} \geq (3.75)(2.33)/0.7, \sqrt{N} \geq 12.5, N \geq 156.3 \text{ or } N \geq 157$$

وبهذا يجب أن نزيد حجم العينة في كل مجموعة بما لا يقل عن 107 $(157 - 50)$

١٠ - ٢٠ مجموعتان ، A و B ، تتكون كل منهما من 100 شخص مصابين بمرض معين . أعطى المصل للمجموعة A ولم يعط للمجموعة B (والتي تسمى بالمجموعة الضابطة) ، بخلاف ذلك ، فإن المجموعتين يعاملان معاملة متماثلة . وقد وجد أنه في المجموعة A شفى 75 شخصاً من المرض ، بينما في المجموعة B شفى 65 شخصاً . اختبر الفرض أن المصل يساعد على الشفاء من المرض باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.01

(ب) 0.05 ، (ب) 0.10

الحل :

اعتبر أن p_1 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفوا باستخدام المصل . وأن p_2 تمثل النسبة في المجتمع للأشخاص الذين شفوا بدون استخدام المصل .

يجب أن نقرر بين فرضين :

، والفروق المشاهدة ترجع إلى الصدفة ، أى أن المصل غير فعال . $H_0: p_1 = p_2$

، أى أن المصل فعال . $H_0: p_1 > p_2$

تحت الفرض H_0 ،

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/100 + 1/100)} = 0.0648$$

وقد استخدمنا كتقدير p متوسط نسبة الذين شفوا من المرض في المجموعتين وهي $0.70 = (75 + 65)/200$

و $q = 1 - p = 0.30$ إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0648 = 1.54.$$

(أ) إذا استخدمنا اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 2.33 . وبما أن قيمة z هي 1.54 فقط ، فإننا نستنتج عند هذا المستوى من المعنوية بأن الفروق ترجع للصدفة .

(ب) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا يجب أن نرفض الفرض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.645 . وهذا نستنتج أن النتائج ترجع للصدفة عند هذا المستوى

(ج) إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 . فإننا يجب أن نرفض H_0 إذا كانت قيم z أكبر من 1.28 . وبما أن هذا تحقق ، فإننا نستنتج بأن المصل فعال عند مستوى المعنوية 0.01 . لاحظ أن استنتاجاتنا الموضحة أعلاه تعتمد على مقدار استعدادنا لتحمل مخاطرة الوقوع في خطأ . فإذا كانت النتائج ترجع فعلاً للصدفة ولكننا ننهي إلى أنها ترجع إلى المصل (خطأ من النوع الأول) ، فقد نستمر في إعطاء المصل لمجموعة كبيرة من الأشخاص ثم نجد أنه غير فعال . وهذه مخاطرة قد لانكون على استعداد دائماً لتحملها . ومن الناحية الأخرى ، قد نقرر أن المصل لايفيد بينما هو في الواقع فعال (خطأ من النوع الثاني) . مثل هذا الاستنتاج خطير وخاصة إذا كانت حياة بشرية هي موضع المخاطرة .

١٠ - ٢١ حل المسألة السابقة إذا كانت كل مجموعة مكونة من 300 شخص شئى من المجموعة A عدد 225 شخصاً ومن المجموعة B عدد 195 شخصاً .

الحل :

لاحظ أن نسبة الذين شفوا في هذه الحالة هي $225/300 = 0.750$ للمجموعة A : $195/300 = 0.650$

للمجموعة B وهي نفس النسبة في المسألة السابقة . تحت الفرض H_0

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.70)(0.30)(1/300 + 1/300)} = 0.0374$$

حيث استخدمنا $0.70 = (225 + 195)/600$ كتقدير p .

إذن

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.750 - 0.650)/0.0374 = 2.67$$

بما أن قيمة z أكبر من 2.33 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.01 . أى نقرر أن المصل فعال باحتمال 0.01 أن نكون مخطئين في هذا القرار .

هذا يوضح كيف أن زيادة حجم العينة يؤدي إلى زيادة مأمونية القرارات . وفي كثير من الأحيان ، قد يكون من غير العملي زيادة حجم العينة . في مثل هذه الحالات قد نكون ملزمين باتخاذ قرارات مبينة على المعلومات المتاحة وأن نرضى بمخاطرة أكبر ناتجة عن اتخاذ قرارات خاطئة .

١٠ - ٢٢ في دراسة بالعينة لقياس الرأي أخذت عينة من 300 ناخب في المنطقة A و 200 ناخب في المنطقة B حيث أظهرت أن 56% من المنطقة A و 48% من المنطقة B في صالح مرشح معين . عند مستوى معنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) هناك اختلاف بين المنطقتين (ب) المرشح مفضل في المنطقة A .

الحل :

اعتبر أن p_1 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة A التي في صالح المرشح وأن p_2 هي النسبة من جميع الأصوات في المنطقة B التي في صالح هذا المرشح

تحت الفرض $H_0 : p_1 = p_2$ ، فإن

$$\mu_{P_1 - P_2} = 0 \text{ and } \sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{pq(1/N_1 + 1/N_2)} = \sqrt{(0.528)(0.472)(1/300 + 1/200)} = 0.0456$$

حيث استخدمنا كتقدير لقيم p و q القيم 0.528 and $(1 - 0.528) = 0.472$ $(0.56)(300) + (0.48)(200)/500 = 0.528$

$$z = (P_1 - P_2)/\sigma_{P_1 - P_2} = (0.560 - 0.480)/0.0456 = 1.75 \text{ إذن}$$

(أ) إذا كنا نريد فقط تحديد ما إذا كان هناك فرق بين المنطقتين ، فيجب أن نقرر بين الفرضين $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 \neq p_2)$ وهذا يتضمن اختباراً من طرفين .

على أساس اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، فإننا نرفض H_0 إذا كانت z خارج الفترة من 1.96 — إلى 1.96 . وبما أن $z = 1.75$ تقع داخل هذه الفترة ، فلا يمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى أى لا يوجد فرق معنوي بين المنطقتين .

(ب) إذا أردنا تقرير ما إذا كان المرشح مفضل في المنطقة A . فيجب أن نقرر بين الفروض $(H_0 : p_1 = p_2)$ و $(H_1 : p_1 > p_2)$. وهذا يتضمن اختباراً من طرف واحد .

على أساس اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 . فإننا نرفض H_0 إذا كانت z أكبر من 1.645 و بما أن هذه هي الحالة ، فيمكننا رفض H_0 عند هذا المستوى . ونستنتج أن المرشح مفضل في المنطقة A

اختبارات تتضمن توزيع ذي الحدين :

١٠ - ٢٣ أعطى مدرس اختباراً مفاجئاً يتضمن 10 أسئلة من النمط الذي تكون الإجابة عليه : صواب - خطأ . لاختبار الفرض بأن الطالب يخمن الإجابة ، استخدمت القاعدة التالية في اتخاذ القرار :

إذا كانت هناك 7 أو أكثر من الإجابات صحيحة فإن الطالب لا يخمن

إذا كانت هناك أقل من 7 إجابات صحيحة فالطالب يخمن .

أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون صحيحاً .

الحل :

اعتبر أن p هي احتمال الإجابة الصحيحة على السؤال .

احتمال إجابة X مسألة إجابة صحيحة من 10 مسائل هي ${}_{10}C_X p^X q^{10-X}$ حيث $q = 1 - p$

بهذا فتحت الفرض أن $p = 0.5$ (أن الطالب يخمن) .

$$\Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} + \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} = \Pr \{ 7 \text{ أو أكثر إجابة صحيحة} \} \\ + \Pr \{ 9 \text{ إجابة صحيحة} \} + \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \}$$

$$= {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right) + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.1719$$

بهذا فإن احتمال أن نصل إلى قرار بأن الطالب لا يخمن الإجابة عندما يكون بالفعل يخمن الإجابة هو 0.1719

لاحظ أن هذا احتمال الخطأ من النوع الأول .

١٠ - ٢٤ في المسألة السابقة ، أوجد احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما تكون القيمة p الفعلية هي 0.7

الحل :

نخت الفرض $p = 0.7$ ،

$$\Pr \{ 7 \text{ إجابات أو أكثر صحيحة} \} = 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \}$$

$$= 1 - [{}_{10}C_7 (0.7)^7 (0.3)^3 + {}_{10}C_8 (0.7)^8 (0.3)^2 + {}_{10}C_9 (0.7)^9 (0.3) + {}_{10}C_{10} (0.7)^{10}] = 0.3504$$

١٠ - ٢٥ في المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجز احتمال قبول الفرض $p = 0.5$ عندما

$$\begin{aligned} p &= 0.6 \text{ (أ) تكون القيمة الفعلية} \\ p &= 0.8 \text{ (ب)} \\ p &= 0.9 \text{ (ج)} \\ p &= 0.3 \text{ (د)} \\ p &= 0.2 \text{ (هـ)} \\ p &= 0.1 \text{ (و)} \end{aligned}$$

الحل :

(أ) إذا كانت $p = 0.6$ فإن الاحتمال المطلوب

$$\begin{aligned} &+ \Pr \{ 8 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ &+ \Pr \{ 10 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ &= 1 - \Pr \{ 7 \text{ إجابات صحيحة} \} \\ &= 1 - [\Pr \{ 7 \text{ correct} \} + \Pr \{ 8 \text{ correct} \} + \Pr \{ 9 \text{ correct} \} + \Pr \{ 10 \text{ correct} \}] \\ &= 1 - [{}_{10}C_7(0.6)^7(0.4)^3 + {}_{10}C_8(0.6)^8(0.4)^2 + {}_{10}C_9(0.6)^9(0.4) + {}_{10}C_{10}(0.6)^{10}] = 0.618 \end{aligned}$$

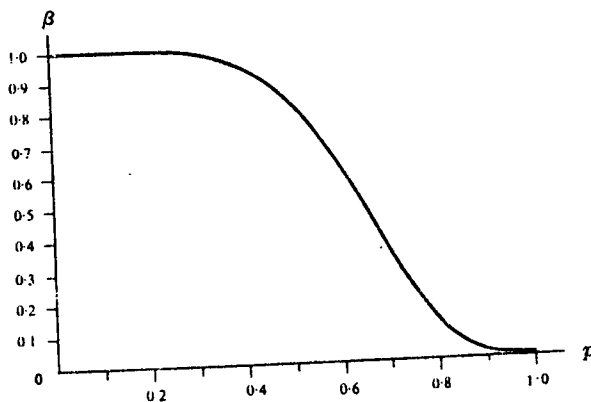
النتائج من (ب) ، (ج) . . . إلى (د) يمكن الحصول عليها بنفس الطريقة وهي موضحة بالجدول ١٠ - ٤ إلى جانب القيم المقابلة لـ $p = 0.7$ و $p = 0.6$.

لاحظ أن الاحتمال يرمز له بالرمز β (الخطأ من النوع الثاني) .

كذلك يشمل الجدول القيم المقابلة لـ $p = 0.5$ وهي $\beta = 1 - 0.1719 = 0.828$ من المسألة ١٠ - ٢٣ ، $p = 0.7$ من المسألة ١٠ - ٢٤ .

جدول ١٠ - ٤

p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
β	1.000	0.999	0.989	0.945	0.828	0.618	0.350	0.121	0.13



شكل ١٠ - ١٢

١٠ - ٢٦ استخدم المسألة ١٠ - ٢٥ لتكوين الرسم البياني لقيم β مقابل p ، أى منحني توصيف العمليات لقاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣

الحل :

الرسم البياني المطلوب موضح بالشكل

١٠ - ١٢ لاحظ التماثل بين الرسم ومنحنى OC

للمسألة ١٠ - ١٤ .

إذا رسمنا $(1 - \beta)$ مقابل p ، فإننا نحصل على منحنى قوة الاختبار .

يوضح الشكل أن قاعدة اتخاذ القرار المطاة أكثر قوة في رفض $p = 0.5$ عندما تكون قيم p الفعلية $p \leq 0.4$ أو $p \geq 0.8$.

١٠ - ٢٧ قذفت عملة 6 مرات فأظهرت الصورة في الست مرات هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية

(أ) 0.05 (ب) 0.01 . أن العملة متحيزة ؟

اعتبر كلا من الاختبار من طرف واحد والاختبار من طرفين .

الحل :

اعتبر أن p تمثل احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة للعملة .

تحت الفرض $H_0 : p = 0.5$ (أى العملة غير متحيزة) ،

$$P(X) = \Pr \{ X \text{ صورة في 6 رميات} \} = {}^6C_X \left(\frac{1}{2}\right)^X \left(\frac{1}{2}\right)^{6-X} \\ = {}^6C_X / 64$$

إذن فاحتمال ظهور 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 صورة

هى على الترتيب $\frac{1}{64}, \frac{6}{64}, \frac{15}{64}, \frac{20}{64}, \frac{15}{64}, \frac{6}{64}, \frac{1}{64}$ ،

كما هو موضح بيانياً في التوزيع الاحتمالي بالشكل ١٠ - ١٣

الاختبار من طرف واحد :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$

و $(H_1 : p > 0.5)$

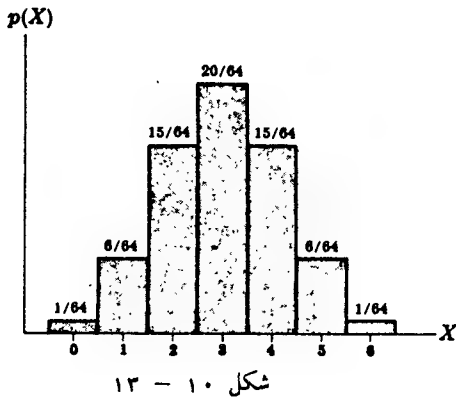
وبما أن $\Pr \{ \text{6 صور} \} = \frac{1}{64} = 0.01562$

و $\Pr \{ \text{5 صور أو 6 صور} \} = \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = 0.1094$ ،

فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 وليس عند

المستوى 0.01 (النتائج المشاهدة معنوية عند المستوى

0.05 وليست عند المستوى 0.01) .



الاختبار من طرفين :

نريد هنا التقرير بين الفرضين $(H_0 : p = 0.5)$ و $(H_1 : p \neq 0.5)$ بما أن

$\Pr \{ \text{صفر صورة أو 6 صور} \} = \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = 0.03125$ ، فيمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05

ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

١٠ - ٢٨ حل المسألة ١٠ - ٢٧ إذا ظهرت الصورة 5 مرات .

الحل :

اختبار من طرف واحد :

بما أن $\frac{p_4}{q_4} + \frac{p_4}{q_4} = \frac{p_4}{q_4} = 0.1094$ ، $\Pr\{5 \text{ أو } 6 \text{ صور}\}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 أو 0.01 .

اختبار من طرفين :

بما أن $2(\frac{p_4}{q_4}) = 0.2188$ ، $\Pr\{5 \text{ أو } 6 \text{ صور}\}$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند المستوى 0.05 أو 0.01 .

مسائل اضافية

اختبارات الاوساط والنسب باستخدام التوزيع الطبيعي :

١٠ - ٢٩ وعاء به كرات أما حمراء أو زرقاء . لاختبار فرض تساوى نسبة هذين اللونين قنا بسحب 64 كرة مع الإرجاع ، وتم ملاحظة لون الكرة وأخذنا القاعدة التالية فى اتخاذ القرار

أقبل الفرض إذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة بين 28 و 36 . ارفض الفرض فيما عد ذلك .

(أ) أوجد احتمال رفض الفرض عندما يكون بالفعل صحيح .

(ب) عبر بيانياً عن القاعدة السابقة فى اتخاذ القرار وعن النتيجة التى حصلت عليها فى (ب) .

ج : (أ) 0.2606

١٠ - ٣٠ (أ) ماهى القاعدة التى يجب أن تتبناها فى اتخاذ القرار فى المسألة ١٠ - ٢٩ إذا كان المطلوب أن يكون احتمال رفض

الفرض عندما يكون بالفعل صحيح لايجاوز 0.01 على الأكثر . أى مستوى المعنوية 0.01 ؟

(ب) عند أى مستوى ثقة تقبل الفرض ؟

(ج) ماهى قاعدة اتخاذ القرار إذا حددنا مستوى المعنوية عند 0.05 ؟

ج : (أ) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 22 و 42 ، ارفض فيما عد ذلك .

(ب) 0.99

(ج) أقبل الفرض إذا كانت الكرات الحمراء المسحوبة بين 24 و 40 ، ارفض فيما عد ذلك .

١٠ - ٣١ افترض أننا نريد فى المسألة ١٠ - ٢٩ اختبار الفرض أن هناك نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن الكرات الزرقاء

(أ) ماهو فرض العدم الذى يجب أن تفرضه وما هو الفرض البديل ؟

(ب) هل يجب أن نستخدم اختباراً من طرف واحد أو اختباراً من طرفين ؟

(ج) ماهى قاعدة اتخاذ القرار التى سوف تتخذها إذا كان مستوى المنوية هو 0.05 ؟

(د) ماهى قواعد اتخاذ القرار إذا كان مستوى المنوية 0.01 ؟

ج : (أ) $H_0 : p = 0.5$ و $H_1 : p > 0.5$

(ب) اختبار من طرف واحد

(ج) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 39 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

(د) ارفض H_0 إذا سجلت أكثر من 41 كرة حمراء ، اقبل الفرض فيما عدا ذلك (أو لاتتخذ أى قرار) .

١٠ - ٣٢ قذفت زهرتين طاولة 100 مرة وسجل عدد المرات التى ظهر فيها ما مجموعه «سبعة» ووجد أنه 23 مرة . اختبار الفرض أن الزهرتين غير متحيزتين ، باستخدام (أ) اختبار من طرفين (ب) اختبار من طرف واحد . مستخدماً مستوى معنوية 0.05 . ناقش الأسباب - إذا وجدت - لتفضيل أحد الاختبارين عن الآخر .

ج : (أ) لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

(ب) يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٣٣ حل المسألة ١٠ - ٣٢ إذا كان مستوى المنوية هو 0.01 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.01 فى أى من (أ) أو (ب)

١٠ - ٣٤ يدعى منتج أن 95% على الأقل من الممدات التى يمد بها مصنع مطابقة للمواصفات . تم اختبار عينة من 200 وحدة من الممدات ووجد أن بها 18 وحدة تالفة . اختبار ادعاء المنتج عند مستوى المنوية

(أ) 0.01 (ب) 0.05

ج : يمكن رفض ادعائه عند كلا المستويين باستخدام اختبار من طرف واحد .

١٠ - ٣٥ نسبة الذين حصلوا على تقدير A's فى مادة الطبيعة فى إحدى الجامعات خلال فترة طويلة من الزمن كانت 10% .

خلال فصل دراسى معين حصل 40 طالباً على تقدير A من مجموعة من 300 طالب . اختبار معنوية هذه النتيجة عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد ، النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند المستوى 0.01

١٠ - ٣٦ من التجربة وجد أن متوسط المقاومة للقطع لحزمة من الخيوط هو 9.72 N بانحراف ميارى 1.40 N . فى

الوقت الحاضر سجلت عينة من 36 حزمة من الخيوط وكان متوسط مقاومتها للقطع هو 8.93 N هل يمكن الاستنتاج

عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 بأن الخيوط أصبحت ذات جودة أقل ؟

ج : نعم ، عند كلا المستويين ، باستخدام اختبار من طرف واحد فى كل حالة .

١٠ - ٣٧ فى أحد الاختبارات التى أعطيت لعدد كبير من المدارس المختلفة ، كان متوسط الدرجات هو 74.5 والانحراف المعيارى 8.0 . فى مدرسة معينة حيث أدى 200 طالب هذا الامتحان ، كل متوسط درجاتهم 75.9 .

ناقش معنوية هذه النتيجة عند المستوى 0.05 من وجهة نظر :

(أ) الاختبار من طرف واحد (ب) الاختبار من طرفين ، وضع استنتاجاتك بدقة على ضوء هذه الاختبارات .

ج : النتيجة معنوية عند المستوى 0.05 فى كل من الاختبارات من طرف واحد والاختبار من طرفين .

١٠ - ٣٨ حل المسألة ١٠ - ٣٧ إذا كان مستوى المعنوية هو 0.01

ج : النتيجة معنوية عند مستوى 0.01 إذا كان الاختبار من طرف واحد أما إذا كان الاختبار من طرفين فالنتيجة غير معنوية .

منحنيات توصيف العمليات :

١٠ - ٣٩ باستخدام المسألة ١٠ - ٢٩ ، أوجد احتمال قبول الفرض بأن هناك نسباً متساوية من الكرات الحمراء والكرات الزرقاء إذا كانت النسبة الفعلية للكرات الحمراء هى (أ) 0.6 (ب) 0.7 (ج) 0.8

(د) 0.9 (هـ) 0.3

ج : (أ) 0.3112 (ب) 0.0118 (ج) 0 (د) 0 (هـ) 0.0118 .

١٠ - ٤٠ مثل بيانياً نتائج المسألة السابقة وذلك برسم (أ) β مقابل p (ب) $(1 - \beta)$ مقابل p .

قارن هذه الأشكال بتلك الموضحة فى المسألة ١٠ - ١٢ باعتبار أن مايقابل الكرات الحمراء والزرقاء هى الصور والكتابة على الترتيب .

١٠ - ٤١ (أ) حل المسائل ١٠ - ١٣ و ١٠ - ١٤ إذا اتفق على اختبار 400 كابل (ب) ماهى الاستنتاجات التى تصل إليها فيما يختص بالخطأ من النوع الثانى عندما تكبر حجم العينة ؟

١٠ - ٤٢ كون (أ) منحنى OC (ب) منحنى قوة الاختبار المقابل للمسألة ١٠ - ٣١ . قارن هذه المنحنيات بمنحنيات المسألة ١٠ - ١٤ .

خرائط الرقابة على الإنتاج :

١٠ - ٤٣ إذا كان من المعروف فى الماضى أن نوعاً معيناً من الخيوط من إنتاج أحد المصانع متوسط قوة مقاومته للقطع هو 8.64 N بانحراف معيارى 1.28 N .

لتحديد ما إذا كان الإنتاج يتم طبقاً للمواصفات ، أخذ عينة من 16 قطعة .

أوجد (أ) 99.73% أو 3σ (ب) 99% (ج) 95%
 حدود مراقبة في خرائط الرقابة على الإنتاج . ووضح تطبيقاتها .

ج : (أ) 6

(ب) 4 مسامير تالفة

١٠ - ٤٤ متوسط نسبة الإنتاج التالف في مصنع لإنتاج المسامير هو 3% . للمحافظة على هذا المستوى في الأداء ، تسحب عينة حجمها 200 مسار من المسامير المنتجة كل 4 ساعات ويتم اختبارها . أوجد (أ) 99%
 (ب) 95% ، حدود المراقبة لعدد المسامير التالفة في كل عينة . لاحظ أننا نحتاج في هذه الحالة إلى حد المراقبة الأعلى فقط .

ج : حد المراقبة الأعلى هو على الترتيب (أ) 6 (ب) 4 مسامير تالفة .

اختبارا تتضمن الفروق بين المتوسطات والنسب :

١٠ - ٤٥ عينة مكونة من 100 لمبة كهربائية من إنتاج المصنع A ، كان متوسط عمرها الإنتاجي 1190 ساعة وانحرافها المعياري 90 ساعة . عينة أخرى من 75 لمبة من إنتاج مصنع B كان متوسط عمرها الإنتاجي 1230 ساعة وانحرافها المعياري 120 ساعة . هل هناك فرق معنوي بين متوسط الأعمار الإنتاجية للتوعين عند مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

ج : (أ) نعم (ب) لا .

١٠ - ٤٦ في المسألة السابقة اختبر الفرض أن لمبات المصنع B أكثر جودة من لمبات المصنع A باستخدام مستوى المعنوية
 (أ) 0.05 (ب) 0.01

اشرح الفرق بين هذا الاختبار والاختبار في المسألة السابقة . هل النتيجة تناقض نتيجة المسألة السابقة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد لكل من مستويات المعنوية يظهر أن النوع B أكثر جودة من A .

١٠ - ٤٧ في اختبار مبادئ الهجاء ، كان متوسط درجات 32 ولد هو 72 بانحراف معياري 8 ، بينما متوسط درجات 36 بنت هو 75 بانحراف معياري 6 . اختبر الفرض عند (أ) 0.05 (ب) 0.01 مستوى معنوية بأن البنات أفضل في الهجاء من الأولاد .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن الفروق معنوية عند مستوى 0.05 ولكن غير معنوية عند مستوى 0.01 .

١٠ - ٤٨ : اختبار تأثير نوع جديد من الإسمدة على إنتاج القمح ، قسمت قطعة أرض إلى 60 مربع متساوى المساحة ، كل قطعة لها نفس المواصفات مثل نوع التربة ومقدار تعرضها للشمس وغير ذلك . استخدم السهال الجديد في 30 قطعة والسهال القديم في القطعة الباقية . كان متوسط الحزم من القمح التي تم حصادها لكل مربع من الأرض التي استخدم فيها السهال الجديد هو 18.2 لتر بانحراف معياري 0.63 لتر . والمتوسط المقابل للمربعات التي استخدم فيها السهال القديم هو 17.8 لتر بانحراف معياري 0.54 باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 . اختبر الفرض بأن السهال الجديد أفضل من السهال القديم .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد نجد أن السهال الجديد أفضل من السهال القديم عند كل من مستويات المعنوية .

١٠ - ٤٩ : عينة عشوائية من 200 مسبار من إنتاج A و 100 مسابير من إنتاج B وجد أن 19 مسبار من إنتاج A و 5 مسابير من إنتاج B تالف . اختبر الفرض القائل أن

(أ) هناك اختلاف في أداء الماكينتين .

(ب) الماكينة B تعمل بصورة أفضل من الماكينة A .

استخدم مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) يظهر الاختبار من طرفين بأنه لا يوجد اختلاف في أداء الماكينتين عند المستوى 0.05 .

(ب) اختبار من طرف واحد يظهر أن B لا تعمل بصورة أفضل من A عند المستوى 0.05 .

١٠ - ٥٠ : وعاءان A و B ، يحتويان على عدد متساو من الكرات ، ولكن نسبة الكرات الحمراء في كل منهما مختلف . سمحت عينة حجمها 50 كرة مع الإرجاع من كل من الوعائين ، وقد ظهر بها 32 كرة حمراء من الوعاء A و 23 . كرة حمراء من الوعاء B باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض القائل أن (أ) الوعاء A يحتويان على نسب متساوية من الكرات الحمراء (ب) A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

ج : (أ) اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 يفشل في رفض فرض تساوي النسب

(ب) اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.05 يدل على أن A يحتوي على نسبة أكبر من الكرات الحمراء عن B .

اختبارات تتضمن توزيعات ذي الحدين :

١٠ - ٥١ : بالرجوع إلى المسألة ١٠ - ٢٣ ، أوجد أقل عدد من الأسئلة يجب أن يجيب عليها الطالب إجابة صحيحة قبل أن يكون المدرس متأكدًا بأن الطالب لا يخمن الإجابة تقريباً وذلك عند مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 (ج) 0.001 (د) 0.06 . ناقش النتائج .

ج : (أ) 9 (ب) 10 (ج) 10 (د) 8

١٠ - ٥٢ : كون الأشكال البيانية كالتى تمت في المسألة ١٠ - ٠١ لبيانات المسألة ١٠ - ٢٤

١٠ - ٥٣ : حل المسائل ١٠ - ٢٣ إلى ١٠ - ٢٥ إذا استبدلت 7 في قاعدة اتخاذ القرار في المسألة ١٠ - ٢٣ إلى 8

١٠ - ٥٤ قلغت عملة 8 مرات فأظهرت الصورة 7 مرات . هل يمكن رفض الفرض بأن العملة غير متحيّزة عند مستوى المنوية
(أ) 0.05 (ب) 0.10 (ج) 0.01 ؟

استخدم اختبار من طرفين .

ج : (أ) لا (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٥ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا استخدمنا اختباراً من طرف واحد .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) لا

١٠ - ٥٦ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 8 مرات .

ج : (أ) نعم (ب) نعم (ج) نعم

١٠ - ٥٧ حل المسألة ١٠ - ٥٤ إذا أظهرت العملة الصورة 6 مرات .

ج : (أ) لا (ب) لا (ج) لا

١٠ - ٥٨ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات الحمراء والبيضاء . سميت عينة عشوائية من 8 كرات وأظهرت 6 كرات بيضاء و 2 كرة حمراء . باستخدام اختبار ومستوى معنوية مناسبين ، ناقش نسب الكرات البيضاء والحمراء الوعاء .

١٠ - ٥٩ ناقش كيف يمكن استخدام نظرية المعاينة في استقصاء نسب أنواع السمك الموجود في بحيرة .

الفصل الحادى عشر

نظرية العينات الصغيرة

توزيع « استودينت » ت
وتوزيع كا - تربيع (كا^٢)

العينات الصغيرة :

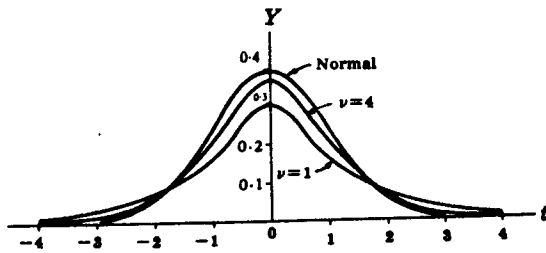
فى الفصول السابقة استخدمنا الحقيقة أنه إذا كان حجم العينة $N > 30$ ، وتسمى بالعينات ذات الحجم الكبير ، فإن توزيع المعاينة لكثير من الإحصائيات سيكون تقريباً كالتوزيع الطبيعى ، وتزداد جودة التقريب كلما زادت N . للعينات ذات الحجم $N < 30$ ، وتسمى بالعينات الصغيرة ، فإن هذا التقريب غير جيد ويزداد سوءاً كلما صغرت قيمة N ، بحيث يكون من الضرورى إدخال التعديلات الملائمة . تسمى دراسة توزيعات المعاينة للإحصائيات للعينات الصغيرة نظرية العينات الصغيرة . وبصورة أكثر دقة نظرية العينات الدقيقة ، نظراً لأن النتائج التى نحصل عليها تنطبق فى حالة العينات الكبيرة كما فى العينات الصغيرة . فى هذا الفصل سنقوم بدراسة توزيعين مهمين هما توزيع « استودينت » ت ، توزيع كا - تربيع (كا^٢) .

توزيع « استودينت » ت :

عرف الإحصائية

$$(١) \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}}$$

والتي تقابل الإحصائية z المعروفة : $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ (أنظر صفحة ٢٧٠)



توزيع « استودينت » ت لقيم المختلفة

شكل ١١ - ١

إذا أخذنا فى الاعتبار عينات حجمها N مسحوبة من مجتمع يتوزع توزيعاً طبيعياً (أو يقترب من التوزيع الطبيعى) متوسطة μ وإذا حسبنا لكل عينة t ، باستخدام الوسط الحسابى للعينة \bar{X} والانحراف المعيارى للعينة s أو S فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة للأحصائية t . هذا التوزيع (أنظر الشكل ١١ - ١) يعرف كالاتى :

$$(٢) \quad Y = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{N/2}} = \frac{Y_0}{\left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{(\nu+1)/2}}$$

حيث Y_0 مقدار ثابت يعتمد على N بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد ، وحيث الثابت $\nu = (N-1)$ يسمى عدد درجات الحرية (ν هو الحرف اليونانى « نيو ») . لتعريف درجات الحرية ، أنظر صفحة ٣٠٧ .

التوزيع (٢) يسمى توزيع « أستودينت » ت عقب اكتشافه بواسطة جوست ، والذي نشر أعماله فى الجزء الأول من القرن العشرين تحت الإسم المستعار « أستودينت » .

لقيم ν أو N الكبيرة (بالتأكيد لقيم $N \geq 30$) المنحنيات (٢) تعد تقريباً لمنحنى التوزيع الطبيعى المياري $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$: كما هو موضح بالشكل ١١ - ١ .

فترات الثقة :

كما شرحنا بالنسبة للتوزيع الطبيعى فى الفصل التاسع ، يمكن أن نعرف 95% و 99% أو غير ذلك من فترات الثقة باستخدام جدول توزيع t فى الملحق ، صفحة ٥٣٤ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة متوسط المجتمع μ .

على سبيل المثال ، إذا كانت $t_{0.675} -$ و $t_{0.975}$ هى قيم t التى تجعل 2.5% من المساحة تقع فى كل طرف من طرفى توزيع t فإن 95% فترة ثقة لـ t هى :

$$(٣) \quad -t_{0.975} < \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} < t_{0.975}$$

ومنها نرى أنه من المقدّر أن تقع μ فى الفترة

$$(٤) \quad \bar{X} - t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975} \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

بدرجة ثقة 95% (أى احتمال 0.95) . لاحظ أن $t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 97.5 ، بينما $t_{0.025} = -t_{0.975}$ تمثل قيمة المئين الذى رتبته 2.5 .

وبشكل عام ، يمكن تمثيل حدود الثقة لمتوسطات المجتمع كالاتى :

$$(٥) \quad \bar{X} \pm t_c \frac{s}{\sqrt{N-1}}$$

حيث القيم $t_c \pm$ ، تسمى بالقيم الحرجة أو معاملات الثقة ، وتعتمد على مستوى الثقة المرغوب فيه وحجم العينة . ويمكن الحصول عليها من الجدول فى صفحة ٥٣٤ .

بالمقارنة بين (٥) وحدود الثقة $(\bar{X} \pm z_c \sigma / \sqrt{N})$ المذكورة فى الفصل التاسع ، صفحة ٢٥٢ ، نجد أنه فى العينات أحللتنا بدلا من z_c (والتي نحصل عليها من التوزيع الطبقى) ، t_c (والتي نحصل عليها من توزيع t) وبدلا من σ استخدمنا $s = \sqrt{N/(N-1)}$ ، تقدير σ من العينة .
وكلما زادت N ، فإن كلا الطريقتين يتجهان نحو الاتفاق .

اختبار الفروض والمعنوية :

اختبارات الفروض والمعنوية التى نوقشت بالفصل العاشر يمكن بسهولة أن تمتد لتشمل المشاكل الخاصة بالعينات الصغيرة ، والاختلاف الوحيد هو أن قيم z أو إحصائية z يستبدل بها القيم t أو إحصائية t الملائمة .

١ - الأوساط :

لاختبار الفرض H_0 إن مجتمعاً يتوزع توزيعاً طبيعياً متوسط μ ، فإننا نستخدم قيم t أو إحصائية t .

$$(٦) \quad t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N}$$

حيث \bar{X} هو الوسط الحسابى لعينة حجمها N

وهذا مناظر لاستخدام قيم z ، $z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{N}}$ ، لقيم N الكبيرة فيما عدا استخدام

$s = \sqrt{N/(N-1)}$ بدلا من σ . الفرق أنه بينما z تتوزع توزيعاً طبيعياً ، فإن t تتبع توزيع أستودينت . كلما كبرت N فإنهما يتجهان نحو الاتفاق .

٢ - الفروق بين الأوساط :

افترض أن عينتين عشوائيتين حجمهما N_1 و N_2 سحباً من مجتمعات تتوزع توزيعاً طبيعياً انحرافاتها المعيارية متساوية $(\sigma_1 = \sigma_2)$ افترض كذلك أن متوسطات العينتين هما X_1 ، X_2 وانحرافاتها المعيارية هي s_1 ، s_2 . لاختبار الفرض H_0 أن العينتين مسحوبتين من نفس المجتمع (أى أن $\mu_1 = \mu_2$ وكذلك $\sigma_1 = \sigma_2$) فإننا نستخدم قيم t المعرفة كالتالى :

$$(٧) \quad t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}} \quad \text{حيث} \quad \sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

حيث تتبع t توزيع أستودينت بدرجات حرية $v = N_1 + N_2 - 2$.

بالرجوع إلى المعادلة (٢) ، صفحة ٢٧٢ ، نجد أننا نحصل على المعادلة (٧) أعلاه بوضع $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ فى قيم z فى المعادلة (٢) المشار إليها ثم نستخدم كتقدير لـ σ^2 الوسط المرجح

$$\frac{N_1 - 1}{N_1 + N_2 - 2} s_1^2 + \frac{N_2 - 1}{N_1 + N_2 - 2} s_2^2 = \frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}$$

حيث s_1^2 و s_2^2 تقديرات غير متحيزة لقيم σ_1^2 و σ_2^2 (أنظر الخاصية (٣) ، صفحة ١١٦) .

توزيع كا - تربيع (كا^٢)

عرف الاحصائية

$$(٨) \quad \chi^2 = \frac{Ns^2}{\sigma^2} = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_N - \bar{X})^2}{\sigma^2}$$

حيث χ هو الحرف اليوناني كا و χ^2 تقرأ كا تربيع .

إذا أخذنا في الاعتبار عينات حجمها N مسحوبة من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري σ ، وإذا حسبنا لكل عينة χ^2 ، فإنه يمكننا الحصول على توزيع المعاينة لـ χ^2 . ويسمى توزيع كا - تربيع (أو كا^٢) ، ويعرف كالتالي :

$$(٩) \quad Y = Y_0 (\chi^2)^{\frac{1}{2}(\nu-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0 \chi^{\nu-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

حيث $\nu = N - 1$ هو عدد درجات الحرية ، Y_0 هو مقدار ثابت يعتمد على ν بحيث يجعل المساحة تحت المنحنى مساوية الواحد .

يبين الشكل ١١ - ٢ توزيعات كا^٢ المقابلة لبعض قيم ν المختلفة . نهاية Y العظمى تتحقق عند $\chi^2 = \nu - 2$ لقيم $\nu \geq 2$.

فترات الثقة لـ χ^2 :

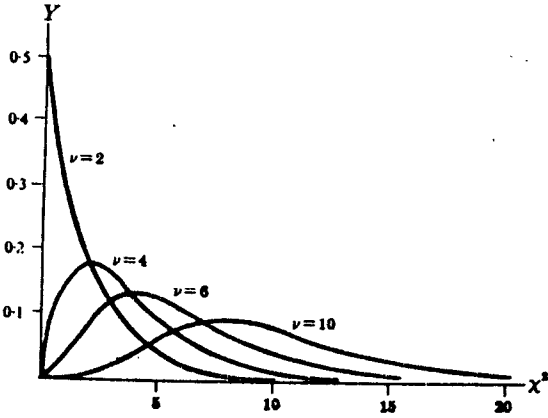
كما فعلنا بالنسبة للتوزيع الطبيعي وتوزيع t ، فيمكن أن نعرف 95% ، 99% أو غيرها من حدود الثقة أو فترات الثقة لـ χ^2 باستخدام جداول توزيع χ^2 بالملحق ، صفحة ٥٣٥ . بهذه الطريقة يمكن تقدير داخل حدود ثقة معينة الانحراف المعياري للمجتمع σ بدلالة الانحراف المعياري للعينة s .

على سبيل المثال ، إذا كانت $\chi_{0.025}^2$ و $\chi_{0.975}^2$ هي قيم χ^2 (تسمى القيم الحرجة) حيث 2.5% من المساحة تقع في كل من « طرفي » التوزيع ، فإن 95% حدود ثقة هي

$$(١٠) \quad \chi_{0.025}^2 < \frac{Ns^2}{\sigma^2} < \chi_{0.975}^2$$

ومنها نجد أن σ قدرت بحيث تقع داخل الفترة

$$(١١) \quad \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.975}^2} < \sigma < \frac{s\sqrt{N}}{\chi_{0.025}^2}$$



توزيع كا^٢ لقيم ν المختلفة

شكل ١١ - ٢

بدرجة ثقة 95% . بنفس الطريقة فإنه يمكن الحصول على فترات الثقة الأخرى . القيم $\chi_{0.035}$ و $\chi_{0.975}$ تمثل قيم المئينات 2.5 و 97.5 على الترتيب .

الجدول فى الملحق (IV) ، صفحة ٥٣٥ يعطى المئينات المقابلة لدرجات الحرية ν . لقيم ν الكبيرة ($\nu \geq 30$) يمكن أن نستفيد من أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ قريب جداً من التوزيع الطبيعي الذى متوسطه الصفر وانحرافه المعيارى الواحد . بحيث يمكن استخدام جداول التوزيع الطبيعي إذا كانت $\nu \geq 30$. إذن إذا كانت χ^2_p و z_p مئينات توزيع كاي^٢ والتوزيع الطبيعي على الترتيب فإن

$$\chi^2_p = \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2 \quad (١٢)$$

فى هذه الحالات تتفق النتائج بدرجة كبيرة مع النتائج التى حصلنا عليها فى الفصل الثامن والتاسع .

لمزيد من تطبيقات توزيع كاي^٢ أنظر الفصل الثانى عشر .

درجات الحرية :

حتى يمكن حساب إحصائية مثل (١) أو (٨) ، فن الضرورى استخدام مشاهدات نحصل عليها من العينة كذاك بعض معالم المجتمع . فإذا كانت هذه المعالم غير معروفة فيجب تقديرها من العينة .

عدد درجات الحرية فى إحصائية بشكل عام يرمز لها بالرمز ν وتعرف بأنها العدد N من المشاهدات المستقلة فى العينة (أى حجم العينة) ناقص العدد k لمعالم المجتمع والذى يجب تقديره من مشاهدات العينة . بالرموز $\nu = N - k$.

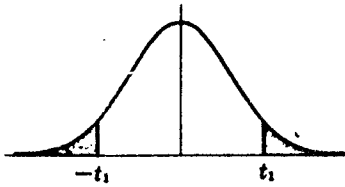
فى حالة الإحصائية (١) فإن عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيم \bar{X} و s . وحيث أنه يجب أن نقدر μ ، فإن $k = 1$ بحيث $\nu = N - 1$.

فى حالة الإحصائية (٨) ، عدد المشاهدات المستقلة فى العينة هو N ، ومنها يمكن حساب قيمة s . وحيث أنه يجب أن نقدر σ ، فإن $k = 1$ وعلى ذلك فإن $\nu = N - 1$.

مسائل محلولة

توزيع « استودينت » ت

١١-١ شكل توزيع استودينت t بدرجات حرية 9 موضح بالشكل ١١-٣ .



شكل ١١-٣

أوجد قيم t_1 التى تحقق الآتى :

(أ) المساحة المظلة إلى اليمين $0.05 =$

(ب) المساحة الكلية المظلة $0.05 =$

(ج) المساحة الكلية النير مظلة $0.99 =$

(د) المساحة المظلة إلى اليسار $0.01 =$

(هـ) المساحة إلى يسار t_1 تساوى 0.90

الحل :

(أ) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار t_1 هى $0.95 = (1 - 0.05)$ و $t_{0.95}$ تمثل المئينة الـ 95 ،

بالرجوع إلى الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ ، نتجه إلى أدنى تحت العمود المعنون v حتى نصل إلى الرقم 9 . ثم نتجه إلى اليمين حتى نصل إلى العمود المعنون $t_{0.95}$. والنتيجة هى 1.83 وهى قيمة t المطلوبة .

(ب) إذا كانت المساحة الكلية المظلة تساوى 0.05 ، فإن المساحة المظلة إلى اليمين هى 0.025 بالتمائل . بهذا فإن المساحة إلى يسار t_1 هى $0.975 = (1 - 0.025)$ وتمثل t_1 المئين الـ 97.5 . $t_{0.975}$ من الجدول بالملحق III صفحة ٥٣٤ نجد أن قيمة t المطلوبة هى 2.26 .

(ج) إذا كانت المساحة الكلية غير المظلة هى 0.99 ، فإن المساحة الكلية المظلة هى $0.01 = (1 - 0.99)$ والمساحة المظلة إلى اليمين هى $0.005 = 0.01/2$. من الجدول نجد أن $t_{0.995} = 3.25$.

(د) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليسار تساوى 0.01 ، بالتمائل فإن المساحة المظلة إلى اليمين هى 0.01 . من الجدول $t_{0.99} = 2.82$. بهذا فإن القيمة t الحرجة والى تساوى المساحة المظلة إلى يسارها 0.01 هى -2.82 .

(هـ) إذا كانت المساحة إلى يسار t_1 هى 0.90 ، فإن t_1 تقابل المئين التسمين ، $t_{0.90}$ ، ومن الجدول يساوى 1.38 .

١٠-٢ أوجد القيم الحرجة t والى تجمل المساحة فى الطرف الأيمن لتوزيع t هى 0.05 إذا كانت درجات الحرية v تساوى (أ) 16 (ب) 27 (ج) 200 .

الحل :

باستخدام الجدول فى الملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، نجد فى العمود المعنون $t_{0.95}$ القيم :

$$(أ) 1.75 \text{ مقابلة } v = 16$$

$$(ب) 1.70 \text{ مقابلة } v = 27$$

$$(ج) 1.645 \text{ مقابلة } v = 200$$

(القيمة الأخيرة هى القيمة التى يمكن الحصول عليها باستخدام المنحنى الطبى . فى الجدول بالملحق III ، صفحة ٥٣٤ ، وتقابل هذه القيمة الموجودة فى الصف الأخير المعنون ∞ ، أى ، مالا نهاية) .

١١ - ٣ تعطى 95% معاملات الثقة (من طرفين) للتوزيع الطبى بالقيم ± 1.96 . ماهى المعاملات المقابلة لتوزيع ، إذا كانت (أ) $v = 9$ (ب) $v = 20$ (ج) $v = 30$ (د) $v = 60$ ؟

الحل :

معاملات الثقة 95% « من طرفين » فإن المساحة السكلى المظلة فى الشكل ١١ - ٣ يجب أن تساوى 0.05 . بهذا فإن المساحة المظلة فى الطرف الأيمن هى 0.025 والقيمة الحرجة المقابلة ل t على $t_{0.975}$. إذن معاملات الثقة المطلوبة هى $t_{0.975} \pm$. ولقيم v المعطاة نجد أن القيم المناظرة هى :

$$(أ) \pm 2.26 \quad (ب) \pm 2.09 \quad (ج) \pm 2.04 \quad (د) \pm 2.00$$

١١ - ٤ عينة من 10 قياسات لأقطار كرة أعطت متوسط $X = 4.38 \text{ mm}$ وانحراف معيارى $s = 0.06 \text{ mm}$ أو جد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للقطر الفعلى .

الحل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى كما يلى $X \pm t_{0.975}(s/\sqrt{N-1})$ بما أن $v = N-1 = 10-1 = 9$ نجد أن $t_{0.975} = 2.26$. (أنظر أيضاً المسألة ١١ - ٣ (أ)) . إذن باستخدام $s = 0.06$ و $X = 4.38$ فإن 95% حدود الثقة المطلوبة هى $4.38 \pm 2.26(0.06)/\sqrt{10-1} = 4.38 \pm 0.0452 \text{ mm}$ أى أننا نكون على ثقة بنسبة 95% بأن الوسط الحقيقى يقع بين

$$(4.38 - 0.045) = 4.335 \text{ mm} \quad \text{و} \quad (4.38 + 0.045) = 4.425 \text{ mm}$$

(ب) 99% حدود ثقة تعطى كما يلى $X \pm t_{0.995}(s/\sqrt{N-1})$. لقيمة $v = 9$ ، $t_{0.995} = 3.25$. إذن 99% حدود الثقة هى $4.38 \pm 3.25(0.06)/\sqrt{10-1} = 4.38 \pm 0.0650 \text{ mm}$ و 99% فترة ثقة هى 4.315 إلى 4.445 mm .

١١ - ٥ (أ) حل المسألة السابقة مفترضاً صلاحية نظرية العينات ذات الحجم الكبير . (ب) قارن نتائج كلا الطريقتين .

الحل :

(أ) باستخدام نظرية العينات ذات الحجم الكبير ، 95% حدود الثقة هي

$$\bar{X} \pm 1.96\sigma/\sqrt{N} = 4.38 \pm 1.96(0.06/\sqrt{10}) = 4.38 \pm 0.037 \text{ mm}$$

وقد استخدمنا الانحراف المعيارى للعينه 0.06 ، كتقدير لـ σ .

كذلك ، فإن 99% حدود الثقة هي

$$\bar{X} \pm 2.58\sigma/\sqrt{N} = 4.38 \pm 2.58(0.06/\sqrt{10}) = 4.38 \pm 0.049 \text{ mm}$$

(ب) فى كل حالة فإن فترة الثقة باستخدام طريقة العينات الصغيرة أو الطريقة المضبوطة للعينات ، أوسع من تلك التى

حصلنا عليها باستخدام نظرية العينات الكبيرة . وهذا متوقع لأن درجة دقة أقل تكون متاحة باستخدام العينات الصغيرة عنها باستخدام العينات الكبيرة .

١١-٦ آلة لإنتاج الجلب المستديرة أنتجت فى الماضى جلب سمكها 0.50 mm ، لتقرير ما إذا كانت الآلة تعمل بصورة

مرضية ، أخذت عينة من 10 جلب ووجد أن متوسط سمكها هو 0.53 mm وانحرافها المعيارى 0.03 mm .

اختبر الفرض أن الآلة تعمل بصورة مرضية باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

الحل :

المطلوب التقرير بين الفروض

$H_0 : \mu = 0.50$ ، الآلة تعمل بصورة مرضية .

$H_1 : \mu \neq 0.50$ ، الآلة لا تعمل بصورة مرضية .

بحيث يكون المطلوب هو اختبار من طرفين .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{N}} = \frac{0.53 - 0.50}{0.03/\sqrt{10}} = 3.00$$

تحت الفرض H_0 ، فإن

(أ) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، تنبئ قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) أقبل H_0 إذا كانت t تقع داخل الفترة من $-t_{0.975}$ إلى $t_{0.975}$ والتى لدرجات حرية 9 = 10 - 1

تساوى الفترة من 2.26 — إلى 2.26 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) لاختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.01 ، تنبئ قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) أقبل H_0 إذا كانت t تقع داخل الفترة من $-t_{0.995}$ إلى $t_{0.995}$ والتى لدرجات حرية

9 = 10 - 1 تساوى الفترة من 3.25 — إلى 3.25 .

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.00$ ، فإننا نرفض H_0 عند المستوى 0.01 . وحيث أنه يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ولكن ليس عندى المستوى 0.01 ، فيمكن القول بأن نتائج العينة محتملة المعنوية .

(أنظر المصطلح في نهاية المسألة ١٠ - ه الفصل العاشر) . وينصح في هذه الحالة باختبار الآلة أو اختبار عينة ثانية على الأقل .

١١ - ٧ اختبرت 6 جبال من إنتاج أحد المصانع لمعرفة قوة مقاومتها للقطع فأظهرت متوسط قوة مقاومة للقطع 7750 N بانحراف معياري 145 N ، بينما يدعى المصنع المنتج الرقم 8000 N كقوة مقاومة للقطع لإنتاجه . هل يمكن تأييد ادعاء المنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ؟

الحل :

يجب أن نقرر بين الفرضين

$$H_0 : \mu = 8000 \text{ N} \quad \text{و ادعاء المصنع له مايرره}$$

$$H_1 : \mu < 8000 \text{ N} \quad \text{و ادعاء المصنع ليس له مايرره .}$$

أى أن المطلوب هو استخدام اختبار من طرف واحد .

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s} \sqrt{N-1} = \frac{7750 - 8000}{145} \sqrt{6-1} = -3.86. \quad \text{فإن ، تحت الفرض } H_0$$

(أ) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.95} = -1.96$ ، والى لدرجات حرية $5 = 6 - 1$ تعنى $t > -2.01$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

(ب) لاختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.01 ، نتبنى قاعدة اتخاذ القرارات التالية :

(١) اقبل H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.99} = -2.57$ ، والى لدرجات حرية 5 تعنى $t > -3.36$.

(٢) ارفض H_0 فيما عدا ذلك .

بما أن $t = 3.86$ ، نرفض H_0 .

نستنتج من ذلك أنه من الصعب بشكل كبير قبول ادعاء المصنع .

١١ - ٨ نسبة الذكاء I.Q لـ 16 طالباً من منطقة معينة في مدينة كان متوسطها 107 بانحراف معياري 10 ، بينما نسبة الذكاء

I.Q لـ 14 طالباً من منطقة أخرى بالمدينة كان متوسطها 112 بانحراف معياري 8 .

هل هناك اختلاف معنوي بين نسب الذكاء في المجموعتين عند مستوى معنوية .

(أ) 0.01 (ب) 0.05 .

الحل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع نسبة الذكاء للطلبة من المنطقتين ، فإننا يجب أن نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، ولا يوجد فرق أساسى بين المجموعتين

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ، ويوجد فرق معنوى بين المجموعتين

تحت الفرض H_0 ، $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$ ،

$$\sigma = \sqrt{\frac{16(10)^2 + 14(8)^2}{16 + 14 - 2}} = 9.44 \text{ and } t = \frac{112 - 107}{9.44 \sqrt{1/16 + 1/14}} = 1.45. \quad \text{إذن}$$

(أ) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من

$t_{0.995} - t_{0.995}$ إلى $t_{0.995}$ وإلى لدرجات حرية $(N_1 + N_2 - 2) = (16 + 14 - 2) = 28$

تعى المدى من 2.76 — إلى 2.76 .

بهذا لا يمكن رفض الفرض H_0 عند مستوى معنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا وقعت t خارج المدى من

$t_{0.975} - t_{0.975}$ إلى $t_{0.975}$ وإلى لدرجات حرية 28 تعى المدى من 2.05 — إلى 2.05 بهذا لا يمكننا رفض

H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 .

نستنتج من هذا أنه لا يوجد اختلاف معنوى بين نسبة الذكاء فى المجموعتين .

١١ - ٩ فى محطة للتجارب الزراعية كان المطلوب هو اختبار تأثير سماد من نوع معين على إنتاج القمح لهذا الفرض ، اختيرت

24 قطعة من الأرض لها نفس المساحة ، عولج نصفها بالسباد أما النصف الآخر فترك بدون معالجة (مجموعة ضابطة)

فيما بعد ذلك فالظروف بينهم متشابهة . وكان متوسط الغلة من القمح فى المجموعة الضابطة هو 4.8 لتر بانحراف

معيارى 4 لتر ، بينما متوسط غلة الفدان للقطع التى تم معالجتها هو 5.1 لتر بانحراف معيارى 3.6 لتر . هل

يمكن أن نستنتج من ذلك أن هناك تحسن معنوى فى إنتاج القمح نتيجة لاستخدام السباد ، إذا استخلمنا مستوى معنوية .

(أ) 1% (ب) 5% ؟

الحل :

إذا كانت μ_1 و μ_2 تمثل متوسط مجتمع غلة القمح من الأرض المعالجة والأرض غير المعالجة ، والمطلوب هو أن

نقرر بين الفرضين :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ، والفروق ترجع إلى الصدفة

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ، والسباد يؤدي إلى تحسين الغلة .

تحت الفرض H_0 ، $t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma \sqrt{1/N_1 + 1/N_2}}$ where $\sigma = \sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_2 - 2}}$ ،

$$\sigma = \sqrt{\frac{12(4)^2 + 12(3.6)^2}{12 + 12 - 2}} = 3.97 \text{ and } t = \frac{5.1 - 4.8}{3.97 \sqrt{1/12 + 1/12}} = 1.85. \quad \text{إذن}$$

(أ) باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى معنوية 0.01 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.99}$ والتي لدرجات حرية 22 $(N_1 + N_2 - 2) = (12 + 12 - 2) = 22$ تساوى 2.52 .

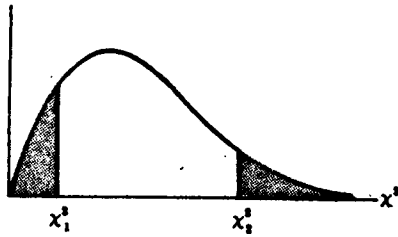
هذا لا يمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى معنوية 0.05 ، فيجب رفض H_0 إذا كانت t أكبر من $t_{0.95}$ ، والتي لدرجات حرية 22 تساوى 1.72 .

هذا يمكن رفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 . نستنتج من هذا أن التحسن في غلة القمح باستخدام السباد هو محتمل المعنوية . أى أنه قبل الوصول إلى قرار حاسم خاص بفائدة السباد فقد يكون من المستحسن الحصول على أدلة أكثر .

توزيع كا - تربيع (كا) :

١١ - ١٠ رسم توزيع كا - تربيع بدرجات حرية 5 موضع بالشكل ١١ - ٤ .



شكل ١١ - ٤

أوجد القيم الحرجة χ^2 التي تحقق الآتي :

(أ) المساحة المظلة إلى اليمين = 0.05

(ب) المساحة الكلية المظلة = 0.05

(ج) المساحة المظلة إلى اليسار = 0.10

(د) المساحة المظلة إلى اليمين = 0.01

الحل :

(أ) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين هي 0.05 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2 هي $(1 - 0.05) = 0.95$ و $\chi^2_{0.95}$ تمثل المئين 95 .

بالرجوع إلى الجدول في الملحق (IV) ، صفحة ٥٣٥ ، اتجه إلى أسفل تحت العمود المعلنون χ^2 حتى نصل إلى الرقم 5 . ثم اتجه إلى اليمين حتى نصل إلى العمود المعلنون $\chi^2_{0.95}$.

والنتيجة 11.1 هي القيمة الحرجة χ^2 .

(ب) بما أن التوزيع غير متماثل ، فإن هناك عدداً كبيراً من القيم الحرجة والتي تجعل المساحة الكلية المظلة = 0.05 على سبيل المثال ، المساحة المظلة إلى اليمين قد تكون 0.04 ، بينما المساحة المظلة إلى اليسار 0.01 . ومن المعتاد ، ما لم يذكر خلاف ذلك ، اختيار المساحتين متساويين . في هذه الحالة نحل مساحة تساوى 0.025 .

إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين 0.025 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2_2 هى $0.975 = 1 - 0.025$ و χ^2_2 تمثل المئين الـ 97.5 ، $\chi^2_{0.975}$ والنسبة يساوى 0.831 .
بهذا فإن القيم الحرجة هى 0.831 و 12.8 .

(ج) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليسار هى 0.10 ، فإن χ^2_1 تمثل المئين العاشر $\chi^2_{0.10}$ ويساوى 1.61 .
(د) إذا كانت المساحة المظلة إلى اليمين هى 0.01 ، فإن المساحة إلى يسار χ^2_2 هى 0.99 و χ^2_2 تمثل المئين الـ 99 ، $\chi^2_{0.99}$ والنسبة يساوى 15.1 .

١١-١١

أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والنسبة تجعل المساحة في الطرف الأيمن من توزيع χ^2 تساوى 0.05 ، إذا كان عدد درجات الحرية ν (أ) 15 (ب) 21 (ج) 50 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، في العمود المعنون $\chi^2_{0.95}$ نجد أن (أ) 25.0 تقابل $\nu = 15$ (ب) 32.7 تقابل $\nu = 21$ (ج) 67.5 تقابل $\nu = 50$.

١٢-١١ أوجد وسيط χ^2 المقابل لدرجات حرية (أ) 9 (ب) 28 (ج) 40 .

الحل :

باستخدام الجدول بالملحق IV ، صفحة ٥٣٥ ، في العمود المعنون $\chi^2_{0.50}$ (بما أن الوسيط هو المئين الخمسين) نجد أن القيم :

(أ) 8.34 تقابل $\nu = 9$ (ب) 27.3 تقابل $\nu = 28$ (ج) 39.3 تقابل $\nu = 40$.

من المهم ملاحظة أن قيم الوسيط قريبة جدا من عدد درجات الحرية . وفي الواقع فإنه لقيم $\nu > 10$ تساوى قيمة الوسيط (0.7 - ν) ، كما يمكن ملاحظته من الجدول .

١٣-١١ الانحراف المعياري لأوزان 16 طالبا اختيروا بصورة عشوائية من مدرسة بها 1000 طالب كان 2.40 kg .

أوجد (أ) 95% . (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع الطلبة بالمدرسة .

الحل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.975}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$ لدرجات حرية $\nu = 15 = 16 - 1$ ، $\chi^2_{0.975} = 27.5$ أو $\chi_{0.975} = 5.24$ و $\chi_{0.025} = 6.26$ أو $\chi_{0.25} = 2.50$.

إذن 95% حدود ثقة هى $2.40\sqrt{16}/5.24$ و $2.40\sqrt{16}/2.50$ أى 1.83 Kg و 3.84 Kg ونكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعياري المجتمع يقع بين 1.83 و 3.84 kg .

(ب) 99% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.005}$. لدرجات حرية $\chi^2_{0.995} = 32.8$ ، $\chi^2_{0.005} = 4.60$ و $\chi_{0.995} = 5.73$ أو $\chi_{0.005} = 2.14$.

إذن 99% حدود ثقة هي $2.40\sqrt{16}/5.73$ و $2.40\sqrt{16}/2.14$ أى 4.49 kg و 1.68 kg .
ونكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعياري للمجتمع يقع بين 1.68 و 4.49 kg .

١٤-١١ أوجد $\chi^2_{0.95}$ لدرجات الحرية (أ) $\nu = 50$ (ب) $\nu = 100$.

الحل :

لقيم ν أكبر من 30 ، يمكن أن نستخدم حقيقة أن $(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})$ تقترب بدرجة كبيرة من التوزيع الطبيعي الذى متوسطه الصفر وانحرافه المعياري واحد . إذن إذا كانت z_p هي قيم مئينات z للتوزيع الطبيعي المعياري ، فيمكن أن نكتب ، بدرجة تقريب جيدة .

$$\sqrt{2\chi_p^2} - \sqrt{2\nu - 1} = z_p \quad \text{or} \quad \sqrt{2\chi_p^2} = z_p + \sqrt{2\nu - 1}$$

حيث

$$\chi_p^2 = \frac{1}{2}(z_p + \sqrt{2\nu - 1})^2$$

(أ) إذا كانت $\nu = 50$ فإن $\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(50) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{99})^2 = 69.2$.

والتي تتفق بشكل جيد مع القيمة 67.5 المعطاة بالجدول في صفحة ٥٣٥ .

(ب) إذا كانت $\nu = 100$ فإن $\chi^2_{0.95} = \frac{1}{2}(z_{0.95} + \sqrt{2(100) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.64 + \sqrt{199})^2 = 124.0$ (القيمة الفعلية = 124.3)

١٥-١١ الانحراف المعياري للعمر الانتاجي لعينة من 200 من لمبات الاضاءة هو 100 ساعة . أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع لمبات الاضاءة من هذا النوع .

الحل :

(أ) 95% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.025}$.

لدرجات حرية $\nu = 200 - 1 = 199$ ، نجد كافي المسألة ١٤-١١

$$\chi^2_{0.975} = \frac{1}{2}(z_{0.975} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(1.96 + 19.92)^2 = 239$$

$$\chi^2_{0.025} = \frac{1}{2}(z_{0.025} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-1.96 + 19.92)^2 = 161$$

ومنها $\chi_{0.025} = 12.7$ و $\chi_{0.975} = 15.5$

إذن 95% حدود ثقة هي $100\sqrt{200}/15.5 = 91.2$ و $100\sqrt{200}/12.7 = 111.3$ ساعة
 أى أننا نكون واثقين بدرجة 95% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 91.2 و 111.3 ساعة .
 يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ٩-١٧ (١) بالفصل التاسع .

(ب) 99% حدود ثقة تعطى بالصيغة $s\sqrt{N}/\chi_{0.995}$ و $s\sqrt{N}/\chi_{0.005}$ لدرجات حرية
 $v = 200 - 1 = 199$

$$\chi_{0.995}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.995} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(2.58 + 19.92)^2 = 253$$

$$\chi_{0.005}^2 = \frac{1}{2}(z_{0.005} + \sqrt{2(199) - 1})^2 = \frac{1}{2}(-2.58 + 19.92)^2 = 150$$

ومنها $\chi_{0.005} = 12.2$ و $\chi_{0.995} = 15.9$

إذن 99% حدود ثقة هي $100\sqrt{200}/15.9 = 88.9$ و $100\sqrt{200}/12.2 = 115.9$ ساعة
 على الترتيب .

أى أننا نكون واثقين بدرجة 99% من أن الانحراف المعيارى للمجتمع يقع بين 88.9 و 115.9 ساعة .
 يجب مقارنة هذه النتيجة بالمسألة ٩-١٧ (١) بالفصل التاسع .

١١-١٦ هل يمكن الحصول على 95% فترة ثقة للانحراف المعيارى للمجتمع بحيث يكون طولها أقل من تلك التى حصلنا عليها
 فى المسألة ١١-١٥ (١)

الحل :

حدود الثقة 95% للانحراف المعيارى للمجتمع بالمسألة ١١-١٥ (١) حصلنا عليها باختيار قيم χ^2 الحرجة
 بحيث تكون المساحة فى كل طرف هي 2.5% . من الممكن الحصول على 95% حدود ثقة أخرى باختيار
 قيم χ^2 الحرجة بحيث تكون المساحات على الأطراف تساوى 5% أو 0.05 ، ولكن المساحة فى طرف لاتساوى
 المساحة فى الطرف الآخر .

الجدول ١١-١ يظهر عديد من القيم الحرجة (باستخدام طريقة المسألة ١١-١٤) و 95% فترات الثقة
 المقابلة .

جدول ١١-١

الطول	فترة ثقة	القيم الحرجة
21.4	92.3 to 113.7	$\chi_{0.01} = 12.44, \chi_{0.96} = 15.32$
20.2	91.7 to 111.9	$\chi_{0.02} = 12.64, \chi_{0.97} = 15.42$
19.8	91.0 to 110.8	$\chi_{0.03} = 12.76, \chi_{0.98} = 15.54$
20.1	88.9 to 110.0	$\chi_{0.04} = 12.85, \chi_{0.99} = 15.73$

من هذا الجدول نجد أن هناك 95% فترة ثقة طولها 19.8 فقط وهى من 91.0 إلى 110.8 .
ويمكن الحصول على فترة ثقة طولها أقل عن طريق تكرار نفس أسلوب الحل ، باستخدام قيم حرجة مثل $\chi_{0.031}$ و $\chi_{0.981}$ و $\chi_{0.032}$ و $\chi_{0.982}$.
وهكذا . بشكل عام ، فإن النقص فى الفترة التى يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة يكون فى العادة قيمة صغيرة يمكن إهمالها ولا يستحق المجهود المبذول فى الحصول عليها .

١١-١٧ فى فترات سابقة كان الانحراف المياري لأوزان عبوات زنة 40.0 N تملأ بواسطة آلة معينة هو 0.25 N .
سجبت عينة عشوائية من 20 عبوة فكان انحرافها المياري 0.32 N . هل هذه الزيادة الظاهرة فى التشتت
معنوية عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

يجب أن نقرر بين الفروض :

$$H_0 : \sigma = 0.25 \text{ ، والنتيجة المشاهدة ترجع إلى الصدفة}$$

$$H_1 : \sigma > 0.25 \text{ ، وهناك زيادة فى التشتت .}$$

$$\chi^2 \text{ قيمة للعينة هي } \chi^2 = Ns^2/\sigma^2 = 20(0.32)^2/(0.25)^2 = 32.8.$$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 إذا كانت
قيمة χ^2 المحسوبة من العينة أكبر من $\chi_{0.95}^2$ ، وهى تساوى 30.1 لدرجات حرية $\nu = 20 - 1 = 19$.
بهذا يجب رفض H_0 عند مستوى معنوية 0.05 .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد ، فيجب أن نرفض H_0 عند مستوى المعنوية 0.01 إذا كانت قيمة χ^2
المحسوبة من العينة أكبر من $\chi_{0.99}^2$ ، وهى تساوى 36.2 لدرجات حرية 19 . بهذا لا يمكن رفض H_0
عند مستوى معنوية 0.01 .

من هذا تستنتج أن التشتت من المحتمل أن يكون قد زاد ويجب اختيار الآلة .

مسائل اضافية

توزيع كا^٢ — تربيع (كا^٢) :

١٨-١١ لتوزيع استودينت بدرجات حرية 15 ، أوجد قيم t_1 بحيث تكون :

(أ) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.10

(ب) المساحة إلى يسار t_1 هي 0.95

(ج) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.01

(د) مجموعة المساحة إلى يمين t_1 وإلى يسار $-t_1$ هي 0.01

(هـ) المساحة بين t_1 — إلى t_1 هي 0.95 .

ج : (أ) 2.60 (ب) 1.75 (ج) 1.34 (د) 2.95 (هـ) 2.13

١٩-١١ أوجد القيم الحرجة لـ t والتي تجمل المساحة في الطرف الأيمن لتوزيع t مساوية 0.01 . إذا كانت درجات

الحرية v مساوية (أ) 4 (ب) 12 (ج) 25 (د) 60 (هـ) 150 .

ج : (أ) 3.75 (ب) 2.68 (ج) 2.48 (د) 2.39 (هـ) 2.33 .

٢٠-١١ أوجد قيم t_1 لتوزيع استودينت والتي تحقق كل من الشروط التالية :

(أ) المساحة بين t_1 — و t_1 تساوى 0.9 و $v = 25$

(ب) المساحة إلى اليسار من t_1 — تساوى 0.025 و $v = 20$

(ج) مجموع المساحة إلى اليمين من t_1 وإلى اليسار من t_1 — هي 0.01 و $v = 5$

(د) المساحة إلى يمين t_1 هي 0.55 و $v = 16$.

ج : (أ) 1.71 (ب) 2.09 (ج) 4.03 (د) 0.128 — .

٢١-١١ إذا كان المتغير U يتبع توزيع استودينت حيث $v = 10$. أوجد الثابت C بحيث تكون :

(أ) $\Pr \{ U > C \} = 0.05$

(ب) $\Pr \{ -C \leq U \leq C \} = 0.98$

(ج) $\Pr \{ U \leq C \} = 0.20$

(د) $\Pr \{ U \geq C \} = 0.90$.

ج : (أ) 1.81 (ب) 2.76 (ج) 8.79 (د) 1.37 —

١١-٢٢ إذا كان 99% معاملات الثقة (« من طرفين ») للتوزيع الطبيعي تعطى بالقيمة ± 2.58 ماهى المعاملات المقابلة لتوزيع t إذا كانت :

$$(أ) \nu = 4 \quad (ب) \nu = 12 \quad (ج) \nu = 25 \quad (د) \nu = 30 \quad (هـ) \nu = 40$$

$$ج : (أ) \pm 4.60 \quad (ب) \pm 3.06 \quad (ج) \pm 2.79 \quad (د) \pm 2.75 \quad (هـ) \pm 2.70$$

١١-٢٣ عينة من 12 قياس لقوة مقاومة خيوط النايلون للقطع أعطت متوسطا $7.38 N$ وانحراف معيارى $1.24 N$. أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للقيمة الفعلية لقوة المقاومة للقطع .

$$ج : (أ) 7.38 \pm 0.82 N \quad (ب) 7.38 \pm 1.16 N$$

١١-٢٤ حل المسألة السابقة مفترضا أنه يمكن استخدام نظرية الميئات الكبيرة وقارن بين النتائج التى حصلت عليها .

$$ج : (أ) 7.38 \pm 0.73 N \quad (ب) 7.38 \pm 0.96 N$$

١١-٢٥ خمسة قياسات لرد فعل شخصى لمنشط معين سجلت كالاتى 0.28, 0.30, 0.27, 0.33, 0.31 ثانية .

أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لرد الفعل الحقيقى .

$$ج : (أ) 0.298 \pm 0.030 \quad (ب) 0.298 \pm 0.049 \quad \text{ثانية .}$$

١١-٢٦ كان متوسط العمر الإنتاجى للمبات اضاءة من إنتاج أحد الشركات هو 1120 ساعة بانحراف معيارى 125 ساعة

سجبت حديثا عينة من 8 لمبات إضاءة من إنتاج جديد فكان متوسط عمرها الإنتاجى 1070 ساعة . اختبر الفرض

أن متوسط العمر الإنتاجى للمبات لم يتغير ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : باستخدام اختبار من طرفين نجد أنه لا يوجد دليل عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 يشير إلى أن متوسط الإنتاجى قد تغير .

١١-٢٧ فى المسألة السابقة اختبر الفرض $\mu = 1120$ ساعة ضد الفرض البديل $\mu < 1120$ ساعة ، باستخدام مستوى

المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : الاختبار من طرف واحد لا يشير إلى تناقص فى المتوسط عند أى المستويين 0.05 أو 0.01 .

١١-٢٨ مواصفات إنتاج سبيكة معدنية تتطلب أن يكون بها 23.2% نحاس . حلت عينة من 10 من المنتج أظهرت أن

متوسط نسبة النحاس 23.5% وانحراف معيارى 0.24% .

هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية :

$$(أ) 0.01 \quad (ب) 0.05 \quad \text{بأن الإنتاج يطابق المواصفات ؟}$$

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند كلا المستويين نجد أن الإنتاج لا يقابل المواصفات المطلوبة .

٢٩-١١ فى المسألة ١١-٢٨ اختبر صحة الفرض القائل أن متوسط محتويات النحاس أعلى مما هو مطلوب طبقا للمواصفات ، باستخدام مستوى المعنوية (١) 0.01 (ب) 0.05

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند كلا المستويين يظهر أن متوسط محتويات النحاس أعلى من المطلوب طبقا للمواصفات .

٣٠-١١ خبير فى الكفاءة الإنتاجية يدعى ، أنه بإدخال نوع جديد من النظام الآلى فى عمليات الإنتاج فإنه يمكن خفض الوقت المطلوب للإنتاج بصورة ملحوظة . ونظرا للتكاليف المتضمنة فى عملية صيانة الآلات ، فإن المدير يشعر بأنه ما لم ينخفض وقت الإنتاج بما لا يقل عن 8.0% فإنه لا يمكن الموافقة على إدخال العملية الجديدة . أظهرت نتائج ست تجارب بأن وقت الانتاج انخفض بنسبة 8.4% بانحراف معيارى 0.32% .

باستخدام مستوى المعنوية (١) 0.01 (ب) 0.05

اختبر صحة الفرض القائل أن النظام الجديد يجب إدخاله .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النظام الجديد يجب ألا يدخل إذا استخدم مستوى المعنوية 0.01 ، ولكن يجب إدخاله إذا كان مستوى المعنوية المستخدم 0.05 .

٣١-١١ باستخدام النوع A من البترول كان متوسط عدد الكيلومترات المقطوعة بواسطة 5 موتسيكلات متماثلة تحت ظروف متماثلة لكل لتر من البترول هو 22.6 بانحراف معيارى 0.48 . وباستخدام النوع B ، كان المتوسط هو 21.4 بانحراف معيارى 0.54 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، اختبر ما إذا كان النوع A أفضل حقيقة من النوع B فيما يختص بعدد الكيلومترات المقطوعة .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد يظهر أن النوع A أفضل من النوع B عند مستوى المعنوية 0.05 .

٣٢-١١ اختبر نوعان من الكيماويات A و B لقياس درجة أكسدةها PH . أظهر تحليل ، عينات من A أن متوسط أكسدةها pH هو 7.52 بانحراف معيارى 0.024 . وأظهر تحليل 5 عينات من B متوسط أكسدةها pH هو 7.49 بانحراف معيارى 0.032 . باستخدام مستوى معنوية ، حدد ما إذا كان هناك اختلاف بين نوعى المحلول فيما يختص بقيم pH .

ج : باستخدام اختبار من طرفين عند مستوى المعنوية 0.05 ، لا يمكن أن نستنتج على أساس هذه العينات من أن هناك اختلافاً فى درجة الأكسدة بين نوعى المحلول .

٣٣-١١ فى اختبار فى علم النفس ، كان متوسط درجات 12 طالبا فى فصل هو 78 والانحراف المعيارى 6 ، بينما كان درجات 15 طالبا فى فصل آخر هو 74 بانحراف معيارى 8 . باستخدام مستوى معنوية 0.05 ، حدد ما إذا كانت المجموعة الأولى أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

ج : باستخدام اختبار من طرف واحد عند مستوى المعنوية 0.05 ، نستنتج أن المجموعة الأولى ليست أعلى مستوى من المجموعة الثانية .

توزيع كا - تربيع (كا^٢) :

٣٤-١١ لتوزيع كا - تربيع بدرجات حرية 12 ، أوجد قيم χ^2_c بحيث تكون :

(أ) المساحة إلى يمين χ^2_c هى 0.05

(ب) المساحة إلى يسار χ^2_c هى 0.99

(ج) المساحة إلى يمين χ^2_c هى 0.025 .

ج : (أ) 21.0 (ب) 26.2 (ج) 23.3

٣٥-١١ أوجد القيم الحرجة لـ χ^2 والتي تكون المساحة في الطرف الأيمن من توزيع χ^2 بالنسبة لها هى 0.05 ، إذا كانت درجات الحرية ν لها مساوية :

(أ) 8 (ب) 19 (ج) 28 (د) 40

ج : (أ) 15.5 (ب) 30.1 (ج) 41.3 (د) 55.8 .

٣٦-١١ حل المسألة ٣٥-١١ إذا كانت المساحة في الطرف الأيمن هى 0.01

ج : (أ) 20.1 (ب) 36.2 (ج) 48.3 (د) 63.7

٣٧-١١ (أ) أوجد قيم χ^2_1 و χ^2_2 بحيث تكون المساحة تحت توزيع χ^2 المقابلة لـ $\nu = 20$ بين χ^2_1 و χ^2_2 هى 0.95

مفترضاً تساوى المساحات إلى اليمين من χ^2_2 وإلى اليسار من χ^2_1 .

(ب) وضح أنه إذا لم يوضع فرض تساوى المساحات في (أ) ، فإن قيم χ^2_1 و χ^2_2 ليست وحيدة .

ج : (أ) 9.59 و 34.2

٣٨-١١ إذا كان المتغير U يتبع توزيع كا - تربيع بدرجات حرية $\nu = 7$ أوجد χ^2_1 و χ^2_2 بحيث :

(أ) $\Pr \{ U > \chi^2_2 \} = 0.025$

(ب) $\Pr \{ U < \chi^2_2 \} = 0.50$

(ج) $\Pr \{ \chi^2_1 \leq U \leq \chi^2_2 \} = 0.90$.

ج : (أ) 16.0 (ب) 6.35 (ج) مفترضاً تساوى المساحات على الطرفين فإن

$\chi^2_1 = 2.17$ و $\chi^2_2 = 14.1$

٣٩-١١ الانحراف المعياري للعمز الانتاجى لـ 10 لمبات إضاءة من إنتاج إحدى الشركات هو 120 ساعة . أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة للانحراف المعياري لجميع اللمبات من إنتاج الشركة .

ج : (أ) 87.0 إلى 230.9 (ب) 78.1 إلى 288.5 ساعة .

٤٠-١١ حل المسألة السابقة إذا كان الانحراف المعياري لـ 25 من لمبات الإضاءة هو 120 ساعة .

ج : (أ) 95.6 إلى 170.4 (ب) 88.9 إلى 190.8 ساعة .

١١-٤١ أوجد (أ) $\chi^2_{0.05}$ (ب) $\chi^2_{0.95}$ لقيمة $\nu = 150$.
ج : (أ) 122.5 (ب) 179.2

١١-٤٢ أوجد (أ) $\chi^2_{0.025}$ (ب) $\chi^2_{0.975}$ لقيمة $\nu = 250$.
ج : (أ) 207.7 (ب) 295.2

١١-٤٣ وضح أنه لقيم ν الكبيرة فإنه يمكن تقريب χ^2 تقريب جيد بالصيغة $(\nu + z_p\sqrt{2\nu})$ ، حيث z_p هي المئين فى الرتبة P للتوزيع الطبىعى المعيارى .

١١-٤٤ حل المسألة ١١-٣٩ باستخدام توزيع χ^2 إذا كان الانحراف المعيارى لعينة حجمها 100 لمبة كهربائية هو 120 ساعة . قارن النتائج بتلك التى حصلت عليها بطرق الفصل التاسع .
ج : (أ) من 106.1 إلى 140.1 (ب) من 102.1 إلى 148.1 ساعة .

١١-٤٥ ماهى 95% حدود ثقة للمسألة ١١-٤٤ ، والتى لها أقل طول ؟
ج : من 105.5 إلى 139.6 ساعة .

١١-٤٦ الانحراف المعيارى لقوة المقاومة للكسر لكابلات من إنتاج شركة معينة هو 240 kN . بعد إدخال تعديلات على عملية تصنيع الكابلات ، أظهرت عينة من 8 كابلات أن الانحراف المعيارى لقوة مقاومتها للكسر هو 300 kN . أدرس معنوية الزيادة الظاهرة فى التشتت ، باستخدام مستوى معنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .
ج : عل أساس بيانات العينة المعطاة فإن الزيادة الظاهرة فى التشتت ليست معنوية عند أى من المستويين .

١١-٤٧ الانحراف المعيارى لدرجات الحرارة السنوية فى مدينة خلال مدة 100 سنة هى 8° درجات مئوية . باستخدام متوسط درجة الحرارة فى خمسة عشر يوما خلال الخمس عشرة سنة الأخيرة ، وجد أن الانحراف المعيارى لدرجات الحرارة السنوية هو 5° درجات مئوية . اختبر صحة الفرض القائل أن درجات الحرارة فى المدينة أصبحت أقل تغيرا عنها عن الماضى ، باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .
ج : الانخفاض الظاهر معنوى عند المستوى 0.05 ولكن غير معنوى عند 0.01 .

الفصل الثاني عشر

اختبار كا - تربيع (كا²)

التكرارات المشاهدة والنظرية

كما سبق أن شاهدنا أنه في عديد من المرات ، لا تتفق النتائج التي نحصل عليها من العينات في جميع الحالات مع النتائج المتوقعة طبقاً لقواعد الاحتمالات . على سبيل المثال ، فعل الرغم من أن الاعتبارات النظرية تؤدي بنا إلى توقع 50 صورة و 50 كتابة في رمية عملة غير متحيزة 100 مرة ، فن النادر أن نحصل على هذه النتيجة بالضبط .

جدول ١٢ - ١

الحدث	E_1	E_2	E_3	...	E_k
التكرار المشاهد	o_1	o_2	o_3	...	o_k
التكرار المتوقع	e_1	e_2	e_3	...	e_k

افترض أنه في عينة معينة لوحظ أن مجموعة من الأحداث الممكنة $E_1, E_2, E_3, \dots, E_k$ (أنظر الجدول ١٢ - ١) تحدث بتكرارات $o_1, o_2, o_3, \dots, o_k$ تسمى بالتكرارات المشاهدة ، وأنه طبقاً لقواعد الاحتمالات فإنه يتوقع أن تحدث بتكرارات $e_1, e_2, e_3, \dots, e_k$ تسمى بالتكرارات المتوقعة أو التكرارات المشاهدة .

غالباً ما نريد معرفة ما إذا كانت التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة . في الحالة عندما يكون هناك حدثين فقط E_1, E_2 من الممكن حلّوهم (تسمى أحياناً بالتقسيم الثنائي) ، على سبيل المثال كا في حالة ، الصورة والكتابة ، مسامير تالفة أو غير تالفة وما إلى ذلك ، فإن المشكلة يمكن حلها بصورة مرضية بالطرق التي درست في الفصول السابقة . في هذا الفصل سوف ندرس المشكلة بصورة عامة .

تعريف :

تعطى إحصائية χ^2 (تقرأ كا - تربيع) مقياساً لمدى التفاوت الموجود بين التكرارات المتوقعة والتكرارات المشاهدة وتعرف كالاتي :

$$(١) \quad \chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \dots + \frac{(o_k - e_k)^2}{e_k} = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$$

إذا كان مجموع التكرارات N فإن:

$$(٢) \quad \sum o_j = \sum e_j = N$$

تعبير مكافئ للتعبير (١) هو (أنظر المسألة ١٢ - ١١)

$$(٣) \quad \chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N$$

إذا كانت $\chi^2 = 0$ ، فإن التكرار المتوقع والتكرار المشاهد يتفقان معاً بالضبط ، بينما إذا كانت $\chi^2 > 0$ ، فإنهم لا يتفقان معاً بالضبط . وكلما زادت قيمة χ^2 كلما زاد التفاوت بين التكرارات المتوقعة .

توزيع المعاينة لـ χ^2 يمكن تقريبه بشكل كبير بتوزيع كـا - تربيع

$$(٤) \quad Y = Y_0 (\chi^2)^{\frac{1}{2}(v-2)} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} = Y_0 \chi^{v-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

(سبق دراسته فى الفصل الحادى عشر) إذا كانت التكرارات المتوقعة تساوى 5 على الأقل ويتحسن التقريب للقيم الأكبر وتعطى درجات الحرية كالآتى :

(أ) $v = k - 1$ إذا أمكن حساب التكرار المتوقع بدون الحاجة لتقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لاحظ أننا طرحنا 1 من k نظراً للقيود الموضوع على المعادلة (٢) والذي ينص على أنه فى حالة معرفة $k - 1$ من التكرارات المتوقعة فإن التكرار الباقي يمكن تحديده .

(ب) $v = k - 1 - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط فى حالة تقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات المعنوية :

من الناحية العملية ، تحسب التكرارات المتوقعة على أساس الفرض H_0 . فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة تحت هذا الفرض بالصيغة (١) أو (٣) أكبر من بعض القيم الحرجة (مثل $\chi_{0.95}^2$ أو $\chi_{0.99}^2$ ، وهى القيم الحرجة عند مستوى المعنوية 0.05 و 0.01 على الترتيب) ، فإننا نستنتج أن التكرارات المشاهدة تختلف معنوياً عن التكرارات المتوقعة ومن ثم نرفض H_0 عند مستوى المعنوية المقابل . وغير ذلك نقبل الفرض أو على الأقل لانرفض . وهذا الأسلوب يسمى اختبار كا - تربيع للفرض أو اختبار كا - تربيع للمعنوية .

ويجب ملاحظة أنه يجب أن ننظر بشك نحو الظروف التي تكون فيها χ^2 قريبة من الصفر حيث أنه من النادر أن تتفق التكرارات المشاهدة بدرجة جيدة جداً مع التكرارات المتوقعة . لاختبار مثل هذه الأحوال ، يمكن أن نقرر ما إذا كانت القيم المحسوبة لـ χ^2 أقل من $\chi^2_{0.05}$ أو $\chi^2_{0.01}$ ، في مثل هذه الحالات فيمكن أن نقرر بأن الاتفاق جيد عند مستوى الممنوعة 0.05 أو 0.01 على الترتيب .

اختبار كا^٢ لجودة التوفيق :

يمكن استخدام اختبار كا^٢ لتحديد مدى جودة توفيق توزيعات نظرية ، مثل التوزيع الطبيعي ، ذي الحدين ، وغيرها لتوزيعات اعتيادية ، أي تلك التي نحصل عليها من بيانات العينة . (أنظر المسائل ١٢ - ١٢ و ١٣ - ١٣) .

جداول الاقتران :

الجدول ١٢ - ١ أعلاه ، حيث تشغل التكرارات المشاهدة صف واحد ، يسمى جدول تصنيف في اتجاه واحد . وحيث أن عدد الأعمدة k ، يسمى أيضاً جدول $1 \times k$ (يقرأ ١ في k) بتعميم هذه الفكرة نصل إلى جداول تصنيف في اتجاهين أو جداول $h \times k$ حيث تشغل التكرارات المشاهدة h صف و k عمود مثل هذه الجداول تسمى أيضاً بجداول الاقتران .

ويقابل كل تكرار مشاهد في جدول الاقتران $h \times k$ ، تكرار متوقع أو نظري والذي تم حسابه طبقاً لبعض الفروض حسب قواعد الاحتمالات . هذه التكرارات التي تشغل خلايا جدول الاقتران تسمى تكرارات الخلايا . التكرار الكلي في كل صف أو في كل عمود يسمى بالتكرار الهامشي .

لنتحقق من الاتفاق بين التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة ، نحسب الاحصائية

$$\chi^2 = \sum_j \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (٥)$$

حيث يتم التجميع على جميع الخلايا بجدول الاقتران ، الرموز o_j و e_j تمثل التكرارات المشاهدة والتكرارات المتوقعة على الترتيب في الخلية j . وهذا المجموع والذي يناظر المعادلة (١) يحتوي على hk حد . مجموع جميع التكرارات المشاهدة يساوي N وهو يساوي مجموع التكرارات المتوقعة (قارن بالمعادلة (٢)) .

كسابق ، فإن الاحصائية (٥) لها توزيع معينة قريب جداً من التوزيع المعطى بالمعادلة (٤) ، بشرط أن تكون التكرارات المتوقعة ليست صغيرة جداً . وتعطى درجات الحرية ν لتوزيع كا - تربيع لقيم $h > 1$ ، $k > 1$ كالآتي :

(أ) $\nu = (h - 1)(k - 1)$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها بدون تقدير معالم المجتمع من إحصائيات العينة . لإثبات ذلك أنظر المسألة ١٢ - ١٨ .

(ب) $\nu = (h - 1)(k - 1) - m$ إذا كانت التكرارات المتوقعة يمكن حسابها فقط بتقدير m من معالم المجتمع من إحصائيات العينة .

اختبارات الفروض جداول $h \times k$ ماثلة لتلك في جداول $l \times k$. يمكن الحصول على التكرارات المتوقعة تحت فرض مین H_0 . ومن المعتاد أن نفترض أن التصنيفين مستقلين عن بعضهما . ويمكن أن نعمم جداول الاقتران لتشمل أبعاد أكبر . فعل سبيل المثال ، يمكن أن يكون لدينا جداول $h \times k \times l$ عندما نأخذ في الاعتبار 3 تصنيفات .

تصحیح ییتس للمتغير المتصل :

عندما نستخدم نتائج لتوزيع متصل في حالة البيانات المنقطعة ، فإننا نستخدم تصحيحات للاتصال كما سبق أن شاهدنا في الفصول السابقة . ومن المتاح أيضاً معامل تصحيح عندما نستخدم توزيع كا - مربع . ويتضمن التصحيح إعادة كتابة (١) كالآتي :

$$(٦) \chi^2 (\text{مصحح}) = \frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} + \dots + \frac{(|o_k - e_k| - 0.5)^2}{e_k}$$

ويشار إليها بتصحيح يیتس . وهناك تعديل مناظر للمعادلة (٥) .

بشكل عام فإن معامل التصحيح يستخدم إذا كان عدد درجات الحرية يساوي $v = 1$. للعينات ذات الحجم الكبير فإننا نحصل من الناحية العملية على نتيجة ماثلة لقيم χ^2 الغير مصححة ، ولكن تنشأ الصعوبات بالقرب من القيم الحرجة (أنظر المسألة ١٢ - ٨) . قد يكون من الأفضل في حالة العينات الصغيرة حيث تقع كل من التكرارات المتوقعة بين 5 و 10 ، أن تقارن بين قيم χ^2 المصححة وغير المصححة . فإذا كانت القيمتان تؤديان إلى نفس الاستنتاج فيما يتعلق بالفرض ، مثل الفرض عند مستوى 0.05 ، فإنه من النادر أن تصادف أية صعوبة . أما إذا أدوا إلى نتائج مختلفة فإنه يمكن اللجوء إلى زيادة حجم العينة أو إذا كان ذلك غير عملي ، فيمكن استخدام الطرق المضبوطة لاحتمالات والمتضمنة استخدام توزيع كثيرات الحدود والمشار إليه ، في الفصل السادس .

صيغة مبسطة لحساب χ^2 :

يمكن استنتاج صيغ مبسطة لحساب χ^2 حيث تتضمن استخدام التكرارات المشاهدة فقط . ونعطي فيما يلي النتائج لجداول الاقتران 2×2 و 2×3 جداول 2×2 .

$$(٧) \chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)} = \frac{N\Delta^2}{N_1N_2N_A N_B}$$

حيث

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1, N = a_1 + a_2 + b_1 + b_2, N_1 = a_1 + b_1, N_2 = a_2 + b_2, N_A = a_1 + a_2, N_B = b_1 + b_2.$$

أنظر المسألة ١٢ - ١٩

باستخدام تصحيح ييتس تصحيح

$$\chi^2 (\text{مصحح}) = \frac{N(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}N)^2}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)}$$

$$(A) \quad = \frac{N(|\Delta| - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_A N_B}$$

	I	II	Totals
A	a_1	a_2	N_A
B	b_1	b_2	N_B
Totals	N_1	N_2	N

جداول 2×3

$$(9) \quad \chi^2 = \frac{N}{N_A} \left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3} \right] + \frac{N}{N_B} \left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3} \right] - N$$

حيث استخدمنا النتيجة العامة والتي تصلح لجميع جداول الاقتران

	I	II	III	Totals
A	a_1	a_2	a_3	N_A
B	b_1	b_2	b_3	N_B
Totals	N_1	N_2	N_3	N

$$(10) \quad \chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N$$

أنظر المسألة ١٢ - ٤٣ النتيجة (٩) للجداول $2 \times k$ حيث
 $k > 3$ ، يمكن تعميمها (أنظر المسألة ١٢ - ٤٦) .

معامل الاقتران :

لقياس درجة العلاقة ، التوافق أو الاعتماد بين التقسيمات في جداول الاقتران نستخدم المعامل

$$(11) \quad C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}}$$

ويسمى معامل الاقتران . وكلما زادت قيمة C ، تزيد درجة التوافق . ويحدد عدد الصفوف والأعمدة في جدول الاقتران أكبر قيمة يمكن أن تأخذها C ، حيث لا يمكن أن تزيد عن الواحد . فإذا كان عدد الصفوف والأعمدة في جدول اقتران يساوي k ، فإن النهاية العظمى لـ C هي $\sqrt{(k-1)/k}$.

(أنظر المسائل ١٢ - ١٢ ، ١٢ - ٥٢ ، ١٢ - ٥٣) .

ارتباط الصفات :

نظراً لأن التصنيف في جداول الاقتران تصف غالباً ميزات أشخاص أو أشياء، فإننا نشير إليها صفات، وتسمى درجة الاعتماد أو التلازم أو العلاقة ، بارتباط الصفات . لجدول $k \times k$ نعرف

$$(١٢) \quad r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}}$$

معامل الارتباط بين الصفات أو التصنيفات . ويقع هذا المعامل بين صفر وواحد (أنظر المسألة ١٢ - ٢٤) . لجدول $k \times k$ حيث $k=2$ يسمى هذا الارتباط بمعامل الارتباط الرباعي .

سوف ندرس المشكلة العامة للارتباط بين المتغيرات الرقية في الفصل الرابع عشر .

خاصية الانجماع في χ^2 :

افترض أن نتائج تكرار تجربة تعطى قيم χ^2 المحسوبة من العينة كالاتي $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2, \dots$ بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$ على الترتيب . بهذا فإن نتيجة كل هذه التجارب يمكن اعتبارها مكافئة لقيمة χ^2 المعطاة بـ $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \dots$ بدرجات حرية $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots$ أنظر المسألة ١٢ - ٢٥

مسائل محلولة

اختبار كا - تربيع (كا^٢) :

١ - ١٢ في 200 رمية لعملة ، ظهرت 115 صورة و 85 كتابة . اختبر الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

الحل :

التكرارات المشاهدة للصورة والكتابة هي على الترتيب $e_1 = 115$ و $e_2 = 85$ التكرارات المتوقعة للصورة والكتابة إذا كانت العملة غير متحيزة هي $e_1 = 100, e_2 = 100$ على الترتيب اذن

$$\chi^2 = \frac{(e_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(e_2 - e_2)^2}{e_2} = \frac{(115 - 100)^2}{100} + \frac{(85 - 100)^2}{100} = 4.50$$

بما أن عدد الطبقات أو التقسيمات (الصور ، الكتابة) هي $k = 2$ و $\nu = k - 1 = 2 - 1 = 1$ (أ) بما أن القيمة الحرجة $\chi_{0.05}^2$ لدرجة حرية واحدة تساوي 3.84 وأن $4.50 > 3.84$ فإننا نرفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.05 .

(ب) القيمة الحرجة $\chi^2_{0.99}$ لدرجة حرية واحدة تساوى 6.63 . وبما أن $4.50 < 6.63$ ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة عند مستوى المعنوية 0.01 .

نستنتج من ذلك أن النتائج المشاهدة هي محتملة المعنوية وأن العملة من المحتمل أن تكون متحيزة . للمقارنة بين هذه الطريقة والطرق سابق استخدامها ، أنظر المسألة ١٢ - ٣ .

١٢ - ٢ حل المسألة ١٢ - ١ باستخدام تصحيح ييتس .

الحل

$$\frac{(|o_1 - e_1| - 0.5)^2}{e_1} + \frac{(|o_2 - e_2| - 0.5)^2}{e_2} = \frac{(|115 - 100| - 0.5)^2}{100} + \frac{(|85 - 100| - 0.5)^2}{100}$$

$$= \frac{(14.5)^2}{100} + \frac{(14.5)^2}{100} = 4.205.$$

بما أن $4.205 > 3.84$ و $4.205 < 6.63$ ، فإن الاستنتاج الذى وصلنا إليه في المسألة ١٢ - ١ ، ازال صحيحاً .

للمقارنة بالطرق السابقة ، أنظر المسألة ١٢ - ٣ .

١٢ - ٣ حل المسألة ١٢ - ١ باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذى الحدين .

الحل :

تحت الفرض القائل أن العملة غير متحيزة ، فإن المتوسط والانحراف المعياري لعدد الصور المتوقعة في 200 رمية لعملة هي $7.07 = \sqrt{Npq} = \sqrt{(200)(0.5)(0.5)}$ و $\mu = Np = (200)(0.5) = 100$ على الترتيب .

الطريقة الاولى :

$$115 \text{ صورة معبراً عنها بوحدات معيارية} = 2.12 = (115 - 100)/7.07$$

باستخدام مستوى معنوية 0.05 واختبار من طرفين ، فإنه يجب رفض الفرض القائل أن العملة غير متحيزة إذا كانت قيم z تقع خارج الفترة من -1.96 إلى 1.96 . وبمستوى ثقة 0.01 فإن الفترة المقابلة هي من -2.58 إلى 2.58 . ينتج عن ذلك كما في المسألة ١٢ - ١ أنه يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

لاحظ أن مربع القيم المعيارية أعلاه $4.50 = (2.12)^2$ ، مثل قيمة χ^2 التى حصلنا عليها في المسألة ١٢ - ١ . وهذا دائماً الحال لاختبار كا² في حالة التقسيم الثنائي . أنظر المسألة ١٢ - ١٠ .

الطريقة الثانية :

باستخدام التصحيح للمتغير المتصل ، 115 صورة أو أكثر تكافئ 114.5 صورة أو أكثر . إذن 114.5 معياراً عنها بوحدات معيارية $= 2.05 = (114.5 - 100)/7.07$ وهذا يؤدي إلى نفس الاستنتاج كما في الطريقة الأولى .

لاحظ أن مربع هذه القيمة المعيارية $4.20 = (2.05)^2$ ، يتفق مع قيمة χ^2 المصححة للمتغير المتصل باستخدام تصحيح ييتس بالمسألة ١٢ - ٢ . وهذا دائماً الحال لاختبار كاي^٢ في حالة التقسيم الثنائي عند استخدام نصحيح ييتس .

١٢ - ٤ الجدول ١٢ - ٢ يوضح التكرارات المشاهدة والمتوقعة في رمية زهرة طاولة 120 مرة . اختبر الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة ، باستخدام مستوى معنوية 0.05 .

جدول ١٢ - ٢

الوجه	1	2	3	4	5	6
التكرار المشاهد	25	17	15	23	24	16
التكرار المتوقع	20	20	20	20	20	20

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(o_1 - e_1)^2}{e_1} + \frac{(o_2 - e_2)^2}{e_2} + \frac{(o_3 - e_3)^2}{e_3} + \frac{(o_4 - e_4)^2}{e_4} + \frac{(o_5 - e_5)^2}{e_5} + \frac{(o_6 - e_6)^2}{e_6}$$

$$= \frac{(25 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(24 - 20)^2}{20} + \frac{(16 - 20)^2}{20} = 5.00$$

بما أن عدد الأقسام أو التصنيفات (الأوجه 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1) هي $k=6$ فإن $v=k-1=6-1=5$. القيمة الحرجة $\chi_{0.95}^2$ بدرجات حرية 5 هي 11.1 . وبما أن $5.00 < 11.1$ ، فلا يمكن رفض الفرض القائل أن الزهرة غير متحيزة .

لدرجات حرية 5 ، فإن $\chi_{0.95}^2 = 1.15$ ، بحيث $\chi^2 = 5.00 > 1.15$ ينتج عن ذلك أن الاتفاق ليس جيداً بدرجة استثنائية ، مما يجعلنا ننظر إليه بشك .

١٢ - ٥ في جدول للأرقام العشوائية به 250 رقم أظهر التوزيع التالى للأرقام 0, 1, 2, ..., 9 . هل التوزيع المشاهد يختلف بشكل معنوى عن التوزيع المتوقع ؟

الرقم	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
التكرار المشاهد	17	31	29	18	14	20	35	30	20	36
التكرار المتوقع	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(17-25)^2}{25} + \frac{(31-25)^2}{25} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(18-25)^2}{25} + \dots + \frac{(36-25)^2}{25} = 23.3$$

القيمة الحرجة $\chi_{0.99}^2$ لدرجات حرية $\nu = k - 1 = 9$ تساوي 21.7 وحيث أن $23.3 > 21.7$ لذلك نستنتج أن التوزيع المشاهد يختلف معنوياً عن التوزيع المتوقع عند مستوى المعنوية 0.01 . وينتج عن ذلك أن هناك بعض الشك حول جدول الأرقام العشوائية .

١٢-٦ في تجارب مندل على البسلة لاحظ أن 315 مستديرة ولونها أصفر ، 108 مستديرة ولونها أخضر ، 101 مجمدة ولونها أصفر و 32 مجمدة ولونها أخضر . طبقاً لنظريته في الوراثة فإن الأعداد يجب أن تكون حسب النسب 9 : 3 : 3 : 1 . هل هناك أى دليل للتشكك في نظريته . عند مستوى المعنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 ؟

الحل :

العدد الكلي للبسلة = 315 + 108 + 101 + 32 = 556 بما أن الأعداد المتوقعة هي حسب النسب 9 : 3 : 3 : 1 (9 + 3 + 3 + 1 = 16) فإننا نتوقع

$$^{9/16}(556) = 312.75 = \text{مستديرة ولونها أصفر}$$

$$^{3/16}(556) = 104.25 = \text{مجمدة ولونها أصفر}$$

$$^{3/16}(556) = 104.25 = \text{مستديرة ولونها أخضر}$$

$$^{1/16}(556) = 34.75 = \text{مجمدة ولونها أخضر}$$

$$\chi^2 = \frac{(315 - 312.75)^2}{312.75} + \frac{(108 - 104.25)^2}{104.25} + \frac{(101 - 104.25)^2}{104.25} + \frac{(32 - 34.75)^2}{34.75} = 0.470 \quad \text{إذن}$$

بما أن هناك أربعة تقسيمات ، $k = 4$ فإن عدد درجات الحرية $\nu = 4 - 1 = 3$.

(أ) $\nu = 3$ فإن $\chi_{0.99}^2 = 11.3$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.01 .

(ب) لـ $\nu = 3$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ بحيث لا يمكننا رفض النظرية عند المستوى 0.05 .
نستنتج من ذلك أن هناك تطابق بين النظرية والتجربة .

لاحظ أنه لدرجات حرية 3 ، $\chi^2_{0.05} = 0.352$ و $0.470 > \chi^2 = 0.352$ هذا على الرغم من أن الاتفاق جيد ، فإن النتيجة التي حصلنا عليها معرضة لدرجة معقولة لأخطاء المعاينة .

١٧-٧ وعاء يحتوى على عدد كبير من الكرات لها أربعة ألوان مختلفة : أحمر ، برتقالى ، أصفر ، وأخضر . عينة من 12 كرة سحبت عشوائياً من الوعاء وأظهرت 2 أحمر ، 5 برتقالى ، 4 أصفر ، 1 أخضر . اختبر الفرض القائل أن الوعاء يحتوى على نسب متساوية من الكرات ذات الألوان المختلفة .
الحل :

تحت الفرض القائل أن الوعاء يحتوى على نسب متساوية من الكرات مختلفة الألوان ، فإننا نتوقع 3 من كل نوع في عينة من 12 كرة .

بما أن العدد المتوقع أقل من 5 ، فإن تقريب كا - مربع معرض للخطأ . ولتلافى ذلك ، فإننا نضم الخلايا بحيث يكون العدد المتوقع في كل خلية 5 على الأقل .

إذا كنا نريد رفض الفرض ، فإننا نضم الخلايا بطريقة تجعل الدليل ضد الفرض يظهر بصورة أحسن ما يمكن . ويمكن تحقيق ذلك في حالتنا هذه باعتبار الخلية « أحمر أو أخضر » و « برتقالى أو أصفر » ، والتي تظهر 3 و 9 كرات على الترتيب . وبما أن العدد المتوقع في كل خلية تحت فرض تساوي النسب هو 6 فإن :

$$\chi^2 = \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} = 3$$

لقيمة $\nu = 2 - 1 = 1$ ، فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. بهذا لا يمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 (على الرغم من أنه يمكن رفضه عند المستوى 0.01) . ومن الممكن تصور أن النتائج المشاهدة يمكن أن تنشأ بمجرد الصدفة على الرغم من أن تساوى نسب الألوان قد يكون موجوداً .

طريقة أخرى : باستخدام تصحيح ييتس ، نجد أن

$$\chi^2 = \frac{(|3-6|-0.5)^2}{6} + \frac{(|9-6|-0.5)^2}{6} = \frac{(2.5)^2}{6} + \frac{(2.5)^2}{6} = 2.1$$

وهذه تؤدي إلى نفس الاستنتاج أعلاه . وهذا متوقع بالطبع لأن تصحيح ييتس يؤدي دائماً إلى التقليل من قيمة χ^2 ويجب أن نلاحظ أنه إذا استخدمنا تقريب χ^2 على الرغم من حقيقة أن التكرارات صغيرة ، فإننا سوف نحصل على

$$\chi^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 3.33$$

بما أن $3 = 4 - 1 = \nu$ فإن $\chi^2_{0.95} = 7.81$ ، فإننا نصل إلى نضرب الاستنتاج السابق . ومن سوء الحظ أن تقريب χ^2 للتكرارات الصغيرة غير جيد ، ولهذا لا ننصح بضم التكرارات معاً في هذه الحالة ولكن يجب أن نلجأ لطرق الاحتمال الدقيقة المذكورة في الفصل السادس .

١٢ - ٨ في 360 رمية لزهرتين طاولة ، ظهر ما مجموعه « سبعة » 74 مرة وما مجموعه « إحدى عشر » 24 مرة باستخدام مستوى المعنوية 0.05 ، اختبر الفرض أن الزهرتين غير متحيزتان .

الحل :

عدد الطرق التي تظهر بها زهرتان هو 36 طريقة . ما مجموعه « سبعة » يمكن أن تحدث بـ 6 طرق ، ما مجموعه « إحدى عشر » يمكن أن تحدث بطريقتين .

إذن $\Pr\{\text{إحدى عشر}\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ ، $\Pr\{\text{سبعة}\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ ، بهذا فإننا نتوقع $\frac{1}{6}(360) = 60$ « سبعة » و $\frac{1}{18}(360) = 20$ « إحدى عشر » بحيث

$$\chi^2 = \frac{(74 - 60)^2}{60} + \frac{(24 - 20)^2}{20} = 4.07$$

بما أن $\nu = 2 - 1 = 1$ فإن $\chi^2_{0.95} = 3.84$. إذن بما أن $4.07 > 3.84$ فإننا نميل إلى رفض الفرض بأن الزهر غير متحيز . باستخدام تصحيح ييتس ، فإننا نجد :

$$\chi^2 (\text{المصحح}) = \frac{(|74 - 60| - 0.5)^2}{60} + \frac{(|24 - 20| - 0.5)^2}{20} = \frac{(13.5)^2}{60} + \frac{(3.5)^2}{20} = 3.65$$

بهذا فإنه على أساس استخدام χ^2 المصحح ، فإننا لن نرفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

وبشكل عام فإنه في حالة العينات ذات الحجم الكبير كما هو الحال في هذه المسألة ، فإن استخدام تصحيح ييتس أظهر أنه أكثر مأمونية من النتائج غير المصححة . وعلى أية حال ، فيما أن قيمة χ^2 المصححة تقع قرب القيمة الحرجة ، فإننا نتردد في اتخاذ القرار في أي اتجاه . في مثل هذه الحالات قد يكون من الأفضل زيادة حجم العينة بأخذ قراءات أكثر إذا كنا نرغب في الاحتفاظ بمستوى المعنوية 0.05 . لسبب من الأسباب . بخلاف ذلك فيمكن رفض الفرض عند مستوى آخر (مثل 0.10) إذا كان ذلك مقبولا .

١٢ - ٩ في بحث شمل 320 أسرة بكل منها 5 أطفال أظهر التوزيع الموضح بالجدول ١٢ - ٣ . هل هذه النتيجة متفقة مع الفرض القائل أن ميلاد الذكور والإناث متساويين في الاحتمال ؟

جدول ١٢ - ٣

عدد الأولاد والبنات	5 أولاد 0 بنات	4 أولاد 1 بنات	3 أولاد 2 بنات	2 أولاد 3 بنات	1 ولد 4 بنات	0 ولد 1 بنات	الإجمالي
عدد الأسر	18	56	110	88	40	8	320

الحل :

اعتبر أن p هو احتمال ميلاد ذكر ، $q = 1 - p$ هو احتمال ميلاد أنثى . بهذا فإن احتمالات (5 أولاد) ،
(4 أولاد وبنت) ، ، (5 بنات) نحصل عليها من حدود مفكوك ذي الحدين

$$(p + q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5pq^4 + q^5$$

إذا كانت $p = q = \frac{1}{2}$ فإن :

$$\Pr\{2 \text{ ولد ، } 3 \text{ بنات}\} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} \quad \Pr\{5 \text{ أولاد ، صفر بنت}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

$$\Pr\{4 \text{ أولاد ، بنت}\} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} \quad \Pr\{3 \text{ أولاد ، بنت 2}\} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$$

$$\Pr\{3 \text{ أولاد ، بنت 2}\} = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} \quad \Pr\{5 \text{ بنات ، صفر ولد}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

بهذا فإن عدد الأسر التي بها 0, 1, 2, 3, 4, 5 ولد تحصل عليها بضرب الاحتمالات السابقة في عدد الأسر 320
والنتيجة هي 10, 50, 100, 100, 50, 10 . وبهذا فإن

$$\chi^2 = \frac{(18 - 10)^2}{10} + \frac{(56 - 50)^2}{50} + \frac{(110 - 100)^2}{100} + \frac{(88 - 100)^2}{100} + \frac{(40 - 50)^2}{50} + \frac{(8 - 10)^2}{10} = 12.0$$

وبما أن $\chi_{0.95}^2 = 11.1$ و $\chi_{0.99}^2 = 15.1$ لدرجات حرية $v = 6 - 1 = 5$ ، فيمكن
رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 ولكن لا يمكن رفضه عند المستوى 0.01 . من هذا ننهي إلى أن
النتيجة محتملة المعنوية ، وأن ميلاد الذكور والإناث ليسا متساويين بالاحتمال .

١٢ - ١٠ بين أن اختبار كا - مربع المتضمن تصنيفين يكافئ اختبار المعنوية في صفحة ٢٧٢ ، الفصل العاشر .

الحل :

	I	II	الإجمالي
التكرار المشاهد	NP	$N(1 - P)$	N
التكرار المتوقع	Np	$N(1 - p) = Nq$	N

إذا كانت P هي نسبة العينة في المجموعة I

و p هي نسبة المجتمع و N هي إجمال

التكرارات ، فإنه يمكن توضيح الوضع

باستخدام الجدول المرفق . بالترتيب

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(NP - Np)^2}{Np} + \frac{[N(1 - P) - N(1 - p)]^2}{Nq} \\ &= \frac{N^2(P - p)^2}{Np} + \frac{N^2(P - p)^2}{Nq} = N(P - p)^2 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{N(P - p)^2}{pq} = \frac{(P - p)^2}{pq/N} \end{aligned}$$

وهو مربع الإحصائية Z في الصفحة ٢٧٢

١١-١٢ (أ) أثبت أن الصيغة (١) ، في صفحة ٣٢٣ ، يمكن كتابتها $\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N$.

(ب) استخدم نتيجة (أ) لإثبات قيمة χ^2 المحسوبة في المسألة ١٢ - ٦ .

الحل :

(أ) بالتعريف

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} = \sum \left(\frac{o_j^2 - 2o_j e_j + e_j^2}{e_j} \right) \\ &= \sum \frac{o_j^2}{e_j} - 2 \sum o_j + \sum e_j = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - 2N + N = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N \end{aligned}$$

حيث استخدمنا النتيجة (٢) في صفحة ٣٢٣

$$\chi^2 = \sum \frac{o_j^2}{e_j} - N = \frac{(315)^2}{312.75} + \frac{(108)^2}{104.25} + \frac{(101)^2}{104.25} + \frac{(32)^2}{34.75} - 556 = 0.470 \quad (\text{ب})$$

جودة التوفيق :

١٢-١٢ استخدام اختبار كا - مربع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات بالمسألة ١٧ - ٣١ ، الفصل السابع .

الحل :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(38 - 33.2)^2}{33.2} + \frac{(144 - 161.9)^2}{161.9} + \frac{(342 - 316.2)^2}{316.2} + \frac{(287 - 308.7)^2}{308.7} + \frac{(164 - 150.7)^2}{150.7} + \frac{(25 - 29.4)^2}{29.4} \\ &= 7.54. \end{aligned}$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة في تقدير التكرارات المتوقعة هي $m = 1$ (بالتحديد المعلمة p لتوزيع

$$v = k - 1 - m = 6 - 1 - 1 = 4 , \quad (\text{في الحدين})$$

$$v = 4 , \quad \chi_{0.95}^2 = 9.49 . \text{ وبهذا فإن التوفيق جيد}$$

$$v = 4 , \quad \chi_{0.05}^2 = 0.711 . \text{ بما أن } \chi^2 = 7.54 > 0.711 , \text{ فإن التوفيق ليس على درجة عالية}$$

جداً من الدقة .

١٣-١٢ حدد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٣٣ - ٧ بالمسألة ٣٣ - ٧ ، الفصل السابع .

الحل :

$$\chi^2 = \frac{(5 - 4.13)^2}{4.13} + \frac{(18 - 20.68)^2}{20.68} + \frac{(42 - 38.92)^2}{38.92} + \frac{(27 - 27.71)^2}{27.71} + \frac{(8 - 7.43)^2}{7.43} = 0.959$$

بما أن عدد المعالم المستخدمة في تقدير التكرارات المتوقعة هي $m = 2$ (بالتحديد المتوسط μ والانحراف

$$v = k - 1 - m = 5 - 1 - 2 = 2 , \quad (\text{المعيارى } \sigma \text{ للتوزيع الطبيعي})$$

$$v = 2 , \quad \chi_{0.95}^2 = 5.99 . \text{ وبهذا نستنتج بأن توفيق البيانات جيد جداً.}$$

$$v = 2 , \quad \chi_{0.05}^2 = 0.103 . \text{ إذن } \chi^2 = 0.959 > 0.103 , \text{ فإن التوفيق ليس على درجة كبيرة من الجودة.}$$

جداول الاقتران :

١٤-١٢ حل المسألة ١٠-٢٠ ، الفصل العاشر ، باستخدام اختبار كا - تربيع .

الحل :

يوضح الجدول ١٢ - ٤ بيانات المسألة . (أ) تحت فرض العدم H_0 بأن المصل ليس له تأثير ، فإننا نتوقع 70 شخصاً في كل مجموعة سوف يشفوا من المرض و 30 شخصاً لن يشفوا ، كما هو موضح بالجدول ١٢ - ٤ (ب) . لاحظ أن H_0 بكافيه القول بأن الشفاء مستقل عن المصل ، أى أن التقسيمات مستقلة عن بعضها .

جدول ١٢ - ٤ (ب) التكرارات المتوقعة تحت H_0

جدول ١٢ - ٤ (أ) التكرار المشاهد

شفوا لم يشفوا المجموع			المجموعة A (استخدموا المصل)		
75	25	100			
65	35	100			
140	60	200			
المجموع					

شفوا لم يشفوا المجموع			المجموعة B (لم تستخدم المصل)		
70	30	100			
70	30	100			
140	60	200			
المجموع					

$$\chi^2 = \frac{(75-70)^2}{70} + \frac{(65-70)^2}{70} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(35-30)^2}{30} = 2.38$$

جدول ١٢ - ٥

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول

شفوا لم يشفوا المجموع		
100		المجموعة A
110		المجموعة B
200	60	140

١٢ - ٥ وهو يماثل الجداول أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هي المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية في وضع رقم واحد في أى من الخلايا الشاغرة ، وبما أنه إذا تم ذلك فإن الخلايا الباقية ستحدد بصورة وحيدة من المجاميع الموضحة . بهذا فإنه توجد درجة حرية واحدة .

طريقة أخرى : بالصيغة (أنظر المسألة ١٢-١٨) ، $v = (h - 1) (k - 1) = (2 - 1) (2 - 1) = 1$ ،

بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لدرجة حرية واحدة ، وبما أن $\chi^2 = 2.38 < 3.84$ ، فإننا نستنتج أن النتائج غير معنوية عند المستوى 0.05 . بهذا نكون غير قادرين على رفض H_0 عند هذا المستوى ونستنتج من هذا أن المصل أما أن يكون غير فعال أو نؤجل الحكم حين إجراء اختبارات أكثر .

لاحظ أن $\chi^2 = 2.38$ هو مربع قيمة z ، $z = 1.54$ ، التي حصلنا عليها في المسألة ١٠ - ٢٠ بالفصل العاشر . وبشكل عام فإن اختبار كا - تربيع المتضمن نسب العينات في جدول اقتران 2×2 مكافئ لاختبار معنوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب .

لاحظ كذلك أن اختبار χ^2 من طرف واحد يكافئ اختبار من طرفين باستخدام χ ، على سبيل المثال $\chi^2 > \chi_{0.95}$ تقابل $(\chi > \chi_{0.95})$ أو $(\chi < -\chi_{0.95})$. وبما أنه في جداول 2×2 ، فإن χ^2 هو مربع قيم z ، ينتج عن ذلك أن χ مثل z لهذه الحالة . بهذا فإن رفض الفرض عند المستوى 0.05 باستخدام χ^2 تكافئ الرفض في اختبار من طرف واحد عند المستوى 0.10 باستخدام z .

١٢ - ١٥ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح بيتس .

الحل :

$$\chi^2(\text{مصحح}) = \frac{(|75 - 70| - 0.5)^2}{70} + \frac{(|65 - 70| - 0.5)^2}{70} + \frac{(|25 - 30| - 0.5)^2}{30} + \frac{(|35 - 30| - 0.5)^2}{30} = 1.93$$

وبهذا فإن الاستنتاج الذي وصلنا إليه في المسألة السابقة مازال صحيحاً ويمكن التحقق من ذلك بملاحظة أن تصحيح بيتس يؤدي إلى خفض في قيمة χ^2 .

١٢ - ١٦ الجدول ١٢ - ٦ يوضح عدد الطلبة الذين نجحوا

وعدد الطلبة الذين رسبوا عند كل من المحاضرين :

Mr. X و Mr. Y و Mr. Z اختبر الفرض

بأن نسبة الطلبة الراسبين الثلاثة متساوية .

الحل :

تحت الفرض H_0 بأن نسب الطلبة الراسبين عند

المحاضرين الثلاثة متساوية فإنها تكون $27/180 = 15\%$

وبهذا يكون 85% من الطلبة ناجحين . في هذه

الحالة فإن Mr. X على سبيل المثال ، يجب أن يرسم عنده 15% من 55 طالباً وينجح 85% من 55 طالباً . التكرارات

المتوقعة تحت N_0 موضحة بالجدول ١٢ - ٧

جدول ١٢ - ٦

التكرارات المشاهدة

المجموع Mr. Z Mr. Y Mr. X

50	47	56	153
5	14	8	27
55	61	64	180

نجاح

رسب

المجموع

جدول ١٢ - ٨

المجموع Mr. Z Mr. Y Mr. X

153	85% of 55 = 46.75	85% of 61 = 51.85	85% of 64 = 54.40
27	15% of 55 = 8.25	15% of 61 = 9.15	15% of 64 = 9.60
180	64	61	55

جدول ١٢ - ٧ التكرارات المتوقعة تحت H_0

المجموع Mr. X Z Mr. Y Mr.

			153
			27
55	61	64	180

نجاح

رسب

المجموع

إذن

$$\chi^2 = \frac{(50 - 46.75)^2}{46.75} + \frac{(47 - 51.85)^2}{51.85} + \frac{(56 - 54.40)^2}{54.40} + \frac{(5 - 8.25)^2}{8.25} + \frac{(14 - 9.15)^2}{9.15} + \frac{(8 - 9.60)^2}{9.60} = 4.84$$

لتحديد عدد درجات الحرية ، اعتبر الجدول ١٢ - ٨ وهو يمثل الجداول المعطاة أعلاه فيما عدا أن المجاميع فقط هي المذكورة . من الواضح أن لنا الحرية في وضع رقم واحد في خلية شاغرة في العمود الأول ورقم واحد في خلية شاغرة في العمود الثاني أو الثالث ، وبعد ذلك فإن جميع الأرقام في الخلايا الباقية تتحدد تماماً من المجاميع الموضحة . أى أن هناك درجتى حرية في هذه المسألة .

طريقة أخرى : بالصيغة $\nu = (h - 1)(k - 1) = (2 - 1)(3 - 1) = 2$

بما أن $\chi_{0.95}^2 = 5.99$ ، فلا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 . لاحظ ، بما أن $\chi_{0.90}^2 = 4.61$ ، فإنه يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.10 إذا كنا على استعداد بحمل مخاطرة أن تكون مخطئين مرة واحدة في كل 10 مرات .

١٢ - ١٧ استخدم الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، لحساب قيمة χ^2 بالمسألة السابقة .

الحل :

بما أن $a_1 = 50, a_2 = 47, a_3 = 56, b_1 = 5, b_2 = 14, b_3 = 8, N_A = a_1 + a_2 + a_3 = 153, N_B = b_1 + b_2 + b_3 = 27, N_1 = a_1 + b_1 = 55, N_2 = a_2 + b_2 = 61, N_3 = a_3 + b_3 = 64, N = N_A + N_B = N_1 + N_2 + N_3 = 180$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{N}{N_A} \left[\frac{a_1^2}{N_1} + \frac{a_2^2}{N_2} + \frac{a_3^2}{N_3} \right] + \frac{N}{N_B} \left[\frac{b_1^2}{N_1} + \frac{b_2^2}{N_2} + \frac{b_3^2}{N_3} \right] - N \\ &= \frac{180}{153} \left[\frac{(50)^2}{55} + \frac{(47)^2}{61} + \frac{(56)^2}{64} \right] + \frac{180}{27} \left[\frac{(5)^2}{55} + \frac{(14)^2}{61} + \frac{(8)^2}{64} \right] - 180 = 4.84 \end{aligned}$$

فإن

١٢ - ١٨ وضع أنه في جداول الاقتران $h \times k$ فإن عدد درجات الحرية هي $(h-1) \times (k-1)$ حيث $h > 1, k > 1$.

الحل :

في جدول به h صف و k عمود ، يمكن ترك رقم واحد في كل صف وفي كل عمود حيث أن هذه الأرقام من السهل معرفة قيمتها من معرفة مجاميع كل صف وكل عمود . يترتب على ذلك أن لنا الحرية في وضع $(h-1)(k-1)$ رقم في الجدول ، أما الأرقام الباقية فتتحدد تلقائياً وبصورة وحيدة . وبهذا فإن عدد درجات الحرية هي $(h-1)(k-1)$. لاحظ أن هذه النتيجة صحيحة على أساس أن معالم المجتمع المطلوبة للحصول على التكرارات المتوقعة معلومة

١٢ - ١٩ (أ) أثبت أنه في جدول الاقتران 2×2 الموضحة بالجدول ١٢ - ٩ (أ)

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B}$$

(ب) مثل النتائج في (أ) باستخدام بيانات المسألة ١٢ - ١٤ .

جدول ١٢ - ٩ (ب) النتائج المتوقعة

المجموع	II	I	
N_1N_A/N	N_2N_A/N	N_A	A
N_1N_B/N	N_2N_B/N	N_B	B
N_1	N_2	N	المجموع

جدول ١٢ - ٩ (أ) النتائج المشاهدة

المجموع	II	I	
a_1	a_2	N_A	A
b_1	b_2	N_B	B
N_1	N_2	N	المجموع

الحل :

كما في المسألة ١٢ - ١٤ ، فإن النتائج المتوقعة تحت فرض العدم موضحة بالجدول ١٢ - ٩ (ب) . إذن

$$\chi^2 = \frac{(a_1 - N_1N_A/N)^2}{N_1N_A/N} + \frac{(a_2 - N_2N_A/N)^2}{N_2N_A/N} + \frac{(b_1 - N_1N_B/N)^2}{N_1N_B/N} + \frac{(b_2 - N_2N_B/N)^2}{N_2N_B/N}$$

$$a_1 - \frac{N_1N_A}{N} = a_1 - \frac{(a_1 + b_1)(a_1 + a_2)}{a_1 + b_1 + a_2 + b_2} = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N} \quad \text{ولكن}$$

$$\left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}\right) \text{ كذلك فإن } \left(a_2 - \frac{N_2N_A}{N}\right), \left(b_1 - \frac{N_1N_B}{N}\right), \text{ and } \left(b_2 - \frac{N_2N_B}{N}\right) \text{ مساوياً أيضاً}$$

وهذا يمكن أن نكتب

$$\chi^2 = \frac{N}{N_1N_A} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_2N_A} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_1N_B} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}\right)^2 + \frac{N}{N_2N_B} \left(\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{N}\right)^2$$

والتي يمكن تبسيطه إلى

$$\chi^2 = \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B}$$

في المسألة ١٢ - ١٤ ،

$$a_1 = 75, a_2 = 25, b_1 = 65, b_2 = 35, N_1 = 140, N_2 = 60, N_A = 100, N_B = 100, \text{ and } N = 200$$

إذن ، وكما حصلنا عليه قبل ذلك ،

$$\chi^2 = \frac{200[(75)(35) - (25)(65)]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 2.38$$

باستخدام معامل تصحيح بيتس ، فإن النتيجة مثل تلك التي بالمسألة ١٢ - ١٥

$$\chi^2(\text{المصحح}) = \frac{N(|a_1b_2 - a_2b_1| - \frac{1}{2}N)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{200[|(75)(35) - (25)(65)| - 100]^2}{(140)(60)(100)(100)} = 1.93$$

١٢ - ٢٥ أثبت أن اختباراً كا - تربيع المتضمن نسب عينتين يكافئ اختبار معنوية الفروق بين النسب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب (أنظر صفحة ٢٧٢) .

الحل :

اعبر P_1 ، P_2 يرمزان إلى نسب العينتين و p إلى نسبة المجتمع . بالرجوع إلى المسألة ١٢ - ١٩ ، نجد أن

$$P_1 = a_1/N_1, \quad P_2 = a_2/N_2, \quad 1-P_1 = b_1/N_1, \quad 1-P_2 = b_2/N_2 \quad (١)$$

$$p = N_A/N, \quad 1-p = q = N_B/N \quad (٢)$$

بحيث

$$a_1 = N_1P_1, \quad a_2 = N_2P_2, \quad b_1 = N_1(1-P_1), \quad b_2 = N_2(1-P_2) \quad (٣)$$

$$N_A = Np, \quad N_B = Nq \quad (٤)$$

باستخدام (٣) و (٤) ، نجد من المسألة ١٢ - ١٩ ،

$$\begin{aligned} (N = N_1 + N_2) \quad \chi^2 &= \frac{N(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{N_1N_2N_AN_B} = \frac{N[N_1P_1N_2(1-P_2) - N_2P_2N_1(1-P_1)]^2}{N_1N_2NpNq} \\ &= \frac{N_1N_2(P_1 - P_2)^2}{Npq} = \frac{(P_1 - P_2)^2}{pq(1/N_1 + 1/N_2)} \quad (\text{since } N = N_1 + N_2) \end{aligned}$$

وهو مربع الإحصائية المعطاة في صفحة ٢٧٢

معامل الاقتران :

١٢ - ٢١ أوجد معامل الاقتران لبيانات جدول الاقتران بالمسألة ١٢ - ١٤

الحل :

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} = \sqrt{\frac{2.38}{2.38 + 200}} = \sqrt{0.01176} = 0.1084$$

١٢ - ٢٢ أوجد أكبر قيمة لـ C للجدول 2×2 بالمسألة

١٤ - ١٢

جدول ١٢ - ١٠

الحل :

شفوا	لم يشفوا	المجموع
100	0	100
0	100	100
100	100	200

مجموعة A
(استخدموا المصل)مجموعة B
(لم يستخدموا المصل)

المجموع

أكبر قيمة لـ C تحدث عندما يكون التصنيفان معتمدين على بعضهما اعتماداً كاملاً أو متلازمين . في هذه الحالة فإن جميع الذين استخدموا المصل سوف يشفوا بينما الذين لم يستخدموه لن يشفوا . ويظهر جدول الاقتران في هذه الحالة كما في الجدول ١٢ - ١٠ .

بما أن القيمة المتوقعة لتكرارات الخلايا بفرض الاستقلال الكامل ، تساوى كلها 50 .

$$\chi^2 = \frac{(100 - 50)^2}{50} + \frac{(0 - 50)^2}{50} + \frac{(0 - 50)^2}{50} + \frac{(100 - 50)^2}{50} = 200$$

$$C = \sqrt{\chi^2 / (\chi^2 + N)} = \sqrt{200 / (200 + 200)} = 0.7071 \text{ هي أكبر قيمة لـ } C$$

بشكل عام في حالة الاعتماد الكامل في جداول الاقتران عندما يكون كلا من عدد الصفوف وعدد الأعمدة يساوى k ، فإن الخلايا التي ليس بها أصفار تحدث على القطر من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين في جدول الاقتران . في مثل هذه الحالات ،

$$C_{max} = \sqrt{(k-1)/k} \quad (\text{أنظر المسائل ١٢ - ٥٢ ، ١٢ - ٥٣})$$

الارتباط بين الصفات :

١٢ - ٢٣ لجدول المسألة ١٢ - ١٤ ، أوجد معامل الارتباط (أ) بدون استخدام تصحيح بيتس (ب) باستخدام تصحيح بيتس

الحل :

$$r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} = \sqrt{\frac{2.38}{200}} = 0.1091 \text{ (أ) بما أن } \chi^2 = 2.38 \text{ و } N = 200 \text{ و } k = 2 \text{ فإن}$$

مايدل على ارتباط ضعيف بين الشفاء واستخدام المصل .

$$r \text{ (مصحح) } = \sqrt{1.93/200} = 0.0982 \text{ ، باستخدام المسألة ١٢ - ١٥ ،}$$

١٢ - ٢٤ أثبت أن معامل الارتباط في جداول الاقتران ، كما هو معروف بالمعادلة (١٢) ، صفحة ٣٢٧ ، يقع بين الصفر والواحد .

الحل :

$$\sqrt{\chi^2 / (\chi^2 + N)} \text{ هي النهاية العظمى لـ } \sqrt{(k-1)/k} \text{ من المسألة ١٢ - ٥٣ ،}$$

إذن

$$\frac{\chi^2}{\chi^2 + N} \leq \frac{k-1}{k}, \quad k\chi^2 \leq (k-1)(\chi^2 + N), \quad k\chi^2 \leq k\chi^2 - \chi^2 + kN - N$$

$$\chi^2 \leq (k-1)N, \quad \frac{\chi^2}{N(k-1)} \leq 1, \quad \text{and} \quad r = \sqrt{\frac{\chi^2}{N(k-1)}} \leq 1$$

بما أن $\chi^2 \geq 0$ و $r \geq 0$. إذن $0 \leq r \leq 1$ وهو المطلوب .

خاصية الانجماع في χ^2

١٢ - ٢٥ اختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة ثلاث مرات . حيث كانت قيم χ^2 هي 3.54 ، 1.86 ، 2.37 ، كل منها يقابله درجة حرية واحدة . وضح أنه لا يمكن رفض H_0 عند مستوى 0.05 على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها إذا جمعنا التجارب الثلاثة معاً .

الحل :

قيمة χ^2 التى نحصل عليها من تجميع نتائج الثلاثة تجارب ، طبقاً لخامسية الانجماع $\chi^2 = 2.37 + 2.86 + 3.54 = 9.77$ بدرجات حرية $3 = 1 + 1 + 1$ بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لثلاثة درجات حرية هي 7.81 ، فيمكن رفض الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 . ولكن بما أن $\chi^2_{0.95} = 3.84$ لدرجة حرية واحدة ، فلا يمكن رفض H_0 على أساس نتائج أى تجربة بمفردها .

في تجميع التجارب حيث قيم χ^2 المعطاة تقابل درجة حرية واحدة ، فإننا لانستخدم تصحيح بيتس حيث أنه يميل في هذه الحالة إلى المغالاة في التصحيح .

مسائل اضافية

اختبار كا - مربع (كا^٢) :

١٢ - ٢٦ في 60 رمية لعملة ، لوحظ ظهور 37 صورة و 23 كتابة . اختبر صحة الفرض القائل أن العملة غير متحيزة باستخدام مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01

ج : لا يمكن رفض الفرض عند أى من المستويين .

١٢ - ٢٧ حل المسألة ١٢ - ٢٦ باستخدام تصحيح بيتس .

ج : الاستنتاج هو نفسه كما سبق .

١٢ - ٢٨ في خلال فترة طويلة كانت الدرجات التي تمنح بواسطة مجموعة من المحاضرين في مقرر دراسي معين هي في المتوسط 12% A's, 18% B's, 40% C's, 18% D's and 12% F's.

إذا أعطى محاضر جديد 12F's , 16 D's , 66 C's , 34 B's , 22 A's خلال فصلين دراسيين . حدد مستوى معنوية 0.05 ما إذا كان المحاضر الجديد يتبع نمط التقديرات التي يعطيها الآخرون .
ج : المحاضر الجديد لا يتبع نمط التقديرات المأطاة بواسطة الآخرين . (حقيقة أن الدرجات صارت أحسن من المتوسط وقد تكون راجعة لارتفاع المقدرة على التدريس أو لانخفاض المستويات أو لكليهما) .

جدول ١٢ - ١١

صفر صورة	صورة ١	صورة ٢	صورة ٣
24	108	95	23
30	90	90	30

التكرار المشاهد

التكرار المتوقع

١٢ - ٢٩ قذفت ثلاثة عملات ماجموعة 240

مرة وفي كل مرة لوحظ عدد الصور التي ظهرت . الجدول ١٢ - ١١ يوضح النتائج التي حصلنا عليها مع النتائج المتوقعة تحت الفرض القائل أن العملة غير متحيزة .

اختبر صحة هذا الفرض عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لا يوجد مبرر لرفض الفرض بأن العملة غير متحيزة .

جدول ١٢ - ١٢

الإثنين الثلاثاء الأربعاء الخميس الجمعة

135	108	120	114	146
-----	-----	-----	-----	-----

عدد الكتب

المستعارة

١٢ - ٣٠ عدد الكتب المستعارة من مكتبة

عامة خلال أسبوع معين موضح بالجدول ١٢ - ١٢ . اختبر صحة الفرض القائل أن عدد الكتب المستعارة لا يعتمد على أيام الأسبوع ، مستخدماً مستوى معنوية (أ) 0.05

(ب) 0.01

ج : لا يوجد مبرر لرفض الفرض عند أي مستوى

جدول ١٢ - ١٣

0 أحمر	1 أحمر	2 أحمر
2 أبيض	1 أبيض	0 أبيض
6	53	61

عدد السحب

١٢ - ٣١ وعاء يحتوي على 6 كرات

حمراء و 3 كرات بيضاء .

اختيرت كرتان من الوعاء عشوائياً

وتم تسجيل لونهما ثم أعيدت

الكرات إلى الوعاء . وقد تم تكرار

هذه العملية 120 مرة وسجلت

النتائج في الجدول ١٢ - ١٣ . (أ) حدد التكرارات المتوقعة (ب) حدد عند مستوى المعنوية 0.05 ما إذا

كانت النتائج متنسقة مع ما هو متوقع .

ج : (أ) 50 و 60 و 10 على الترتيب (ب) لا يمكن رفض الفرض القائل أن النتائج تماثل ما هو متوقع عند

مستوى المعنوية 0.05 .

- ١٢-٣٢ اختر 200 مسمار عشوائياً من إنتاج كل من 4 ماكينات . فكان عدد المسامير الثالفة هو 2, 9, 10, 3 . حدد ما إذا كان هناك فروق معنوية بين الماكينات باستخدام مستوى المعنوية 0.05 .
- ج : الفروق معنوية عند المستوى 0.05 .

جودة التوفيق :

- ١٢-٣١ (أ) استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق بيانات المسألة ٧ - ٧٥ ، الفصل السابع ، (ب) هل التوفيق « متناهي الجودة » ؟

استخدم مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (أ) التوفيق جيد (ب) لا .

- ١٢-٣٤ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧ - ٧٧ ، الفصل السابع ، المسألة ٧ - ٧٨ ، الفصل السابع . استخدم مستوى معنوية 0.05 وفي كل حالة حدد ما إذا كان التوفيق « متناهي الجودة » .

ج : (أ) التوفيق « متناهي الجودة » . (ب) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 .

- ١٢-٣٥ استخدم اختبار كا - تربيع لتحديد مدى جودة توفيق البيانات المشار إليها في (أ) المسألة ٧ - ٧٩ ، الفصل السابع ، (ب) المسألة ٧ - ٨٠ ، الفصل السابع . هل نتائجك في (أ) متسقة مع تلك في المسألة ١٢ - ٣٣ ؟

ج : (أ) التوفيق غير جيد عند مستوى 0.05 . بما أن توزيع ذى الحدين يعطى توفيقاً جيداً للبيانات ، وهذا يتسق مع المسألة ١٢ - ٣٣ .

(ب) هذا التوفيق جيد ولكنه ليس « متناهي الجودة » .

جداول الاقتران :

جدول ١٢-١٤

لم يصب بالمرض	أصيب بالمرض	
42	9	طعم
28	17	لم يطعم

- ١٢-٣٦ الجدول ١٤-١٤ يظهر نتائج تجربة الملاحظة تأثير تطعيم ، حيوانات التجارب ضد مرض معين . استخدم (أ) 0.01 (ب) 0.05 مستوى معنوية ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد اختلاف بين المجموعة التي طعمت والمجموعة التي لم تطعم ، أى أن التطعيم والإصابة بالمرض مستقلين .

ج : يمكن رفض الفرض عند المستوى 0.05 ولكن ليس عند المستوى 0.01 .

٣٧-١٢ حل المسألة السابقة باستخدام تصحيح ييتس .

ج : نفس الاستنتاج .

٣٨-١٢ الجدول ١٥-١٢ يوضح عدد الطلبة في الفصيلين A و B الذين

نجحوا ، والذين رسبوا في امتحان أعطى للفصيلين . استخدم

مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 ، لاختبار الفرض

بأنه لا يوجد فروق بين الفصيلين . حل المسألة باستخدام تصحيح

ييتس وبدون استخدام تصحيح ييتس .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند أى المستويين .

جدول ١٥-١٢

راسب	ناجح	
17	72	الفصل A
23	64	الفصل B

٣٩-١٢ في مجموعة من المرضى يشكون من عدم قدرتهم على النوم الجيد، أعطى بعضهم حبوب منومة بينما أعطى الآخريين حبوب

من السكر (على الرغم من أن جميعهم يعتقدون أنهم أعطوا حبوب منومة) . سألوا بعد ذلك عما إذا كانت الحبوب

ساعدتهم على النوم أم لا . وكانت نتيجة إجاباتهم كما هو موضح بالجدول ١٢ - ١٦ . مفترضاً أن كل المرضى ذكروا

الحقيقة ، اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحبوب المنومة وحبوب السكر عند مستوى المعنوية 0.05 .

ج : لا يمكن رفض الفرض عند مستوى 0.05 .

جدول ١٢-١٧

لم يقرر بعد	معارض	موافق	
37	78	85	ديمقراطي
25	61	118	جمهوري

جدول ١٢-١٦

لم يتم بصورة جيدة	نام جيداً	
10	44	أخذ الحبوب المنومة
35	81	أخذ حبوب السكر

٤٠-١٢ في اقتراح ذو أهمية قومية ، صوت المنتخبين للحزب الديمقراطي والمنتخبين للحزب الجمهوري كما هو موضح بالجدول ١٢-١٧

عند مستوى معنوية (أ) 0.01 (ب) 0.05 اختبر صحة الفرض القائل أنه لا يوجد فرق بين الحزبين فيما يختص

بالاقتراح المقدم .

ج : يمكن رفض الفرض عند كلا المستويين .

٤١-١٢ الجدول ١٨-١٢ يوضح العلاقة بين أداء الطلبة في مادتي الرياضة والطبعية . اختبر الفرض بأن مستوى أداء الطالب ، في

الرياضة مستقل عن مستوى أدائه في الطبعية ، مستخدماً مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 .

ج : يرفض الفرض عند كلا المستويين .

جدول ١٢-١٨

الرياضة			
درجات مرتفعة	درجات متوسطة	درجات منخفضة	
56	71	12	درجات مرتفعة
47	163	38	درجات متوسطة
14	42	85	درجات منخفضة

الطبيعة

١٢-٤٢ في نتيجة استقصاء عما إذا كان لعمر السائق الذي يبلغ من العمر 21 عام أو أكبر أى تأثير على عدد حوادث السيارات التي يكون هو طرفاً فيها (بما في ذلك الحوادث الصغيرة) موضح بالجدول ١٢-١٩ . اختبر عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 صحة الفرض القائل أن عدد الحوادث مستقل عن عمر السائق . ماهي مصادر الصعوبة في أساليب المعاينة والاعتبارات الأخرى التي قد تؤثر في استنتاجك ؟

جدول ١٢-١٩

	سن السائق				
	21 — 30	31 — 40	41 — 50	51 — 60	61 — 70
0	748	821	786	720	672
1	74	60	51	66	50
2	31	25	22	16	15
أكثر من 2	9	10	6	5	7

عدد الحوادث

ج : لا يمكن رفض عند أى من المستويين .

١٢-٤٣ (أ) أثبت أن $\chi^2 = \sum (o^2/e) - N$ لجميع جداول الاقتران ، حيث N هو التكرار الكلي في جميع الخلايا ، (ب) استخدم النتائج في (أ) ، حل المسألة ١٢-٤١ .

الفصل الثاني عشر : الاختبار كـ (كـ ب - توزيع)

٤٤-١٢ إذا كانت N_i و N_j تعبر على الترتيب عن مجموع التكرارات في الصف i والعمود j في جدول اقتران ، (التكرارات الهامشية) ، وضح أن التكرار المتوقع للخلية في الصف i والعمود j هو $N_i N_j / N$ حيث N هو مجموع التكرارات في جميع الخلايا .

٤٥-١٢ أثبت الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ (ملحوظة : استخدم المسائل ٤٣-١٢ ، ٤٤-١٢) .

٤٦-١٢ عم نتيجة الصيغة (٩) ، صفحة ٣٢٧ ، إلى حالة جداول الاقتران $2 \times k$ حيث $k > 3$.

٤٧-١٢ أثبت الصيغة (٨) ، صفحة ٣٢٧ .

٤٨-١٢ بالمناظرة للأفكار التي أثبتت لجداول الاقتران $h \times k$ ، ناقش جداول الاقتران $h \times k \times l$ ، مع ذكر التطبيقات الممكنة لهذه الجداول .

معامل الاقتران :

جدول ٢٠-١٢

لون الشعر			
غير شقراء	شقراء		
25	49	زرقاء	لون العين
96	30	غير زرقاء	

٤٩-١٢ الجدول ٢٠-١٢ يبين العلاقة بين لون الشعر ولون العين في عينة من 200 طالب . (أ) احسب معامل الاقتران باستخدام تصحيح ييتس وبدون استخدام تصحيح ييتس . (ب) قارن النتيجة في (أ) بأكبر قيمة لمعامل الاقتران .

ج : (أ) باستخدام تصحيح ييتس 0.3779 ، 0.3863

٥٠-١٢ أوجد معامل الاقتران لبيانات (أ) المسألة ٣٦-١٢ (ب) المسألة ٣٨-١٢ بدون استخدام تصحيح ييتس وباستخدامه .

ج : (أ) 0.2205 ، 0.1985 (مصحح) (ب) 0.0872 ، 0.0738 (مصحح) .

٥١-١٢ أوجد معامل الاقتران لبيانات المسألة ٤١-١٢

ج : 0.4651

٥٢-١٢ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران في جداول 3×3 هي $\sqrt{3} = 0.8165$ تقريباً .

٥٣-١٢ أثبت أن النهاية العظمى لمعامل الاقتران في جداول $k \times k$ هي $\sqrt{(k-1)/k}$

ارتباط الصفات :

٥٤-١٢ أوجد معامل الارتباط للبيانات في الجدول ٤٩-١٢

ج : (أ) 0.4188 ، 0.4082 (باستخدام تصحيح ييتس) .

٥٥-١٢ أوجد معامل الارتباط للبيانات في جداول (أ) ١٢-٣٦ (ب) المسألة ١٢-٣٨ ، بدون استخدام تصحيح ييتس ، وباستخدامه .

ج : (أ) 0.2261 ، 0.2026 (مصحح)

(ب) 0.0875 ، 0.0740 (مصحح)

٥٦-١٢ أوجد معامل الارتباط بين درجات الرياضة والطبيعة في الجدول بالمسألة ١٢-٤١

ج : 0.3715

٥٧-١٢ إذا كانت C هي معامل الارتباط في جدول $k \times k$ و r هو معامل الارتباط المقابل ، أثبت أن

$$r = C / \sqrt{(1 - C^2)(k - 1)}$$

خاصية الانجماع في χ^2

٥٨-١٢ لاختبار الفرض H_0 ، أجريت تجربة خمس مرات ، حيث كانت قيم χ^2 ، كل منها يقابل 4 درجات حرية هي 8.6, 7.8, 9.1, 8.3 على الترتيب . وضع أنه بينما لا يمكن رفض الفرض H_0 عند المستوى 0.05 على أساس بيانات أى تجربة بمفردها ، فإنه يمكن رفضها عند المستوى 0.005 إذا جمعنا التجارب الخمس معاً .

الفصل الثالث عشر

توفيق المنحنيات وطريقة المربعات الصغرى

العلاقة بين المتغيرات :

في كثير من النواحي العملية نجد أن هناك علاقة بين متغيرين (أو أكثر) على سبيل المثال نجد أن أوزان الذكور البالغين تعتمد بدرجة معينة على أطوالهم ، محيط الدائرة يعتمد على نصف قطرها ، ضغط وزن معين من الغاز يعتمد على درجة حرارته ، وحجمه .

وفي أغلب الأحيان يكون من المرغوب فيه التعبير عن هذه العلاقة بصورة رياضية وذلك بتحديد المعادلة التي تربط بين المتغيرات .

توفيق المنحنيات :

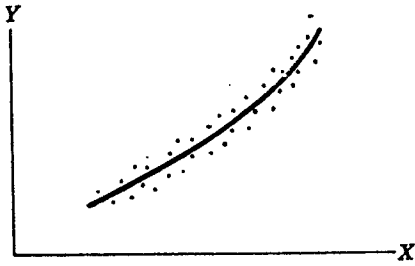
للمساعدة في تحديد المعادلة التي تربط بين المتغيرات ، كخطوة أولى نجتمع بيانات تظهر القيم المتقابلة للمتغيرات تحت الدراسة .

على سبيل المثال ، افترض أن X و Y يعبران عن أطوال وأوزان ذكور بالغين . فإن عينة مكونة من N شخص تعطي الأطوال X_1, X_2, \dots, X_N والأوزان المقابلة لها Y_1, Y_2, \dots, Y_N .

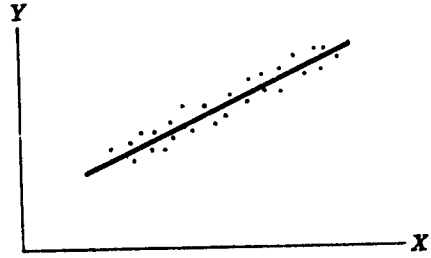
الخطوة التالية هي توضيح النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ في رسم طبقاً لنظام الإحداثيات المتعامدة . وتسمى النقط الناتجة بشكل الانتشار .

ومن شكل الانتشار يمكن بالنظر تمهيد منحني كتقريب لهذه البيانات ، مثل هذا المنحني يسمى بالمنحني التقريبي . في الشكل ١٣-١ ، على سبيل المثال ، يظهر أن البيانات يمكن تقريبها بصورة جيدة بخط مستقيم ومن ثم نقول أن هناك علاقة خطية بين المتغيرات . في الشكل ١٣-٢ ، فعل الرغم من أن هناك علاقة موجودة بين المتغيرات إلا أنها علاقة غير خطية وبهذا يمكن أن نسميها علاقة غير خطية .

المشكلة العامة في الحصول على معادلة المنحنيات التقريبية والتي تعطي أحسن توفيق لمجموعة من البيانات تسمى بتوفيق المنحنيات .



٢-١٣٠



١-١٣

معادلات المنحنيات التقريبية :

فما يلي قائمة بعدديد من الأشكال الشائعة للمنحنيات التقريبية ومعادلاتها وقد ذكرناها بهدف الرجوع إليها . جميع الحروف غير X و Y تمثل ثوابت . المتغير X يشار إليه بأنه متغير مستقل والمتغير Y بأنه المتغير التابع ، على الرغم من أنه يمكن أن تمكس التسميات لهما .

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1X$$

خط مستقيم

$$(٢) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

منحنى قطع مكافئ أو منحنى من الدرجة الثانية

$$(٣) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$

منحنى من الدرجة الثالثة

$$(٤) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$$

منحنى من الدرجة الرابعة

$$(٥) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

منحنى من الدرجة n

الجانب الأيسر من المعادلات السابقة يسمى كثيرات الحدود من الدرجة الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة ، الدرجة n على الترتيب . الدوال المعروفة بالمعادلات الأربعة الأولى تسمى أحياناً دوال خطية ، دوال من الدرجة الثانية ، دوال من الدرجة الثالثة ودوال من الدرجة الرابعة على الترتيب .

وهناك معادلات أخرى (من بين عديد من المعادلات) تستخدم في النواحي العملية نذكر منها ما يلي :

$$(٦) \quad Y = \frac{1}{a_0 + a_1X} \quad \text{or} \quad \frac{1}{Y} = a_0 + a_1X$$

قطع زائد.

$$(٧) \quad Y = ab^X \quad \text{or} \quad \log Y = \log a + (\log b)X = a_0 + a_1X$$

المنحنى الأسى

$$(٨) \quad Y = aX^b \quad \text{or} \quad \log Y = \log a + b \log X$$

المنحنى الهندسى

$$(٩) \quad Y = ab^X + g$$

المنحنى الأسى المعدل

- (١٠) $Y = aX^b + g$ المنحنى الهندسي المعدل
- (١١) $Y = pq^{bX}$ or $\log Y = \log p + bX \log q = abX + g$ منحنى جومبرتز
- (١٢) $Y = pq^{bX} + h$ منحنى جومبرتز المعدل
- (١٣) $Y = \frac{1}{ab^X + g}$ or $\frac{1}{Y} = ab^X + g$ المنحنى اللوجيسى
- (١٤) $Y = a_0 + a_1(\log X) + a_2(\log X)^2$

لتحديد المنحنى الذى يجب استخدامه ، من المفيد الحصول على شكل انتشار المتغيرات المحولة ، على سبيل المثال ، إذا كان شكل انتشار $\log Y$ vs. X يظهر علاقة خطية فإن المعادلة التى يجب استخدامها هى المعادلة (٧) بينما إذا كان $\log Y$ vs. $\log X$ يظهر علاقة خطية فإن المعادلة تكون فى الصورة (٨) ، لتسهيل ذلك فإننا نستخدم ورق رسم بياني من نوع معين والذى يقسم أحد محوريه أو كلاهما تقسيماً لوغاريتمياً ، ونشر إليه بالورق البياني النصف لوغاريتمى أو بالورق البياني لوغاريتم - لوغاريتم .

التمهيد باليد فى توفيق المنحنى :

يمكن أن نستخدم الحكم الشخصى فى رسم منحنى تقريبي لتوفيق مجموعة من البيانات وهذا يسمى بطريقة التمهيد باليد فى توفيق المنحنى . فإذا كان نوع معادلة المنحنى معروفاً ، فن الممكن الحصول على الثوابت باختيار عدد من النقاط على المنحنى تساوى عدد الثوابت بالمعادلة . على سبيل المثال ، إذا كان المنحنى خط مستقيم ، فإننا نحتاج إلى نقطتين ، إذا كان المنحنى قطع مكافئ ، فإننا نحتاج إلى ثلاثة نقاط ، ولكن عيب هذه الطريقة أن الأشخاص المختلفين يحصلون على منحنيات ومعادلات مختلفة .

الخط المستقيم :

أبسط صورة للمنحنى التقريبي هو الخط المستقيم ، والذى يمكن كتابة معادلته كالاتى :

$$(١٥) \quad Y = a_0 + a_1X$$

بمعرفة أى نقطتين (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الخط ، فإن الثوابت a_0 ، a_1 يمكن تحديدها . والمعادلة المستنتجة للخط يمكن كتابتها :

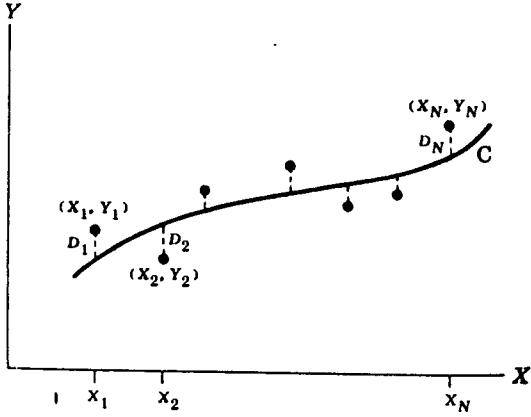
$$(١٦) \quad Y - Y_1 = \left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \right) (X - X_1) \text{ or } Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

حيث $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ تسمى ميل الخط ويمثل مقدار التغير فى Y مقسوماً على مقدار التغير فى X .

وعندما نكتب المعادلة فى الشكل (١٥) ، فإن الثابت a_1 هو الميل m . الثابت a_0 وهو قيمة Y عند $X = 0$ يسمى بالجزء المقطوع من المحور Y .

طريقة المربعات الصغرى :

لتلاق الحكم الشخصى فى تكوين الخطوط ، القطاعات المكافئة أو غيرها من المنحنيات التقريبية فن الضرورى الاتفاق على تعريف « أفضل توفيق للخط » ، « أفضل توفيق للقطع المكافئ » ، وهكذا .



بهدف الحصول على تعريف ممكن ، اعتبر الشكل ١٣-٣ حيث نقط البيانات هي النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$

لقيمة معينة من قيم X ، ولتكن X_1 ، سيكون هناك فرق بين القيمة Y_1 والقيمة المقابلة كما هي محددة بالمنحنى C كما هو موضح بالشكل فإننا نمر عن هذا الفرق بالرمز D_1 ، والتي يسمى أحياناً بالانحراف ، الخطأ أو الباق وقد يكون

شكل ١٣ - ٣

موجباً أو سالباً أو صفراً . بنفس الأسلوب نحصل لقيم X_2, \dots, X_N على الانحرافات المتقابلة D_2, \dots, D_N .

لقياس « جودة التوفيق » للمنحنى C للبيانات المعطاة نستخدم الكمية $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$ فإذا كانت هذه الكمية صغيرة فإن التوفيق جيد ، وإذا كانت كبيرة فإن التوفيق يكون سيئ . لهذا نعطى التعريف التالى :

تعريف : من بين جميع المنحنيات التقريبية لمجموعة من البيانات ، المنحنى الذى له خاصية أن $D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$ نهاية صغرى (أصغرممكن) .

يسمى أفضل منحنى يمكن توفيقه .

المنحنى الذى له هذه الخاصية يقال أنه يوفق البيانات بمفهوم المربعات الصغرى ويسمى بمنحنى المربعات الصغرى . فالخط الذى له هذه الخاصية يسمى بخط المربعات الصغرى ، والقطع المكافئ الذى له هذه الخاصية يسمى قطع مكافئ المربعات الصغرى ، وهكذا .

من المعتاد استخدام التعريف السابق عندما يكون X هو المتغير المستقل و Y هو المتغير التابع..إذا كان X هو المتغير التابع فإننا نعدل التعريف بحيث نعتبر الانحرافات الرأسية بدلا من الانحرافات الأفقية ، والتي تعادل تغير محورى Y ، X هذان التعريفان يؤديان بشكل عام إلى منحنيات مربعات صغرى مختلفة . مالم يذكر خلاف ذلك فإننا سوف نعتبر Y هو المتغير التابع و X هو المتغير المستقل .

ومن الممكن تعريف منحنى مربعات صغرى آخر باعتبار البعد العمودى من كل نقطة من نقط البيانات إلى المنحنى بدلا من الأبعاد الرأسية والأفقية . ولكن هذا التعريف لا يستخدم بكثرة .

خط المربعات الصغرى :

معادلة الخط التقريبي للمربعات الصغرى لمجموعة من النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ هي

$$(18) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_0 ، a_1 بحل المعادلتين الآتيتين :

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} \Sigma Y &= a_0 N + a_1 \Sigma X \\ \Sigma XY &= a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 \end{aligned} \right\}$$

والتي تسمى بالمعادلات الاعتدالية لخط المربعات الصغرى (١٨).

ويمكن الحصول على قيمة الثوابت a_0 ، a_1 بالمعادلة (١٩) ، وإذا أردنا ، بالصيغ

$$(20) \quad a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} \quad a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

المعادلات الاعتدالية (١٩) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن المعادلة الأولى يمكن الحصول عليها بتجميع طرفي المعادلة (١٨) ، أى ، $\Sigma Y = \Sigma(a_0 + a_1 X) = a_0 N + a_1 \Sigma X$ ، بينما المعادلة الثانية يمكن الحصول عليها بضرب طرفي المعادلة (١٨) أولاً في X ثم تجميع طرفي لمعادلة $\Sigma XY = \Sigma X(a_0 + a_1 X) = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2$. لاحظ أن هذه ليست خطوات لإثبات المعادلة الاعتدالية ولكنها ببساطة أسلوب لتذكر هذه المعادلات . لإثبات هذه العلاقة تستخدم التفاضل ، أنظر الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠ .

لاحظ كذلك أنه في (١٩) و (٢٠) استخدمنا الرموز المختصرة $\Sigma X, \Sigma XY$ ، وغيرها ، بدلا من $\sum_{j=1}^N X_j, \sum_{j=1}^N X_j Y_j$

وغیرها .

ويمكن أحيانا اختصار العمل في إيجاد خط المربعات الصغرى بتحويل البيانات بحيث $y = Y - \bar{Y}$ ، $x = X - \bar{X}$ ويمكن أحيانا اختصار العمل في إيجاد خط المربعات الصغرى بتحويل البيانات بحيث $y = Y - \bar{Y}$ ، $x = X - \bar{X}$ وهذا تكتب معادلة خط المربعات الصغرى كالآتي (أنظر المسألة ١٣ - ١٥)

$$(21) \quad y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} \right) x$$

وعلى وجه الخصوص إذا كانت X تحقق العلاقة $\Sigma X = 0$ ، أى أن $\bar{X} = 0$ فإن

$$(22) \quad Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} \right) X$$

من هذه المعادلة يتضح أن خط المربعات الصغرى يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) وتسمى مركز القوة أو مركز شغل البيانات

إذا أخذنا المتغير X كمتغير تابع بدلا من كونه متغير مستقل ، فإننا نكتب المعادلة (١٨) على صورة $X = b_0 + b_1 Y$ فإن النتائج السابقة تنطبق إذا أبدلنا X بدلا من Y وأحللنا b_1 ، b_0 بدلا من a_0 ، a_1 على الترتيب . خط المربعات الذى سنحصل عليه فى هذه الحالة لن يكون بشكل عام مثل الذى حصلنا عليه أعلاه (أنظر المسائل ١٣ - ١١ و ١٣ - ١٥) . (٥) .

العلاقات غير الخطية :

العلاقات غير الخطية يمكن فى بعض الأحيان تحويلها إلى علاقات خطية باستخدام تحويلة مناسبة للمتغيرات . (أنظر المسألة ١٣ - ٢١) .

المربعات الصغرى للقطع المكافئ :

معادلة القطع المكافئ التقريبي للمربعات الصغرى لمجموعة من النقط $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_N, Y_N)$ هى

$$(23) \quad Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

حيث تتحدد قيمة الثوابت a_0, a_1, a_2 بحل المعادلات التالية آنياً

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y &= a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{aligned} \right\}$$

والتي تسمى بالمعادلات الاعتدالية لقطع مكافئ المربعات الصغرى .

المعادلات (٢٤) يمكن تذكرها بسهولة بملاحظة أن هذه المعادلات يمكن الحصول عليها بضرب المعادلة (٢٣) فى $1, X, X^2$ على الترتيب والتجميع على الطرفين للمعادلات الناتجة . وهذا الأسلوب يمكن تسميته للحصول على المعادلات الاعتدالية لمنحنى المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة ، منحنى المربعات الصغرى من الدرجة الرابعة وبشكل عام أى من منحنيات المربعات الصغرى المقابلة للمعادلة (٥) .

وكما هو الحال فى خط المربعات الصغرى ، فإنه يمكن تبسيط المعادلة (٢٤) باختيار X بحيث تكون $\sum X = 0$. ويمكن أيضاً إجراء التبسيط باختيار المتغيرات الجديدة $\bar{x} = X - \bar{X}$ ، $\bar{y} = Y - \bar{Y}$.

الانحدار :

فى أغلب الأحيان يكون المطلوب هو تقدير قيمة للمتغير Y المقابلة لقيمة معطاة للمتغير X وذلك باستخدام بيانات مأخوذة من عينة . ويمكن أن يتم ذلك بتقدير قيمة Y من منحنى المربعات الصغرى التى توفى بيانات العينة . المنحنى الناتج يسمى منحنى انحدار Y على X حيث أن Y تقدر من X .

إذا كان المطلوب هو تقدير قيمة X من قيمة معطاة لـ Y فإننا نستخدم منحنى الانحدار X على Y ، والتي تتضمن تبديل المتغيرات في شكل الانتشار بحيث تكون X هو المتغير التابع و Y هي المتغير المستقل . وهذه تكافئ أحلال الانحرافات الرأسية في تعريف منحنيات المربعات الصغرى في صفحة ٣٥٢ بالانحرافات الأفقية .

وبشكل عام فإن خط أو منحنى انحدار Y على X يماثل خط أو منحنى انحدار X على Y .

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

إذا كان المتغير المستقل X هو الزمن ، فإن البيانات تظهر قيم X عند أوقات مختلفة ، تسمى البيانات المربطة حسب الزمن بالسلاسل الزمنية . ويسمى خط أو منحنى انحدار Y على X في هذه الحالة خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام . ويستخدم غالباً لأهداف التقدير أو التنبؤ .

مسائل تتضمن أكثر من متغيرين :

المسائل المتضمنة أكثر من متغيرين يمكن معالجتها بأسلوب مماثل لهذا الذي استخدم في حالة المتغيرين . على سبيل المثال ، قد تكون هناك علاقة بين المتغيرات الثلاثة X, Y, Z والتي يمكن وضعها بالمعادلة .

$$(٢٥) \quad Z = a_0 + a_1X + a_2Y$$

وتسمى معادلة خطية في المتغيرات X, Y, Z .

هذه المعادلات يمكن تمثيلها بمستوى في نظام للاحداثيات المتعامدة ذو ثلاثة أبعاد والنقط الفعلية للبينة $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots, (X_N, Y_N, Z_N)$ قد « تنتشر » بصورة ليست متباعدة من هذا المستوى . والذي يمكن تسميته بالمستوى التقريبي .

بتعميم طريقة المربعات الصغرى ، يمكن أن نتكلم عن مستوى المربعات الصغرى الذي يقرب البيانات . فإذا كنا نقدر Z من قيم معطاة لـ X و Y ، فهذا يسمى مستوى انحدار Z على X و Y . المعادلات الاعتدالية المقابلة لمستوى المربعات الصغرى (٢٥) تعطى كما يلي :

$$(٢٦) \quad \left. \begin{aligned} \sum Z &= a_0N + a_1 \sum X + a_2 \sum Y \\ \sum XZ &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum XY \\ \sum YZ &= a_0 \sum Y + a_1 \sum XY + a_2 \sum Y^2 \end{aligned} \right\}$$

ويمكن تذكرها بأننا نحصل عليها بضرب (٢٥) في $1, X, Y$ بالتتالي ثم التجميع .

ويمكن أيضاً اعتبار معادلات أكثر تعقيداً من (٢٥) . وهذه تمثل سطوح الانحدار وإذا زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة ، فإن التمثيل الهندسي لا يمكن استخدامه حيث أن هذا يتطلب فراغاً ذا أربعة ، خمسة . . . أبعاد .

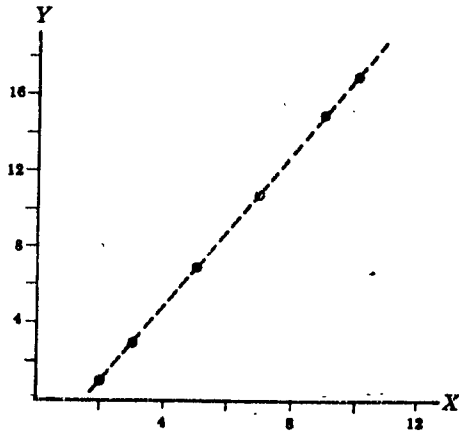
المشاكل التى تتضمن تقدير متغير من متغيرين أو أكثر تسمى مشاكل الانحدار المتعدد وسوف يتم دراستها بالتفصيل فى الفصل الخامس عشر .

مسائل محلولة

الخطوط المستقيمة :

الجدول ١٣ - ١

X	2	3	5	7	9	10
Y	1	3	7	11	15	17



شكل ١٣ - ١

١٣ - ١ (أ) ارسم خطاً مستقيماً يقرب البيانات بالجدول ١٣ - ١ . (ب) أوجد معادلة هذا الخط .

الحل :

(أ) ضع النقاط

(2,1), (3,3), (5,7), (7,11), (9,15), (10,17)

فى نظام للاحداثيات المتعامدة كما هو موضح بالشكل ١٣ - ١ . من الواضح من هذا الشكل أن جميع النقاط تقع على خط مستقيم (يظهر على شكل خطوط منقطعة) . أى أن الخط مستقيم يوفق هذه البيانات تماماً .

(ب) لتحديد معادلة الخط المعروف بما يلى :

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

فإنه يمكن تحديد نقطتين . اختر النقطتين (2, 1) و (3, 3) على سبيل المثال .

لنقطة (2, 1) ، $X = 2$ ، $Y = 1$. بالتعويض بهذه النقاط فى ١ ينتج

$$(٢) \quad 1 = a_0 + 2a_1$$

كذلك للنقطة (3, 3) ، $X = 3$ ، $Y = 3$ ، بالتعويض فى (١) ينتج

$$(٣) \quad 3 = a_0 + 3a_1$$

بحل (٢) و (٣) آنياً نجد أن $a_0 = -3$ ، $a_1 = 2$ والمعادلة المطلوبة هى

$$Y = 2X - 3 \quad \text{أو} \quad Y = -3 + 2X$$

كوسيلة للمراجعة ، يمكن أن نثبت أن الخط $(5, 7)$ ، $(7, 11)$ ، $(9, 15)$ ، $(10, 17)$ تقع كذلك على الخط .

١٢-٢ في المسألة ١٣-١ أوجد (أ) Y عند $X = 4$ (ب) Y عند $X = 15$ (ج) Y عند $X = 0$ (د) X عند $Y = 7.5$ (هـ) X عند $Y = 0$ (و) الزيادة في Y المقابلة لزيادة X بوحدة واحدة .

الحل :

نفترض أن نفس العلاقة $Y = 2X - 3$ تتحقق لقيم X و Y غير تلك الموضحة في الجدول ١٣-١ بالمسألة ١٣-١

(أ) إذا كانت $X = 4$ فإن $Y = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X الواقعة بين قيمتين معينتين و X فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطي .

(ب) إذا كانت $X = 15$ فإن $Y = 2(15) - 3 = 30 - 3 = 27$. وبما أننا نحصل على قيمة Y المقابلة لقيمة X خارج قيم X المعطاة ، فإن هذه العملية تسمى بالاستكمال الخطي الخارجي .

(ج) إذا كانت $X = 0$ ، $Y = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$. فإن قيمة Y عند $X = 0$ تسمى الجزء المقطوع من محور Y وهي قيمة Y عند تقاطع الخط (إذا ما كان ذلك ضرورياً) مع محور Y .

(د) إذا كانت $Y = 7.5$ فإن $7.5 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 7.5 + 3 = 10.5$ ، و $X = 10.5/2 = 5.25$.

(هـ) إذا كانت $Y = 0$ فإن $0 = 2X - 3$ ، إذن $2X = 3$ و $X = 1.5$ وهي قيمة X عند $Y = 0$ وتسمى الجزء المقطوع من محور X . وهي قيمة X عند نقطة تقاطع الخط (إذا ما كان ذلك ضرورياً) مع محور X .

(و) إذا زادت X وحدة من 2 إلى 3 فإن Y تزيد من 1 إلى 3 أى تتغير بمقدار وحدتين .

إذا زادت X من 2 إلى 10 ، أى ، $8 = (10 - 2)$ وحدات ، فإن Y تزيد من 1 إلى 17 أو $16 = (17 - 1)$ وحدة . إذن Y تزيد 16 وحدة مقابلة لزيادة 8 وحدات في X أو أنها تزيد وحدتين مقابل زيادة وحدة في X .

بشكل عام إذا كانت ΔY تغير عن التغير في Y الناتج من تغير في X مقداره ΔX فإن التغير في Y مقابل تغير وحدة واحدة في X هو $\Delta Y / \Delta X = 2$. وهذا يسمى ميل الخط ويساوى دائماً a_1 في المعادلة $Y = a_0 + a_1 X$. الثابت a_0 يسمى الجزء المقطوع من محور الصادات للخط (أنظر الجزء (ج)) .

الأسئلة السابقة يمكن إجابتها بالرجوع مباشرة إلى الشكل ١٣-٤ .

١٣-٣ (أ) وضع أن معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقط (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) يضى بالمعادلة

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

(ب) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر خلال النقط $(2, -3)$ و $(4, 5)$

الحل :

(أ) معادلة الخط المستقيم هى :

$$Y = a_0 + a_1 X \quad (1)$$

بما أن (X_1, Y_1) تقع على الخط فإن

$$Y_1 = a_0 + a_1 X_1 \quad (2)$$

بما أن (X_2, Y_2) تقع على الخط فإن

$$Y_2 = a_0 + a_1 X_2 \quad (3)$$

يطرح المعادلة (٢) من (١) فإن

$$Y - Y_1 = a_1(X - X_1) \quad (4)$$

يطرح المعادلة (٢) من (٣) ،

$$a_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{أو} \quad Y_2 - Y_1 = a_1(X_2 - X_1)$$

بالتعويض بقيمة a_1 هذه فى (٤) نحصل على $Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$ وهو المطلوب
الكىة $\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ يرمز لها غالباً بالحرف m ، وتمثل التغير فى Y مقسوماً على التغير المقابل
له فى X وهو ميل الخط . وبهذا يمكن كتابة المعادلة المطلوبة فى الصورة $Y - Y_1 = m(X - X_1)$.

(ب) الطريقة ١ : باستخدام النتيجة فى (أ)

بالمقابلة للنقطة الأولى $(2, -3)$ فإن $X_1 = 2$ ، $Y_1 = -3$.

بالمقابلة للنقطة الثانية $(4, 5)$ فإن $X_2 = 4$ ، $Y_2 = 5$

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{5 - (-3)}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{إذن الميل}$$

والمعادلة المطلوبة هى $Y - Y_1 = m(X - X_1)$ or $Y - (-3) = 4(X - 2)$

والتي يمكن كتابتها فى الصورة $Y + 3 = 4(X - 2)$ أو $Y = 4X - 11$

الطريقة ٢ : باستخدام طريقة المسألة ١٣-١ (ب) .

معادلة الخط المستقيم هى $Y = a_0 + a_1 X$

بما أن النقطة $(2, -3)$ على الخط فإن (١)

$$-3 = a_0 + 2a_1$$

بما أن النقطة $(4, 5)$ على الخط فإن (٢)

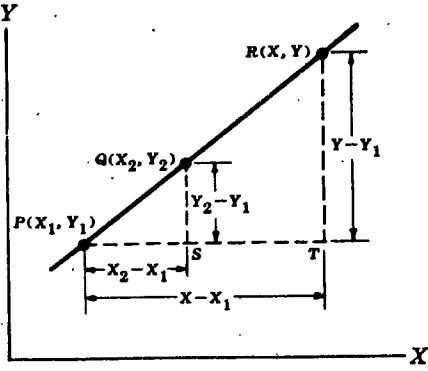
$$5 = a_0 + 4a_1$$

بحل (١) ، (٢) آنياً ، نحصل على $a_0 = -11$ و $a_1 = 4$ وبهذا فإن المعادلة المطلوبة هى

$$Y = -11 + 4X \quad \text{أو} \quad Y = 4X - 11$$

١٣- ٤ فسر بالرسم خطوات حل المسألة ١٣- ٣ (أ)

الحل :



شكل ١٣- ٤

في الشكل ١٣- ٤ وضعنا الخط الذي يمر خلال النقط P و Q والتي كانت إحداثياتها (X_1, Y_1) و (X_2, Y_2) على الترتيب . النقطة R والتي إحداثياتها (X, Y) تعبر عن أى نقطة أخرى على الخط .

من المثلثين المتشابهين PRT ، QPS

نجد أن

$$(١) \quad \frac{RT}{TP} = \frac{QS}{SP} \text{ or } \frac{Y - Y_1}{X - X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

بضرب الطرفين في $X - X_1$

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

وهي المعادلة المطلوبة للخط .

لاحظ أن كلا النسبتين في (١) هو الميل m وبهذا فإنه يمكن كتابة :

$$Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

١٣- ٥ أوجد (أ) الميل ، (ب) المعادلة (ج) الجزء المقطوع من محور Y . (د) الجزء المقطوع من محور X ، للخط الذي يمر بالنقط $(1, 5)$ ، $(4, -1)$.

الحل :

$$(١) \quad (X_1 = 1, Y_1 = 5) \text{ و } (X_2 = 4, Y_2 = -1)$$

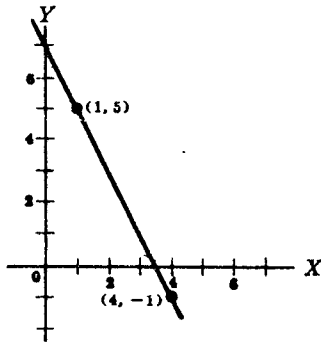
إذن

$$m = \text{الميل} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{-1 - 5}{4 - 1} = \frac{-6}{3} = -2$$

والإشارة السالبة في الميل تشير إلى أنه

بزيادة X فإن Y تتناقص ، كما هو موضح

بالشكل ١٣ - ٦ .



شكل ١٣ - ٦

(ب) معادلة الخط هي

$$Y - 5 = -2(X - 1) \quad \text{أو} \quad Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

أي

$$Y = 7 - 2X \quad \text{أو} \quad Y - 5 = -2X + 2$$

وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها باستخدام الطريقة الثانية في المسألة ١٣ - ٣ (ب) .

(ج) الجزء المقطوع من محور Y ، وهو قيمة Y عند $X = 0$ ، يمتد بالمعادلة $Y = 7 - 2(0) = 7$

وهذه يمكن أيضاً الحصول عليها مباشرة من الرسم .

(د) الجزء المقطوع من محور X ، وهو قيمة X عند $Y = 0$ نحصل عليه بالتعويض عن $Y = 0$ في المعادلة

$$Y = 7 - 2X \quad \text{، وعلى ذلك فإن} \quad 0 = 7 - 2X \quad \text{أو} \quad 2X = 7 \quad \text{أي} \quad X = 3.5$$

و هذا يمكن ملاحظته أيضاً مباشرة من الرسم .

١ - ٦ أوجد معادلة الخط الذي يمر خلال النقطة (4, 2) والذي يوازي الخط $2X + 3Y = 6$.

الحل :

إذا كان الخطان متوازيين ، فإن ميلهما متساو . من المعادلة $2X + 3Y = 6$ فإن $3Y = 6 - 2X$ أو

$$Y = 2 - \frac{2}{3}X \quad \text{بحيث أن ميل الخط هو} \quad m = -\frac{2}{3} \quad \text{. إذن معادلة الخط المطلوبة هي}$$

$$Y - 2 = -\frac{2}{3}(X - 4) \quad \text{أو} \quad Y - Y_1 = m(X - X_1)$$

والتي يمكن أيضاً كتابتها على الصورة $2X + 3Y = 14$

طريقة أخرى :

أي خط مواز لـ $2X + 3Y = 6$ معادلته تكون على الصورة $2X + 3Y = c$ ونحصل على c ،

اعتبر $X = 4$ ، $Y = 2$. إذن $c = 2(4) + 3(2) = 14$ أو $c = 14$ والمعادلة المطلوبة هي

$$2X + 3Y = 14$$

١٣-٧ أوجد معادلة الخط الذى ميله هو 4- والجزء المقطوع من محور Y هو 16.

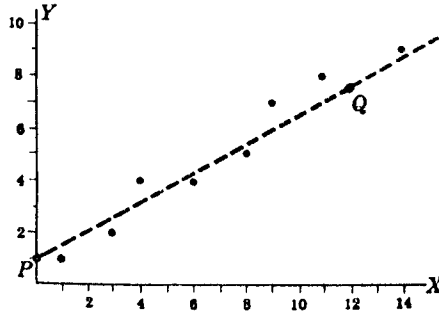
الحل :

فى المعادلة $Y = a_0 + a_1 X$ ، $a_0 = 16$ هو الجزء المقطوع من محور Y و $a_1 = -4$ هو الميل .

إذن المعادلة المطلوبة هى $Y = 16 - 4X$

جدول ١٣-٢

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9



شكل ١٣-٧

١٣-٨ (أ) كون خطأ مستقيماً يقرب البيانات بالجدول ١٣-٢ .

(ب) أوجد معادلة هذا الخط .

الحل :

(أ) وقع النقط ، (1, 1), (3, 2), (4, 4), (6, 4), (8, 5), (9, 7), (11, 8), (14, 9)

على نظام الأحداثيات

المتعامدة كما فى الشكل ١٣-٧

الخط المستقيم الذى يقرب البيانات يتم رسمه

بالتمهيد . باليد فى الشكل . كطريقة لحذف

عامل الحكم الشخصى ، أنظر : المسألة

١٣-١١ والى تستخدم طريقة المربعات الصغرى .

(ب) للحصول على معادلة الخط الذى رسمه فى (أ) ، اختر أى نقطتين على الخط مثل P ، Q على سبيل المثال .

أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من الرسم هى بالتقريب (0, 1) ، (12, 7.5)

وتكون معادلة الخط هى $Y = a_0 + a_1 X$. باستخدام النقط (0, 1) ، (12, 7.5) نحصل على الترتيب على

$$1 = a_0 + a_1(0) \quad (١)$$

$$7.5 = a_0 + 12a_1 \quad (٢)$$

من (١) $a_0 = 1$ ، إذن من (٢) $a_1 = 6.5/12 = 0.542$.

وهذا فإن المعادلة المطلوبة هى $Y = 1 + 0.542X$

طريقة أخرى :

$$Y = 1 + 0.542X \text{ أو } Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1), Y - 1 = \frac{7.5 - 1}{12 - 0}(X - 0), Y - 1 = 0.542X$$

١٣-٩ (أ) قارن قيم Y التي تحصل عليها من الخط التقريبي مع تلك الموجودة في الجدول ١٣-٢ بالمسألة ١٣-٨

(ب) ماهي قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ ؟

الحل :

(أ) إذا كانت $X = 1$ فإن $Y = 1 + 0.542(1) = 1.542$ أو 1.5. وب نفس الصورة ، يمكن الحصول على قيم Y المقابلة لقيم X

الأخرى ونشير إلى قيم Y هذه المقدرة من المعادلة $Y = 1 + 0.54X$ بالرمز Y_{est} . هذه القيم

مشار إليها بالجدول ١٣-٣ مع القيم الفعلية للبيانات في الجدول ١٣-٢ .

الجدول ١٣-٣

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9
Y_{est}	1.5	2.6	3.2	4.3	5.3	5.9	7.0	8.6

(ب) قيمة Y المقدرة عند $X = 10$ هي $Y = 1 + 0.542(10) = 6.42$ أو 6.4

١٣-١٠ الجدول ١٣-٤ يوضح القوة إلى أقرب كيلو وات والسرعة القصوى إلى أقرب km/h لعينة من 12 سيارة سباق

مأخوذة بصورة عشوائية من توكيل سيارات

(أ) ارسم شكل الانتشار لهذه البيانات .

(ب) ارسم الخط الذي يقرب هذه البيانات .

(ج) أوجد معادلة الخط المرسوم في (ب) .

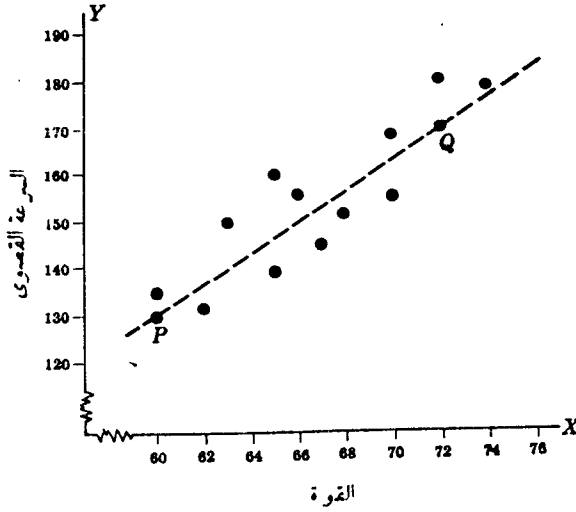
(د) قدر السرعة القصوى للعربة التي قوتها 63 kw .

(هـ) قدر قوة العربة التي من المعروف أن سرعتها القصوى 168 km/h .

جدول ١٣-٤

70	63	72	60	66	70	74	65	62	67	65	68	القوة
155	150	180	135	156	168	178	160	132	145	139	152	السرعة القصوى

الحل :



شكل ١٣ - ٨

(أ) نحصل على شكل الانتشار ، الموضع ،

بالشكل ١٣ - ٨ ، بتوقيع النقط
(70,155), (63,150), ..., (68,152)

(ب) الخط المستقيم الذى يقرب البيانات موضع
بالشكل على صورة خطوط متقطعة .
هذا الخط أحد الخطوط الكثيرة التى يمكن
يمكن رسمها .

(ج) اختر أى نقطتين على الخط المرسوم فى

(ب) : مثل P, Q على سبيل المثال .

أحداثيات هذه النقط كما يمكن قراءتها من ،
هى على وجه التقريب (72, 170) ،
(60,130)

إذن

$$Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}(X - X_1)$$

$$Y - 130 = \frac{170 - 130}{72 - 60}(X - 60)$$

$$Y = \frac{10}{3}X - 70$$

(د) إذا كانت $X=63$ فإن $Y = \frac{10}{3}(63) - 70 = 140 \text{ km/h}$

(ج) إذا كانت $Y = 168$ فإن $168 = \frac{10}{3}X - 70, \frac{10}{3}X = 238$ و $X = 71.4 \text{ or } 71 \text{ kW}$

خط المربعات الصغرى :

١١-١٤ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٣ - ٨ باستخدام

(أ) X كتغير مستقل ، (ب) X كتغير تابع

الحل :

(أ) معادلة الخط هى $Y = a_0 + a_1X$. والمعادلات الاعتنالية هى

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{array} \right\}$$

يمكن ترتيب خطوات العمل لحساب المجاميع كما في الجدول ١٣ - هـ . عل الرغم من أن العمود الأخير غير مطلوب لهذا الجزء من المسألة . فإننا قد أضفناه لاستخدامه في الجزء (ب) .

جدول ١٣ - هـ

X	Y	X^2	XY	Y^2
1	1	1	1	1
3	2	9	6	4
4	4	16	16	16
6	4	36	24	16
8	5	64	40	25
9	7	81	63	49
11	8	121	88	64
14	9	196	126	81
$\Sigma X = 56$	$\Sigma Y = 40$	$\Sigma X^2 = 524$	$\Sigma XY = 364$	$\Sigma Y^2 = 256$

أ أن هناك ثمانية أزواج من قيم X, Y فإن $N = 8$ والمعادلات الاعتدالية تصبح .

$$\begin{cases} 8a_0 + 56a_1 = 40 \\ 56a_0 + 524a_1 = 364 \end{cases}$$

بالحل آتياً ، $a_0 = \bar{y}_1$ أو $0.545, a_1 = \bar{r}_1$ or 0.636 وخط المربعات الصغرى هي

$$Y = 0.545 + 0.636X \text{ أو } Y = \bar{r}_1 + \bar{r}_1 X$$

طريقة أخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(40)(524) - (56)(364)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{6}{11} \text{ or } 0.545$$

$$a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{7}{11} \text{ or } 0.636$$

إذن $Y = 0.545 + 0.636X$ ، أو $Y = a_0 + a_1 X$ كما سبق

(ب) إذن اعتبرنا X هو المتغير التابع و Y هو المتغير المستقل ، فإن معادلة خط المربعات الصغرى هو

$$\begin{cases} \Sigma X = b_0 N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY = b_0 \Sigma Y + b_1 \Sigma Y^2 \end{cases} \text{ هي } X = b_0 + b_1 Y \text{ والمعادلات الاعتدالية هي}$$

إذا باستخدام الجدول ١٣ - ب ، فإن المعادلات الاعتدالية تصبح

$$\begin{cases} 8b_0 + 40b_1 = 56 \\ 40b_0 + 256b_1 = 364 \end{cases}$$

$$b_0 = -\frac{1}{2} \text{ or } -0.50, b_1 = \frac{3}{2}$$

ومنها

هذه القيم يمكن أن نحصل عليها من الصيغ

$$b_0 = \frac{(\sum X)(\sum Y^2) - (\sum Y)(\sum XY)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{(56)(256) - (40)(364)}{(8)(256) - (40)^2} = -0.50$$

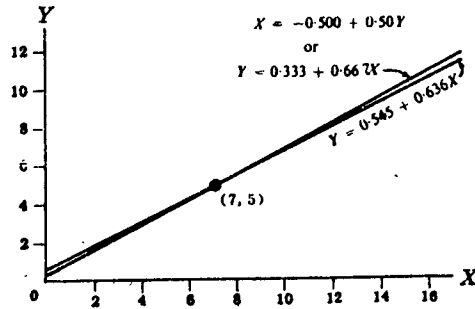
$$b_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(256) - (40)^2} = 1.50$$

وبهذا فإن معادلة المربعات الصغرى هي $X = -0.50 + 1.50Y$ أو $X = b_0 + b_1Y$

لاحظ أنه بحل هذه المعادلة في Y نحصل على $Y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X$ أو $Y = 0.333 + 0.667X$ وهي ليست مثل الخط الذي حصلنا عليه في (أ) .

١٣ - ١٢ ارسم الخطين اللذين حصلنا عليهما في المسألة السابقة

الحل :



شكل ١٣ - ٩

الرسم البياني للخطين $Y = 0.545 + 0.636X$

و $X = -0.500 + 1.50Y$ موضع

بالشكل ١٣ - ٩ .

لاحظ أن الخطين من الناحية العملية متفقان ،

هذا دليل على أن البيانات توصف وصفاً جيداً بالعلاقة الخطية .

الخط الذي حصلنا عليه في (أ) يسمى بخط انحدار Y على X ويستخدم لتقدير Y لقيم X المعطاة ، أما الخط الذي حصلنا عليه في (ب) يسمى بخط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X لقيم Y المعطاة .

١٣ - ١٢ (أ) وضع أن خطي المربعات الصغرى اللذين حصلنا عليهما في ١٣ - ١١ يتقاطعان في النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

(ب) قدر قيمة Y عند $X = 12$ (ج) قدر قيمة X عند $Y = 3$

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{56}{8} = 7, \bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{40}{8} = 5$$

(أ) النقطة $(7, 5)$ تقع على خط $Y = 0.545 + 0.636X$ ، أو ، أكثر دقة ، $Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}X$ ،

حيث أن $5 = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}(7)$. النقطة $(7, 5)$ تقع على الخط $X = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}Y$ ، حيث أن

$$7 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}(5)$$

طريقة أخرى :

معادلة الخطين هما $Y = \frac{6}{11} + \frac{7}{11}X$ و $X = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}Y$

بحل المعادتين آنياً ، نجد أن $X = 7, Y = 5$. هذا فإن الخطين يتقاطعان في النقطة (7, 5) .

(ب) بوضع $X = 12$ في خط انحدار Y (المسألة ١٣ - ١١) فإن $Y = 0.545 + 0.636(12) = 8.2$.

(ج) بوضع $Y = 3$ في خط انحدار X (المسألة ١٣ - ١١) فإن $X = -0.50 + 1.50(3) = 4.0$.

١٣ - ١٤ أثبت أن خط المربعات الصغرى يمر دائماً خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

الحل :

المسألة ١ : X هو المتغير المستقل

معادلة المربعات الصغرى هي (١) $Y = a_0 + a_1X$

معادلة اعتدالية لخط المربعات الصغرى هي (٢) $\Sigma Y = a_0N + a_1 \Sigma X$

بقسمة طرفي المعادلة (٢) على N يعطى (٣) $\bar{Y} = a_0 + a_1\bar{X}$

ب طرح (٣) من (١) ، فإن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته

$$(٤) \quad Y - \bar{Y} = a_1(X - \bar{X})$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y})

المسألة ٢ : Y هو المتغير المستقل .

نسير على نفس خطوات الحالة (١) مع تبديل X و Y والثوابت a_0 و a_1 بالثوابت b_0 و b_1

على الترتيب نجد أن خط المربعات الصغرى يمكن كتابته كالتالي :

$$(٥) \quad X - \bar{X} = b_1(Y - \bar{Y})$$

وهذا يوضح أن الخط يمر خلال النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

لاحظ أن الخطين (٤) و (٥) ليسا متطابقين ، ولكنهما يتقاطعان في النقطة (\bar{X}, \bar{Y}) .

١٣ - ١٥ اعتبر أن X هو المتغير المستقل ، وضح أن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب في الصورة

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x, \quad y = \left(\frac{\Sigma xY}{\Sigma x^2} \right) x$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$.

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0$ وضح أن خط الانحدار في (أ) يمكن كتابته على صورة

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$$

(ت) اكتب معادلة خط المربعات الصغرى المقابلة للجزء (أ) إذا كان Y هو المتغير المستقل

(ث) أثبت أن الخطين في (١) و (٢) ليسا بالضرورة متماثلين

الحل :

(أ) المعادلة (٤) بالمسألة ١٣ - ١٤ يمكن كتابتها في الصورة $y = a_1 x$ حيث $y = Y - \bar{Y}$ و $x = X - \bar{X}$. كذلك من حل المعادلات الاعتيادية آنياً (أنظر صفحة ٣٥٣) ، نحصل على .

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{N \sum (x + \bar{X})(y + \bar{Y}) - \{ \sum (x + \bar{X}) \} \{ \sum (y + \bar{Y}) \}}{N \sum (x + \bar{X})^2 - \{ \sum (x + \bar{X}) \}^2} \\ &= \frac{N \sum (xy + x\bar{Y} + \bar{X}y + \bar{X}\bar{Y}) - \{ \sum x + N\bar{X} \} \{ \sum y + N\bar{Y} \}}{N \sum (x^2 + 2x\bar{X} + \bar{X}^2) - \{ \sum x + N\bar{X} \}^2} \\ &= \frac{N \sum xy + N\bar{Y} \sum x + N\bar{X} \sum y + N^2 \bar{X}\bar{Y} - \{ \sum x + N\bar{X} \} \{ \sum y + N\bar{Y} \}}{N \sum x^2 + 2N\bar{X} \sum x + N^2 \bar{X}^2 - \{ \sum x + N\bar{X} \}^2} \end{aligned}$$

ولكن $\sum x = \sum (X - \bar{X}) = 0$ و $\sum y = \sum (Y - \bar{Y}) = 0$. بهذا يمكن تبسيط ما سبق إلى

$$a_1 = \frac{N \sum xy + N^2 \bar{X}\bar{Y} - N^2 \bar{X}\bar{Y}}{N \sum x^2 + N^2 \bar{X}^2 - N^2 \bar{X}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

ويمكن أيضاً كتابتها كما يلي :

$$a_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum x(Y - \bar{Y})}{\sum x^2} = \frac{\sum xY - \bar{Y} \sum x}{\sum x^2} = \frac{\sum xY}{\sum x^2}$$

إذن خط المربعات الصغرى هو $y = a_1 x$ ، أى $y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x$ ، $y = \left(\frac{\sum xY}{\sum x^2} \right) x$ ،

(ب) إذا كانت $\bar{X} = 0$ ، $x = X - \bar{X} = X$ ،

$$y = Y - \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X \text{ ، } y = \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X \text{ ، } y = \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$$

طريقة أخرى :

المعادلات الاعتيادية لخط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ هي

$$\sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \text{ ، } \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X$$

إذا كانت $\bar{X} = (\sum X) / N = 0$ فإن $\sum X = 0$ وتصبح المعادلات الاعتيادية كالآتي :

$$\sum XY = a_1 \sum X^2 \text{ و } \sum Y = a_0 N$$

$$a_1 = \frac{\sum XY}{\sum X^2} \quad \text{أو} \quad a_0 = \frac{\sum Y}{N} = \bar{Y} \quad \text{ومنها}$$

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X \quad \text{أو} \quad Y = a_0 + a_1 X \quad \text{وهذا فإن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي}$$

$$x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2} \right) y \quad \text{(ج) بإبدال } X \text{ و } Y \text{ أو } x \text{ و } y \text{ يمكن أن نثبت كما في (أ) أن}$$

$$y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x \quad \text{(د) من (أ) ، خط المربعات الصغرى هو (١)}$$

$$\text{من (ج) ، خط المربعات الصغرى هو } x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2} \right) y \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\sum y^2}{\sum xy} \right) x \quad (2)$$

$$\text{بما أن } \frac{\sum xy}{\sum x^2} \neq \frac{\sum y^2}{\sum xy} \quad \text{، بشكل عام ، فإن خطى المربعات الصغرى (١) ، (٢) مختلفان بشكل}$$

عام . لاحظ أنهما يتقاطعان عند $x = 0$ و $y = 0$ أى عند النقطة (\bar{x}, \bar{y}) .

١٣-١٦ إذا كانت $X' = X + A$ و $Y' = Y + B$ حيث A و B ثوابت ، أثبت أن

$$a_1 = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{N \sum X'Y' - (\sum X')(\sum Y')}{N \sum X'^2 - (\sum X')^2} = a_1'$$

الحل :

$$x' = X' - \bar{X}' = (X + A) - (\bar{X} + A) = X - \bar{X} = x$$

$$y' = Y' - \bar{Y}' = (Y + B) - (\bar{Y} + B) = Y - \bar{Y} = y$$

إذن $\frac{\sum x'y'}{\sum x'^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$ ومن ثم نحصل على النتيجة من المسألة ١٣-١٥ ونحصل على نتيجة مشابهة بالنسبة لـ b_1 .

هذه النتيجة مفيدة ، حيث أنها تمكننا من تبسيط الحسابات في الحصول على خط الانحدار بطرح ثوابت اختيارية من المتغيرات X و Y (أنظر الطريقة الثانية في المسألة ١٣-١٧) .

ملاحظة : الاستنتاج لا يظل صحيحاً إذا كانت $Y' = c_2 Y + B$ ، $X' = c_1 X + A$ إلا إذا كانت

$$c_1 = c_2$$

١٣-١٧ وفق خط المربعات الصغرى لبيانات المسألة ١٣-١٠ باستخدام

$$(أ) \quad X \text{ كتغير مستقل} \quad (ب) \quad X \text{ كتغير تابع}$$

الحل :

$$(أ) \text{ من المسألة ١٣-١٥ (أ) الخط المطلوب هو } y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x \text{ حيث } y = Y - \bar{Y} \text{ ، } x = X - \bar{X}$$

العمل المتضمن في حساب المباحث يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٣ - ٦ . من العمودين الأولين نحصل على

$$\bar{X} = 802/12 = 66.8 \text{ و } \bar{Y} = 1850/12 = 154.2$$

العمود الأخير أضيف للاستخدام في الجزء (ب) .

جدول ١٣ - ٦

القوة	السرعة القصوى	y^2	x^2	xy	$y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$
70	155	0.64	10.24	2.56	0.8	3.2
63	150	17.64	14.44	15.96	-4.2	-3.8
72	180	665.64	27.04	134.16	25.8	5.2
60	135	368.64	46.24	130.56	-19.2	-6.8
66	156	3.24	0.64	-1.44	1.8	-0.8
70	168	190.44	10.24	44.16	13.8	3.2
74	178	566.44	51.84	171.36	23.8	7.2
65	160	33.64	3.24	-10.44	5.8	-1.8
62	132	492.84	23.04	106.56	-22.2	-4.8
67	145	84.64	0.04	-1.84	-9.2	0.2
65	139	231.04	3.24	27.36	-15.2	-1.8
68	152	4.84	1.44	2.64	2.2	1.2
$\Sigma X = 802$ $\bar{X} = 66.8$	$\Sigma Y = 1850$ $\bar{Y} = 154.2$	$\Sigma y^2 = 2659.68$	$\Sigma x^2 = 191.68$	$\Sigma xy = 616.32$		

خط المربعات الصغرى المطلوب هو

$$Y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) X - \frac{616.32}{191.68} X = 3.22X$$

أو $Y = 3.22(X - 66.8) + 145.2$ والذي يمكن كتابته على الصورة $Y = 3.22X - 60.9$ وتسمى هذه المعادلة خط انحدار Y على X ويستخدم لتقدير Y من قيم معطاة لـ X .

(ب) إذا كان X هو المتغير التابع ، فإن الخط المطلوب هو

$$X = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) Y - \frac{616.32}{2659.68} Y = 0.232Y$$

والذي يمكن كتابته على الصورة $X = 0.232(Y - 154.2) + 31.0$ أو $X = 0.232Y + 31.0$ وهذه المعادلة تسمى خط انحدار X على Y ويستخدم لتقدير X من قيم Y المعطاة .

لاحظ أن طريقة المسألة ١٣ - ١١ يمكن أيضاً استخدامها إذا أردنا .

طريقة أخرى :

باستخدام نتيجة المسألة ١٣ - ١٦ ، يمكن أن نطرح ثوابت مناسبة من X ، Y . فإذا اخترنا أن نطرح 65 من X و 150 من Y فإن النتائج يمكن ترتيبها في الجدول ١٣ - ٧ .

الجدول ١٣ - ٧

X'	Y'	X'^2	$X'Y'$	Y'^2
5	5	25	25	25
-2	0	4	0	0
7	30	49	210	900
-5	-15	25	75	225
1	6	1	6	36
5	18	25	90	324
9	28	81	252	784
0	10	0	0	100
-3	-18	9	54	324
2	-5	4	-10	25
0	-11	0	0	121
3	2	9	6	4
$\Sigma X' = 22$	$\Sigma Y' = 50$	$\Sigma X'^2 = 232$	$\Sigma X'Y' = 708$	$\Sigma Y'^2 = 2868$

$$a_1 = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{N \Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2} = \frac{(12)(708) - (22)(50)}{(12)(232) - (22)^2} = 3.22$$

$$b_1 = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma Y')(\Sigma X')}{N \Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2} = \frac{(12)(708) - (50)(22)}{(12)(2868) - (50)^2} = 0.232$$

بما أن $\bar{Y} = 150 + 50/12 = 154.2$ و $\bar{X} = 65 + 22/12 = 66.8$. فإن معادلات الانحدار هي

$$Y - 154.2 = 3.22(X - 66.8) \quad \text{و} \quad X - 66.8 = 0.232(Y - 154.2)$$

أي أن $X = 0.232 Y + 31.0$ و $Y = 3.22X - 60.9$ وهي نفس نتائج الطريقة الأولى .

١٣ - ١٨ (أ) مستخدماً نفس المحاور ارسم شكل الخطين في المسألة ١٣ - ١٧

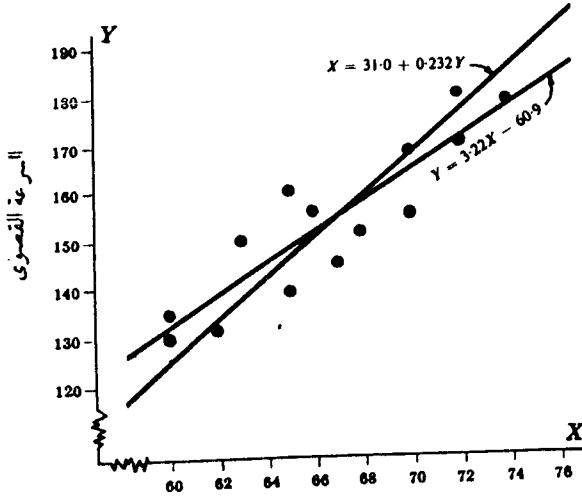
(ب) قدر السرعة القصوى لمربة إذا علم أن قوتها هي 63 k W .

(ج) قدر قوة عربة سرعتها القصوى هي 168 km/h .

الحل :

(أ) يوضح الشكل ١٣ - ١٠ الخطين معاً وكذلك نقط البيانات الأصلية . لاحظ أنهما يتقاطعان معاً عند (\bar{X}, \bar{Y})

أو (66.8, 154.2)



شكل ١٣ - ١٠
القوة

(ب) لتقدير Y من X نستخدم خط انحدار Y

على X ، والمعطى بالمسألة ١٣-١٧ كالاتي

$$Y = 3.22X - 60.9 \quad \text{إذا } X = 63$$

كانت $X = 63$ فإن

$$Y = 3.22(63) - 60.9 = 142 \text{ km/h}$$

(ج) X من Y نستخدم خط انحدار X

على Y ، والمعطى بالمسألة ١٣-١٧ كالاتي

$$X = 31.0 + 0.232 Y \quad \text{إذا } Y = 168$$

كانت $Y = 168$ فإن

$$(X = 31.0 + 0.232(168) = 70.0 \text{ kW})$$

النتائج في (ب) و (ج) يجب مقارنتها بتلك في المسألة ١٣-١٠ (د) و ١٣-١٠ (هـ)

تطبيقات على السلاسل الزمنية :

١٣-١٩ إنتاج الصلب بملايين الكيلوطن في بلد معين

خلال الفترة من 1946 — 1956 موضح

باجدول ١٣-٨

السنة	إنتاج الصلب (ملايين كيلوطن)
1946	66.6
1947	84.9
1948	88.6
1949	78.0
1950	96.8
1951	105.2
1952	93.2
1953	111.6
1954	88.3
1955	117.0
1956	115.2

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

(ب) أوجد معادلة خط المربعات الصغرى الذي

يوفق البيانات

(ج) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1958 ،

1957 وقارن بالقيمة الحقيقية 85.3 ،

112.7 مليون كيلوطن .

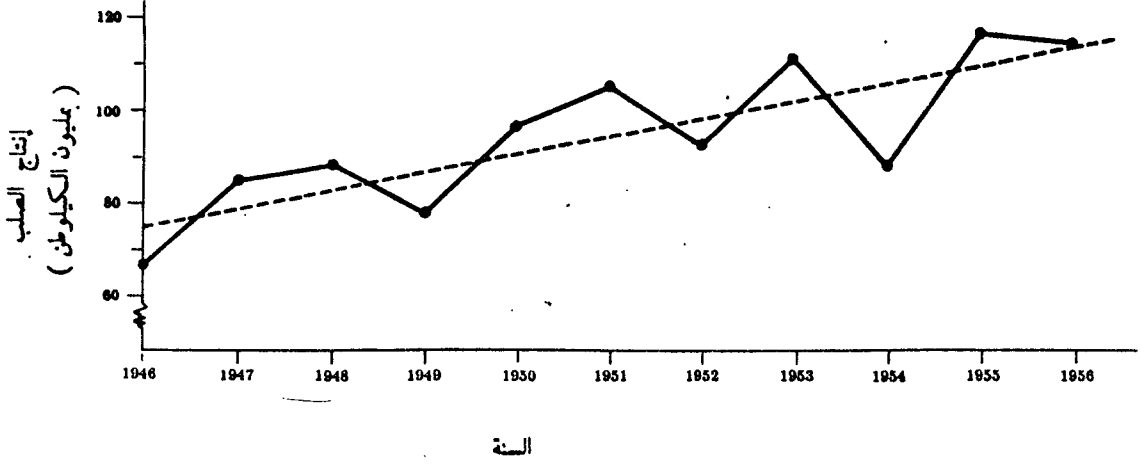
(د) قدر إنتاج الصلب خلال الأعوام 1945 ،

1944 وقارن بالقيم الحقيقية 89.6 ،

79.7 مليون كيلوطن على الترتيب .

الحل :

(١)



شكل ١٣ - ١١

(ب) الطريقة الاولى :

استخدم المعادلة $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$ حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$. فإنه يمكن

ترتيب العمل كما في الجدول ١٣ - ٩ .

السنة	xy	x^2	$y = Y - \bar{Y}$	$x = X - \bar{X}$	Y	X
1946	142.0	25	-28.4	-5	66.6	0
1947	40.4	16	-10.1	-4	84.9	1
1948	19.2	9	-6.4	-3	88.6	2
1949	34.0	4	-17.0	-2	78.0	3
1950	-1.8	1	1.8	-1	96.8	4
1951	0	0	10.2	0	105.2	5
1952	-1.8	1	-1.8	1	93.2	6
1953	33.2	4	16.6	2	111.6	7
1954	-20.1	9	-6.7	3	88.3	8
1955	88.0	16	22.0	4	117.0	9
1956	101.0	25	20.2	5	115.2	10
	$\sum xy = 434.1$	$\sum x^2 = 110$			$\sum Y = 1045.4$ $\bar{Y} = 95.0$	$\sum X = 55$ $\bar{X} = 5$

المعادلة المطلوبة وهى $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$ تصبح $y = \left(\frac{434.1}{110} \right) x$ أو $y = 3.95x$ والتي يمكن كتابتها على الصورة :

$$Y - 95.0 = 3.95(X - 5) \text{ أو } Y = 75.2 + 3.95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هى السنة 1946 ووحدة X هى سنة . الرسم البياني لهذا الخط ، يسمى أحياناً خط الاتجاه العام ، وموضح بالشكل ١٣ - ١١ على صورة خطوط متقطعة . وتسمى المعادلة غالباً معادلة الاتجاه العام وقيم Y المحسوبة من قيم X المختلفة بالقيم الاتجاهية .

الطريقة الثانية :

إذا أعطينا قيم X للسنوات 1946 — 1956 بحيث $\sum X = 0$. فإن معادلة خط المربعات الصغرى يمكن أن تكتب على الصورة :

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$$

وبما أن هناك عدداً فردياً من السنوات ، فإنه يمكن اختيار $X = 0$ السنة التى فى منتصف الفترة وهى 1951 ، $X = 1, 2, 3, 4, 5$ ، للسنوات التالية لها و $X = -1, -2, -3, -4, -5$ ، للسنوات السابقة عليها - ويوضح الجدول ١٣ - ١٠ العمود الثانى (من اليسار) هذه النتيجة وهذا يساوى العمود الرابع (من اليسار) فى الجدول الخاص بالطريقة الأولى . السنة المتوسطة 1951 تسمى بنقطة الأصل . وسنفترض - مالم يذكر خلاف ذلك - أن قيم Y تشير إلى القيم فى منتصف السنة ، أى ، فى أول يوليو . وبهذا فإن $X = 0$ تقابل أول يوليو سنة 1951 ، $X = 1$ تقابل أول يولية 1950 ، وهكذا . ويمكن تنظيم الحسابات المطلوبة كما فى الجدول ١٣ - ١٠ .

الجدول ١٣ - ١٠

السنة	$-XY$	X^2	Y	X
1946	-333.0	25	66.6	-5
1947	-339.6	16	84.9	-4
1948	-265.8	9	88.6	-3
1949	-156.0	4	78.0	-2
1950	-96.8	1	96.8	-1
1951	0	0	105.2	0
1952	93.2	1	93.2	1
1953	223.2	4	111.6	2
1954	264.9	9	88.3	3
1955	468.0	16	117.0	4
1956	576.0	25	115.2	5
	$\sum XY = 434.1$	$\sum X^2 = 110$	$\sum Y = 1045.4$	$\bar{X} = 0$

إذن $\bar{Y} = (\Sigma Y/N) = 1.45.4/11 = 95.0$ والمعادلة المطلوبة هي .

$$Y = 95.0 + (434.1/110)X \text{ أو } Y = 95.0 + 3.95X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي السنة 1951 ووحدة X هي السنة .

لنقل نقطة الأصل إلى 1946 ، خمسة سنوات سابقة ، فيجب أن نضع $X - 5$ بدلا من X ، وهذا نحصل على المعادلة $Y = 75.2 + 3.95X$ أو $Y = 95.0 + 3.95(X - 5)$ كما في الطريقة الأولى .

الطريقة الثانية أفضل من الطريقة الأولى حيث أن العمل المطلوب في الحساب قد اختصر . ولكن هذه الطريقة يجب أن تعدل إذا كان عدد السنوات في البيانات زوجياً . ولهذا التعديل أنظر طريقة المسألة ١٣ - ٢٠ (ب) أما الطريقة الأولى فيمكن تطبيقها في جميع الحالات .

(ج) استخدم معادلة الاتجاه العام $Y = 95.0 + 3.95X$ ، حيث $X = 0$ تقابل 1951 . إذن السنوات 1958 ، 1957 تقابل $X = 7$ ، $X = 6$ على الترتيب .

إذا كانت $X = 6$ فإن $Y = 95.0 + 0.95(6) = 118.7$ والتي تقرب بصورة جيدة من القيمة الفعلية 112.7 .

إذا كانت $X = 7$ فإن $Y = 95.0 + 3.95(7) = 122.6$ وهي لاتقارن بصورة جيدة بالقيمة الفعلية وتوضح المخاطرة المتضمنة في عملية الاستنباط .

نفس النتيجة يمكن الحصول عليها باستخدام معادلة الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95X$ والتي لها كنقطة أصل السنة 1946 ، وذلك بوضع $X = 12$ و $X = 11$ على الترتيب .

(د) باستخدام خط الاتجاه العام $Y = 75.2 + 3.95X$ عند $X = -2$ ، $X = -1$ نحصل على القيم

$$Y = 75.2 + 3.95(-1) = 71.2 \text{ و } Y = 75.2 + 3.95(-2) = 67.3$$

١٣ - ٢٠ يوضح الجدول ١٣ - ١١ إنتاج الولايات المتحدة من السيجار ذى الحجم الصغير خلال الأعوام من 1954 - 1945 .

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

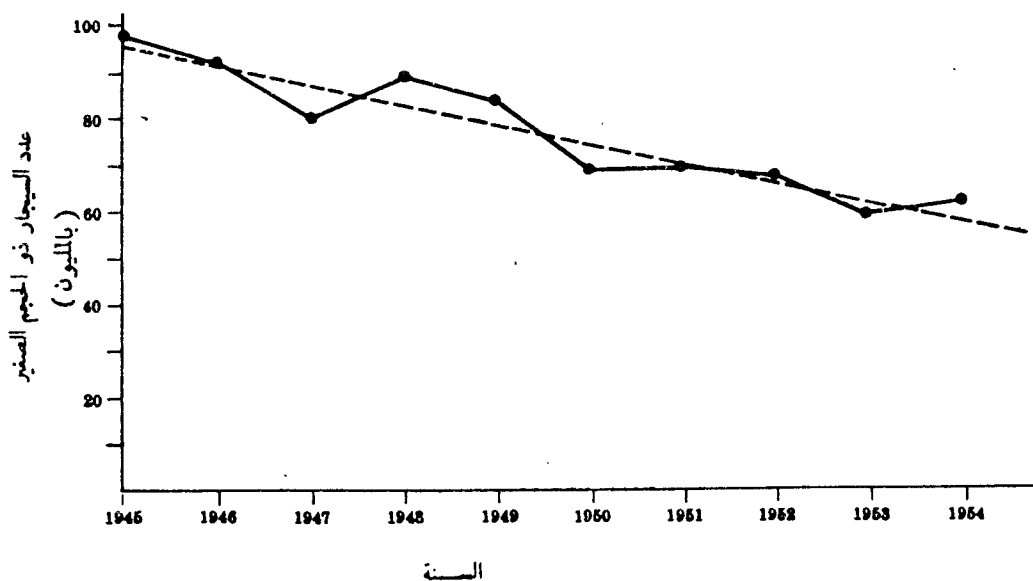
(ب) أو جد معادلة خط المربعات الصغرى التي توفى البيانات

(ج) قدر إنتاج السيجار ذى الحجم الصغير خلال عام 1955

جدول ١٣ - ١١

السنة	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954
عدد السيجار ذو الحجم الصغير (بالمليون)	98.2	92.3	80.0	89.1	83.5	68.9	69.2	67.1	58.3	61.2

الحل : (أ)



شكل ١٣ - ١٢

(ب) الطريقة الأولى :

جدول ١٣ - ١٢

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	السنة
0	98.2	-4.5	21.4	20.25	-96.30	1945
1	92.3	-3.5	15.5	12.25	-54.25	1946
2	80.0	-2.5	3.2	6.25	-8.00	1947
3	89.1	-1.5	12.3	2.25	-18.45	1948
4	83.5	-0.5	6.7	0.25	-3.35	1949
5	68.9	0.5	-7.9	0.25	-3.95	1950
6	69.2	1.5	-7.6	2.25	-11.40	1951
7	67.1	2.5	-9.7	6.25	-24.25	1952
8	58.3	3.5	-18.5	12.25	-64.75	1953
9	61.2	4.5	-15.6	20.25	-70.20	1954
$\Sigma X = 45$ $\bar{X} = 4.5$	$\Sigma Y = 767.8$ $\bar{Y} = 76.8$			$\Sigma x^2 = 82.5$	$\Sigma xy = -354.9$	

المعادلة المطلوبة وهي $y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$ تصبح $y = \frac{-354.9}{82.5}$ أو $y = 4.30$ والتي يمكن كتابتها

على الصورة :

$$Y = 96.2 - 4.30X \text{ أو } Y - 76.8 = -4.30(X - 4.5)$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي سنة 1945 ووحدة X هي السنة . الرسم البياني لهذا الخط ، ويسمى أحياناً

خط الاتجاه العام ، موضح بصورة خطوط متقطعة الشكل ١٣ - ١٢

الطريقة الثانية :

جدول ١٣ - ١٣

السنة	XY	X^2	Y	X
1945	-883.8	81	98.2	-9
1946	-646.1	49	92.3	-7
1947	-400.0	25	80.0	-5
1948	-267.3	9	89.1	-3
1949	-83.5	1	83.5	-1
1950	68.9	1	68.9	1
1951	207.6	9	69.2	3
1952	335.5	25	67.1	5
1953	408.1	49	58.3	7
1954	550.8	81	61.2	9
	$\sum XY = -709.8$	$\sum X^2 = 330$	$\sum Y = 767.8$ $\bar{Y} = 76.8$	$\sum X = 0$ $\bar{X} = 0$

في هذه الطريقة فإننا نريد إعطاء السنوات القيم X بحيث تكون $\sum X = 0$ وبما أن عدد السنوات زوجي ، فإنه لا توجد سنة وسطى ولا يمكن بذلك استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٩ . على أية حال ، فإنه يمكن إعطاء الأرقام 0.5 ، 0.5 — للستين بالمنتصف وهما 1950 ، 1949 ، بحيث تمثل السنوات 1951, 1952, ... بالأرقام 1.5, 2.5, ... وهذا مأه موجود بالعمود الرابع من اليسار بالجدول ١٣ - ١٢ في الطريقة الأولى .

كذلك ، ولتلاقى السكور نضاعف هذه القيم بحيث نحصل على العمود الثاني (من اليسار) في الجدول ١٣ - ١٣ . لاحظ أنه باستخدام هذه القيم لـ X فإن نقطة الأصل $X = 0$ هي في المنتصف بين أول يوليو 1949 ، وأول يوليو 1950 وهو أول يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949 .

كذلك فإن وحدة X هي نصف سنة .

بما أن $X = 0$ فإن المعادلة المطلوبة لها الشكل $Y = \bar{Y} + \left(\frac{\sum XY}{\sum X^2} \right) X$ والتي تعطى (أنظر الجدول ١٣ - ١٣) .

$$Y = 76.8 - 2.15X \text{ أو } Y = 76.8 + (-709.8/330)X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ تقابل يناير 1950 و X مقاسة بنصف سنة فإذا أردنا قياس X كسنة كاملة وليست كنصف سنة ، فيجب أن نضع $2X$ بدلا من X بحيث تكون المعادلة هي

$$Y = 76.8 - 4.30X$$

ونقطة الأصل هي أول يناير 1950 ، X مقاسة بالسنوات

إذا أردنا الآن نقل نقطة الأصل إلى أول يوليو 1945 ، فيجب أن نضع $X - 4.5$ بدلا من X (حيث أن المدة من أول يوليو 1945 إلى أول يناير 1950 هي 4.5 سنة) . وهذا تكون النتيجة :

$$Y = 76.8 - 4.30(X - 4.5) = 96.2 - 4.30X$$

حيث نقطة الأصل هي أول يوليو 1945 و X مقاسة بالسنوات . وهذا يتفق مع نتيجة الطريقة الأولى.

(ج) استخدم المعادلة $Y = 96.2 - 4.30X$ حيث $X = 10$ تقابل 1955 .

إذن $Y = 53.2$ ، بحيث نتوقع إنتاج 53.2 مليون من السيارات ذى الحجم الصغير إذا استمر نفس الاتجاه العام .

المعادلات غير الخطية التي يمكن وضعها في صورة خطية :

١٣ - ٢١ الجدول ١٣ - ١٤ يعطى القيم التجريبية للضغط P وحجم معين من الغاز المقابل للقيم المختلفة للحجم V . طبقاً لمبادئ علم الديناميكا الحرارية فإن هذه العلاقة تأخذ الصورة $PV^\gamma = C$ ، حيث C و γ ثوابت يجب أن تتواجد بين المتغيرات (أ) أوجد قيم C ، γ (ب) اكتب المعادلة التي يجب أن تربط بين V ، P . (ج) قدر P عند $V = 100.0$

جدول ١٣ - ١٤

الحجم	194.0	118.6	88.7	72.4	61.8	54.3
الضغط	10.1	19.2	28.4	37.6	49.5	61.2

الحل :

بما أن $PV^\gamma = C$ ، فإن

$$\log P + \gamma \log V = \log C \quad \text{أو} \quad \log P = \log C - \gamma \log V$$

فإذا وضعنا $\log V = X$ و $\log P = Y$ ، فإن المعادلة الأخيرة يمكن كتابتها على الصورة

$$(1) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

حيث $a_0 = \log C$ و $a_1 = -\gamma$

الجدول ١٣ - ١٥ أدناه يعطى $X = \log V$ و $Y = \log P$ المقابلة لقيم V و P الموضحة بالجدول ١٣-١٤ وكذلك بوضوح القيم المطلوبة في حساب معادلة المربعات الصغرى (١)

المعادلات الاعتدالية المقابلة لخط المربعات الصغرى (١) هي

$$\Sigma Y = a_0 N + a_1 \Sigma X \quad \text{و} \quad \Sigma XY = a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2$$

$$\text{ومنها} \quad a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = 4.20, \quad a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2} = -1.40.$$

$$\text{إذن} \quad Y = 4.20 - 1.40 X.$$

الجدول ١٣ - ١٥

$X = \log V$	$Y = \log P$	X^2	XY
1.7348	1.7868	3.0095	3.0997
1.7910	1.6946	3.2077	3.0350
1.8597	1.5752	3.4585	2.9294
1.9479	1.4533	3.7943	2.8309
2.0741	1.2833	4.3019	2.6617
2.2878	1.0043	5.2340	2.2976
$\Sigma X = 11.6953$	$\Sigma Y = 8.7975$	$\Sigma X^2 = 23.0059$	$\Sigma XY = 16.8543$

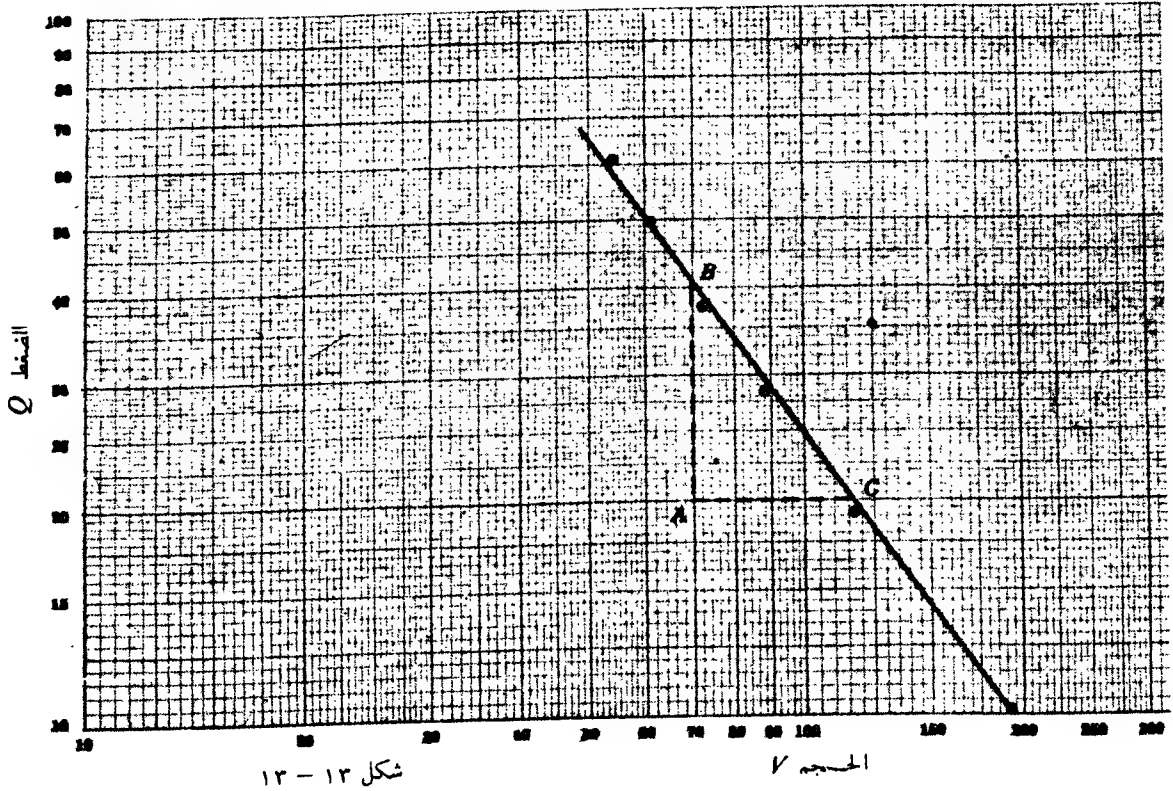
(أ) بما أن $a_0 = 4.20 = \log C$ و $a_1 = -1.40 = -\gamma$ ، فإن $C = 1.60 \times 10^4$ و $\gamma = 1.40$.

(ب) المعادلة المطلوبة بدلالة V ، P يمكن كتابتها على الصورة $PV^{1.40} = 16\,000$.

(ج) عند $V = 100$ فإن $X = \log V = 2$ و $Y = \log P = 4.20 - 1.40(2) = 1.40$ وعلى ذلك $P = \text{antilog } 1.40 = 25.1$.

٢٢-١٣ حل المسألة ١٣ - ٢١ برسم البيانات على ورق رسم بياني بالتقسيم لوغاريتم - لوغاريتم

الحل :



لكل من أزواج القيم للضغط P والحجم V بالجدول ١٣ - ١٤ في المسألة ١٣ - ١٢ ، نحصل على نقطة موقعة على ورق الرسم البياني لوغاريتم كما هو موضح بالشكل ١٣ - ١٣ أعلاه .

ويوضح الشكل أيضاً الخط الذي يقرب هذه النقاط (مرسوماً بالتمهيد باليد) . يوضح الرسم الناتج أن هناك علاقة خطية بين $\log P$ و $\log V$ والذي يمكن تمثيلها بالمعادلة

$$Y = a_0 + a_1 X \text{ أو } \log P = a_0 + a_1 \log V$$

الميل a_1 ، وهو سالب في هذه الحالة ، يعطى رقياً بنسبة الانحراف AB إلى AC (باستخدام وحدة طول ملائمة) .

وتمطى القياسات في هذه الحالة $a_1 = -1.4$.

الحصول على a_0 ، فإننا نحتاج إلى نقطة على الخط . على سبيل المثال عندما تكون $V = 100$ فإن $P = 25$ من الشكل . إذن

$$a_0 = \log P - a_1 \log V = \log 25 + 1.4 \log 100 = 1.4 + (1.4)(2) = 4.2$$

بحيث

$$\log P + 1.4 \log V = 4.2, \log P^{1.4} = 4.2, \text{ and } P^{1.4} = 16000$$

المربعات الصغرى للقطع المكافئ :

٢٣-١٣ الجدول ١٦-١٣ يوضع تعداد سكان الولايات المتحدة خلال الأعوام 1850 — 1950 على فترات كل منها عشر سنوات

(أ) أوجد معادلة القطع المكافئ باستخدام طريقة المربعات الصغرى والتي توفق هذه البيانات

(ب) احسب القيم الاتجاهية للسنوات بالجدول وقارنها بالقيم الفعلية

(ج) قدر عدد السكان في عام 1945 .

(د) قدر عدد السكان في عام 1960 وقارن بالقيم الفعلية .

(هـ) قدر عدد السكان في 1840 وقارن بالقيمة الفعلية . (أنظر المسألة ١ - ٢٣ بالفصل الأول)

جدول ١٣ - ١٦

السنة	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
سكان الولايات المتحدة (بالمليون)	23.2	31.4	39.8	50.2	62.9	76.0	92.0	105.7	122.8	131.7	151.1

المصدر : مكتب التعدادات .

الحل :

(أ) اعتبر المتغيرات X و Y تعبر عن السنة وعدد السكان في خلال السنة على الترتيب . معادلة قطع مكافئ المربعات الصغرى التي توفق البيانات هي :

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

حيث نحصل على قيمة a_0, a_1, a_2 من المعادلات الاعتدالية

$$(٢) \quad \begin{cases} \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y = a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{cases}$$

من الملائم اختيار X بحيث يكون منتصف سنة 1900 تقابل $X = 0$ ، والسنوات 1910, 1920, 1930, 1850, 1860, 1870, 1880, 1890 و 1940, 1950 تقابل $-1, -2, -3, -4, -5$ و $1, 2, 3, 4, 5$ على الترتيب .
هذا الاختيار فإن $\sum X, \sum X^3, \sum X^5$ تساوى الصفر وبهذا تبسط المعادلات (٢) . ويمكن ترتيب العمل المطلوب في الحسابات كما في الجدول ١٣ - ١٧ أدناه .

باستخدام هذا الجدول فإن المعادلات الاعتدالية (٢) تصبح

$$(٣) \quad \begin{cases} 11a_0 + 110a_2 = 886.8 \\ 110a_1 = 1429.8 \\ 110a_0 + 1958a_2 = 9209.0 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية في (٣) $a_1 = 13.00$ ، من المعادلتين الأولى والثالثة $a_0 = 76.64$ ، $a_2 = 0.3974$.
إذن المعادلة المطلوبة هي :

$$(٤) \quad Y = 76.64 + 13.00X + 0.3974X^2$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي أول يوليو سنة 1900 ووحدة X هي عشر سنوات .

جدول ١٣ - ١٧

السنة	X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1850	-5	23.2	25	-125	625	-116.0	580.0
1860	-4	31.4	16	-64	256	-125.6	502.4
1870	-3	39.8	9	-27	81	-119.4	358.2
1880	-2	50.2	4	-8	16	-100.4	200.8
1890	-1	62.9	1	-1	1	-62.9	62.9
1900	0	76.0	0	0	0	0	0
1910	1	92.0	1	1	1	92.0	92.0
1920	2	105.7	4	8	16	211.4	422.8
1930	3	122.8	9	27	81	368.4	1105.2
1940	4	131.7	16	64	256	526.8	2107.2
1950	5	151.1	25	125	625	755.5	3777.5
	$\sum X = 0$	$\sum Y = 886.8$	$\sum X^2 = 110$	$\sum X^3 = 0$	$\sum X^4 = 1958$	$\sum XY = 1429.8$	$\sum X^2Y = 9209.0$

(ب) القيم الاتجاهية ، نحصل عليها بالتعويض بالقيم $X = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ في المعادلة (٤) ، وهي موضحة بالجدول ١٣ - ١٨ مع القيم الفعلية ومنها يتضح أن الاتفاق جيد .

جدول ١٢ - ١٨

السنة	$X = 5$ 1950	$X = 4$ 1940	$X = 3$ 1930	$X = 2$ 1920	$X = 1$ 1910	$X = 0$ 1900	$X = -1$ 1890	$X = -2$ 1880	$X = -3$ 1870	$X = -4$ 1860	$X = -5$ 1850
القيم الاتجاهية	151.6	135.0	119.2	104.2	90.0	76.6	64.0	52.2	41.2	31.0	21.6
القيم الفعلية	151.1	131.7	122.8	105.7	92.0	76.0	62.9	50.2	39.8	31.4	23.2

(ج) سنة 1945 وتقابل $X = 4.5$ ومنها

$$Y = 76.64 + 13.00(4.5) + 0.3974(4.5)^2 \approx 143.2$$

(د) سنة 1960 وتقابل $X = 6$ ومنها $Y = 76.64 + 13.00(6) + 0.3974(6)^2 \approx 168.9$

وهذه لا تتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 179.3

(هـ) سنة 1840 تقابل $X = -6$ ومنها

$$Y = 76.64 + 13.00(-6) + 0.3974(-6)^2 = 12.9$$

وهذه لا تتفق بصورة جيدة مع القيمة الفعلية 17.1

وهذا المثال يوضح حقيقة أن العلاقة التي من الممكن أن تكون مرضية في مدى قيم معينة لا تكون بالضرورة مرضية في مدى أوسع للقيم

مسائل إضافية

الخطوط المستقيمة :

٢٤-١٣ إذا كانت $3X + 2Y = 18$ ، أوجد (أ) X عند $Y = 3$ (ب) Y عند $X = 2$ (ج) X عند

$Y = -5$ (د) Y عند $X = -1$ (هـ) الجزء المقطوع من محور X (و) الجزء المقطوع من محور Y .

ج : (أ) 4 (ب) 6 (ج) $28/3$ (د) 10.5 (هـ) 6 (و) 9 .

٢٥-١٣ عبر بياناً عن المعادلات (أ) $Y = 3X - 5$ (ب) $X + 2Y = 4$ مستخدماً نفس المحاور في أي نقطة تتقاطع المستقيمتان ؟

ج : (2, 1)

٢٦-١٣ (أ) أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, -2) ، (-1, 6) ،

(ب) أوجد الجزء المقطوع من المحور X والجزء المقطوع من المحور Y لخط في (أ)

(ج) أوجد قيمة Y عند $X = 3$ و $X = 5$.

(د) أثبت إجابتك في (أ) ، (ب) ، (ج) باستخدام الرسم .

ج : (أ) $2X + Y = 4$ (ب) الجزء المقطوع من محور X يساوى 2 ، من محور Y يساوى 4
(ج) - 6 ، - 2

٢٧-١٣ أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله $2/3$ والجزء المقطوع من محور Y يساوى 3 —
ج : $Y = 2/3X - 3$ أو $2X - 3Y = 9$

٢٨-١٣ (أ) أوجد الميل والجزء المقطوع من محور Y للخط الذى معادلته $3X - 5Y = 20$. (ب) ما هى معادلة الخط الموازى للخط في (أ) والذى يمر بالنقطة (2, -1) ؟
ج : (أ) الميل = $3/5$ ، الجزء المقطوع من $Y = -4$ —
(ب) $3X - 5Y = 11$

٢٩-١٣ أوجد (أ) الميل (ب) الجزء المقطوع من محور Y (ج) معادلة الخط الذى يمر بالنقطتين (2, 8) ، (5, 4)
ج : (أ) $-4/3$ (ب) $32/3$ (ج) $4X + 3Y = 32$

٣٠-١٣ أوجد معادلة الخط المستقيم فى حالة ما إذا كان الجزء المقطوع من محور X هو 3 والجزء المقطوع من محور Y هو -5 —
ج : $X/3 + Y/(-5) = 1$ أو $5X - 3Y = 15$

٣١-١٣ إذا كانت 100 درجة حرارة مئوية تقابل 212 درجة فهرنهايت ، بينما درجة حرارة صفر مئوية تقابل 32 فهرنهايت . مقترضاً وجود علاقة خطية بين درجات الحرارة المئوية ودرجات الحرارة فهرنهايت (يرمز للدرجة المئوية بالرمز C والفهرنهايت بالرمز F) . أوجد
(أ) المعادلة التى تربط F ، C (ب) درجة الحرارة فهرنهايت المقابلة لدرجة الحرارة المئوية 80
(د) درجة الحرارة المئوية المقابلة لدرجة الحرارة 68 فهرنهايت .
ج : (أ) $F = 9/5C + 32$ ، (ب) $176^{\circ}F$ ، (ج) $20^{\circ}C$.

خط المربعات الصغرى :

٣٢-١٣ وفق خط المربعات الصغرى للبيانات بالجدول التالى باستخدام

X	3	5	6	8	9	11
Y	2	3	4	6	5	8

(أ) X كتغير مستقل

(ب) X كتغير تابع

عبر عن البيانات بالرسم وكذلك ارس خط المربعات الصغرى مستخدماً نفس المجموعة من المحاور .

ج : (أ) $Y = -1/3 + 5/7X$ أو $Y = -0.333 + 0.714X$ (ب) $Y = 1 + 7/9X$ أو $X = 1.00 + 1.29Y$.

٣٣-١٣ لبيانات المسألة السابقة أوجد (أ) قيم Y عندما $X = 5$ وعند $X = 12$ (ب) قيمة X عند $Y = 7$.

ج : (أ) 3.24, 8.24 (ب) 10.00

٣٤-١٣ (أ) استختم طريقة التمهيد باليد للحصول على معادلة الخط الذي يجهد البيانات بالمسألة ٣٣-١٣

(ب) أجب عن المسألة ٣٣-١٣ باستخدام نتيجة الجزء (أ)

٣٥-١٣ الجدول التالى يوضح الدرجات فى امتحان نهائى فى مادى الجبر والطبيعة التى حصل عليها 10 طلاب اختبروا عشوائيا من مجموعة كبيرة من الطلبة.

(أ) عبر عن هذه البيانات بالرسم

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما X كتغير مستقل .

(ج) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق هذه البيانات ، مستخدما Y كتغير مستقل .

(د) إذا حصل طالب على الدرجة 79 فى الجبر ما هى الدرجة المتوقعة أن يحصل عليها فى الطبيعة .

(هـ) إذا حصل طالب على الدرجة 95 فى الطبيعة ، ما هى الدرجة المتوقعة أن يحصل عليها فى الجبر ؟

75	80	93	65	87	71	98	68	84	77	جبر (Y)
82	78	86	72	91	80	95	72	89	74	الطبيعة (X)

ج : (ب) $Y = 29.13 + 0.661X$

(ج) $X = 14.39 + 1.15Y$

(هـ) 95

(د) 79

٣٦-١٣ الجدول التالى يوضح عدد عمال الزراعة فى الولايات المتحدة (بالمليون) خلال السنوات 1957 — 1949

(أ) عبر عن البيانات بالرسم .

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى توفق هذه السلسلة الزمنية وعبر عنها بالرسم .

(ج) احسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية .

(د) قدر عدد عمال الزراعة فى العام 1948 وقارنها بالقيمة الفعلية . (10.36 مليون)

(هـ) تنبؤ بعدد عمال الزراعة فى العام 1958 (القيمة الحقيقية هى 7.53 مليون) . ناقش المصادر الممكنة للخطأ فى مثل هذا التنبؤ .

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
عدد عمال الزراعة (بالمليون)	9.96	9.93	9.55	9.15	8.86	8.64	8.36	7.82	7.58

المصدر : مصلحة الزراعة

ج : (ب) $Y = 8.872 - 0.312X$ ، حيث Y هو عدد عمال الزراعة بالمليون ، مُعبرا عنهم بالسنوات ونقطة الأصل هي أول يوليو 1953 .

(د) 10.43 مليون

(هـ) 7.31 مليون

٣٧-١٣ الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين بالولايات المتحدة موضح بالجدول للسنوات 1950 — 1957 .
(فترة الأساس هي 1947 — 1949 ويعبر عنها بالقيمة 100 والتي تعنى 100% . الرقم القياسى لسنة 1952 على سبيل المثال ، هو 117.2 ويوضح أنه خلال سنة 1952 كان متوسط أسعار الرعاية الطبية هو 17.2% مما كانت عليه في فترة الأساس أى ، زادت الأسعار بنسبة 17.2%) .

(أ) عبر عن البيانات بالرسم .

(ب) أوجد خط المربعات الصغرى الذى يوفق البيانات وعبر عنه بالرسم .

(ج) أحسب القيم الاتجاهية وقارنها بالقيم الفعلية .

(د) تنبؤ بالرقم القياسى لأسعار الخدمات الطبية خلال عام 1958 وقارن بالقيمة الفعلية (144.4) .

(هـ) فى أى سنة تتوقع أن تصل أسعار الرعاية الطبية إلى ضعف أسعار سنة 1949 — 1947 مفترضا استمرار خط الاتجاه العام الحال ؟

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
الرقم القياسى لأسعار الرعاية الطبية للمستهلكين (1947 — 1949 = 100)	106.0	111.1	117.2	121.3	125.2	128.0	132.6	138.0

المصدر : مكتب احصاءات العمل

ج : (ب) $Y = 122.42 + 21.19X$ إذا كانت وحدة X نصف السنة ونقطة الأصل هي 1 يناير 1954 أو $Y = 107.09 + 4.38X$ إذا كانت وحدة X هي السنة ونقطة الأصل هي 1 يوليو 1950

(د) 142.1.

(هـ) 1971.

منحنى المربعات الصغرى :

٣٨-١٣ وفق باستخدام طريقة المربعات الصغرى

معادلة القطع المكافئ* ، $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$

للبيانات بالجدول المرفق .

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	2.4	2.1	3.2	5.6	9.3	14.6	21.9

$$\begin{aligned} Y &= 5.51 + 3.20(X - 3) + 0.733(X - 3)^2 \\ Y &= 2.51 - 1.20X + 0.733X^2 \end{aligned} \quad \text{ج :}$$

٣٩-١٣ الزمن الكلى المطلوب لاييقاف سيارة عقب مشاهدة خطر يتكون من زمن رد الفعل (وهو الوقت بين ميم الخطر

* واستخدام الفرامل) وزمن الايقاف (وهو الوقت التالى لاستخدام الفرامل) . الجدول التالى يعطى مسافة الإيقاف d

(بالتر) لعربة تسير بسرعة v (متر فى الدقيقة) فى لحظة ظهور الخطر .

(ا) عبر بيانيا عن d المقابلة لـ v

(ب) وفق قطع مكافئ* بالصورة $d = a_0 + a_1v + a_2v^2$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى لهذه

البيانات .

(ج) قدر d عند $v = 45$ m/s و $v = 80$ m/s.

v (m/s) السرعة	20	30	40	50	60	70
d (m) مسافة التوقف	54	90	138	206	292	396

$$d = 41.77 - 1.096v + 0.08786v^2 \quad \text{ج : (ب)}$$

(ج) 170 m, 516 m

٤٠-١٣ الجدول التالى يوضح معدل المواليد لكل 1000 من السكان فى الولايات المتحدة خلال السنوات 1955 — 1915

على فترات كل منها 5 سنوات .

(ا) عبر بيانيا عن هذه البيانات

(ب) وفق قطع مكافئ* باستخدام المربعات الصغرى لهذه البيانات .

(ج) احسب القيم الاتجاهية وقارن بالقيم الفعلية .

(د) وضح السبب فى أن المعادلة التى حصلت عليها فى (ب) غير مفيدة لأهداف الاستنباط

السنة	1915	1920	1925	1930	1935	1940	1945	1950	1955
معدل المواليد لكل 1000 من السكان	25.0	23.7	21.3	18.9	16.9	17.9	19.5	23.6	24.6

المصدر : مصلحة الصحة والتعليم والرعاية الاجتماعية

ج : $Y = 18.16 - 0.1083X + 0.4653X^2$ ، حيث Y هو معدل المواليد لكل 1000 من السكان ووحدة X هي 5 سنوات ونقطة الأصل عند أول يوليو 1935.

١٣-١١ : عدد البكتريا Y الموجودة في وحدة حجم معين في مزرعة بكتريا بعد X ساعة مبينة في الجدول التالي .

(١) ارسم هذه البيانات مستخدماً ورق رسم بياني ذي تقسيم نصف - لوغاريتمى حيث يستخدم المقياس اللوغاريتمى لـ Y والمقياس الحسابى لـ X .

(ب) وفق منحني المربعات الصغرى على الصورة $Y = ab^x$ للبيانات ووضح السبب في أن هذه المعادلة بالذات يجب أن تعطى نتائج جيدة .

(ج) قارن قيم Y التي تحصل عليها من هذه المعادلة مع القيم الفعلية

(د) قدر قيمة Y عند $X = 7$.

عدد الساعات	0	1	2	3	4	5	6
عدد البكتريا في وحدة حجم	32	47	65	92	132	190	275

ج : (ب) $Y = 32.14(1.427)^x$ أو $Y = 32.14 e^{0.3556x}$ حيث $e = 2.718 \dots$ هو الأساس الطبيعي للوغاريتم .

(د) 387

١٣-١٢ : في المسألة السابقة وضح كيف يمكن الحصول على المعادلة المطلوبة برسم البيانات على ورق رسم بياني ذي التقسيم النصف لوغاريتمى وذلك دون استخدام طريقة المربعات الصغرى .

الفصل الرابع عشر

نظرية الارتباط

الارتباط والانحدار :

في الفصل السابق أخذنا في الاعتبار مشكلة الانحدار أو تقدير متغير (المتغير التابع) من متغير أو أكثر على صلة به (المتغيرات المستقلة) . وفي هذا الفصل سندرس مشكلة على علاقة وثيقة بالمشكلة السابقة وهي مشكلة الارتباط ، أو درجة العلاقة بين المتغيرات ، والتي تهدف إلى تحديد مدى جودة وصف معادلة خطية أو غيرها للعلاقة بين المتغيرات .

إذا كانت جميع قيم المتغيرات تحقق معادلة ما بالضبط فنسمى هذه المتغيرات بأنها مرتبطة ارتباطاً كاملاً أو أن هناك ارتباطاً كاملاً بينهم . بهذا فإن محيط الدائرة C ونصف قطرها r لجميع الدوائر مرتبطان ارتباطاً كاملاً نظراً لأن $C = 2\pi r$ أما إذا قذفنا زهرتين 100 مرة متتالية فإنه لا توجد علاقة بين النقط المقابلة في كل زهرة (إلا إذا كان الزهر مميزاً) أي ، أنهم غير مرتبطين . الطول كتغير والوزن كتغير للأشخاص قد يظهر بعض الارتباط .

إذا كان عدد المتغيرات اثنين فقط فإننا نتحدث عن الارتباط البسيط والانحدار البسيط . إذا كان هناك أكثر من متغيرين فإننا نتحدث عن الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد . في هذا الفصل ، سندرس الارتباط البسيط فقط . أما الارتباط المتعدد والانحدار المتعدد فسوف يتم دراستهما في الفصل الخامس عشر .

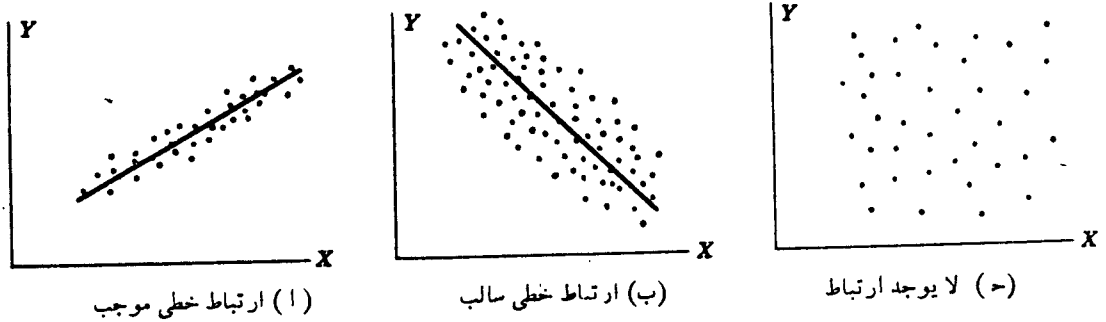
الارتباط الخطي :

اعتبر أن X, Y هما المتغيران موضع الدراسة ، فإن شكل الانتشار يوضح مكان النقط (X, Y) في نظام للاحداثيات المتعامدة . فإذا كانت جميع النقط في شكل الانتشار تبدو أنها تقع بالقرب من خط ، كما في (أ) ، (ب) بالشكل ١٤-١ ، فإن الارتباط يسمى خطياً . في مثل هذه الحالات ، كما درسنا في الفصل الثالث عشرة ، فإنه من الملائم أن نستخدم معادلة خطية لأغراض الانحدار أو التقدير .

فإذا كانت Y تتجه للزيادة كلما ازدادت X ، كما في (أ) ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً موجباً أو ارتباطاً طردياً . وإذا اتجهت Y للنقصان كلما زادت X ، كما في (ب) ، فإن الارتباط يسمى ارتباطاً سالباً أو ارتباطاً عكسياً .

إذا كانت جميع النقاط تتجه لأن تقع بالقرب من منحنى ، فإن الارتباط يسمى ارتباطا غير خطي وفي هذه الحالة فإن معادلة غير خطية تكون ملائمة للانحدار أو التقدير ، كما سبق أن شاهدنا في الفصل الثالث عشر . ومن الواضح أن الارتباط غير الخطي يمكن أحيانا أن يكون موجبا كما يمكن أن يكون سالبا .

إذا لم يكن هناك ما يشير إلى وجود علاقة بين المتغيرات ، كما في الشكل ١-١٤ (ج) ، فإننا نقول إنه لا يوجد ارتباط بينهم ، أو أنهم غير مرتبطين .



شكل ١-١٤

مقاييس الارتباط :

يمكن أن نحدد بصورة وصفية مدى جودة وصف خط أو منحنى للعلاقة بين المتغيرات بملاحظة شكل الانتشار مباشرة . على سبيل المثال ، من الملاحظ أن الخط المستقيم أكثر جدوى في وصف العلاقة بين X و Y في بيانات الشكل ١-١٤ (أ) عنه في وصف بيانات الشكل ١-١٤ (ب) وهذا راجع إلى حقيقة أن انتشار النقاط حول الخط في الشكل ١-١٤ (أ) أفضل .

معادلة الانحدار باستخدام المربعات الصغرى :

سندرس أولا مدى جودة تعبير خط مستقيم عن العلاقة بين متغيرين . لهذا فإننا نحتاج أولا لمعادلات الانحدار باستخدام المربعات الصغرى التي حصلنا عليها في الفصل الثالث عشر . كما سبق أن أوضحنا ، فإن معادلة المربعات الصغرى لخط انحدار Y على X هي

$$(١) \quad Y = a_0 + a_1 X$$

حيث نحصل على a_0 ، a_1 من المعادلات الاعتدالية

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

ومنها

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{(\sum Y)(\sum X^2) - (\sum X)(\sum XY)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \\ a_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum X^2 - (\sum X)^2} \end{aligned} \right\}$$

كذلك ، فإن خط انحدار X على Y هو

$$(٤) \quad X = b_0 + b_1 Y$$

حيث نحصل على b_0 ، b_1 من المعادلات الاعتدالية

$$(٥) \quad \left. \begin{aligned} \sum X &= b_0 N + b_1 \sum Y \\ \sum XY &= b_0 \sum X + b_1 \sum Y^2 \end{aligned} \right\}$$

ومنها

$$(٦) \quad \left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{(\sum X)(\sum Y^2) - (\sum Y)(\sum XY)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \\ b_1 &= \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2} \end{aligned} \right\}$$

المعادلات (١) ، (٥) يمكن كتابتها أيضا على الصورة التالية

$$(٧) \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x \quad \text{و} \quad x = \left(\frac{\sum xy}{\sum y^2} \right) y$$

حيث $y = Y - \bar{Y}$ و $x = X - \bar{X}$

وتساوى معادلتا الانحدار في حالة وحيدة فقط إذا كانت جميع النقط في شكل الانتشار تقع على خط . في هذه الحالة فإن هناك ارتباطا خطيا تاماً بين X و Y .

الخطأ المعياري للتقديرات :

إذا كانت Y_{est} تمثل تقديراً لقيمة Y المقابلة لقيمة معينة X ، مستخدمين المعادلة (١) ، فإن مقياس لانتشار حول خط انحدار Y على X نحصل عليه من الكمية

$$(٨) \quad s_{y.x} = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_{est})^2}{N}}$$

وتسمى بالخطأ المعياري لتقدير Y على X .

إذا استخدمنا خط الانحدار (٤) ، فإن الخطأ المعياري لتقدير X على Y يعرف كالتالي :

$$(٩) \quad s_{X.Y} = \sqrt{\frac{\sum (X - X_{est.})^2}{N}}$$

وبشكل عام فإن $s_{Y.X} \neq s_{X.Y}$.

المعادلة (٨) يمكن كتابتها على الصورة

$$(١٠) \quad s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N}$$

والتي قد تكون أكثر ملائمة للحساب (أنظر المسألة ١٤ - ٣) . ويمكن الحصول على تعبير مماثل للمعادلة (٩)

الخطأ المعياري للتقدير له خصائص ماثلة لخصائص الانحراف المعياري . على سبيل المثال ، إذا رسمنا خطوطاً موازية لخط انحدار Y على X على أبعاد رأسية من الخط تساوي $s_{Y.X}$ ، $2s_{Y.X}$ ، $3s_{Y.X}$ ، فإننا سنجد ، إذا كانت N كبيرة بشكل كاف ، أن 99.7% ، 95% ، 68% من نقط العين تقع بين هذه الخطوط على الترتيب .

كما أن الانحراف المعياري المعدل $s = \sqrt{\frac{N}{N-1}}$ وجد مفيداً في حالة العينات الصغيرة ، كذلك فإن الخطأ المعياري المعدل للتقدير $\hat{s}_{Y.X} = \sqrt{\frac{N}{N-2}} s_{Y.X}$ أيضاً مفيد . ولهذا السبب فإن بعض الإحصائيين يفضلون تعريف (٨) أو (٩) بوضع $N - 2$ بدلاً من N في المقام .

الاختلاف المفسر والاختلاف غير المفسر :

يعرف الاختلاف الكلي Y بأنه $\sum (Y - \bar{Y})^2$ ، أي ، مجموع مربعات انحرافات قيم Y عن الوسط \bar{Y} . كما هو موضح بالمسألة ١٤ - ب يمكن كتابته على الصورة

$$(١١) \quad \sum (Y - \bar{Y})^2 = \sum (Y - Y_{est.})^2 + \sum (Y_{est.} - \bar{Y})^2$$

ويسمى الحد الثاني بالاختلاف المفسر ، وهذه التسمية راجعة إلى أن الاختلافات $Y_{est.} - \bar{Y}$ لها نموذج محدد ، بينما الاختلافات $Y - Y_{est.}$ تسلك سلوكاً عشوائياً أو بصورة لا يمكن التنبؤ بها .

معامل الارتباط :

النسبة بين الاختلافات المفسرة والاختلاف الكلي تسمى معامل التحديد . فإذا كانت الاختلافات المفسرة تساوي صفر ، أي أن الاختلاف الكلي جميعه غير مفسر ، فإن هذه النسبة تساوي الصفر . أما إذا كانت الاختلافات الغير مفسرة تساوي صفر ، أي أن الاختلاف الكلي جميعه مفسر ، فإن النسبة تساوي واحداً . وفي الحالات الأخرى تقع هذه النسبة بين الصفر والواحد .

بما أن النسبة دائماً غير سالبة ، ف نرمز لها بالرمز r^2 . الكمية r ، تسمى بمعامل الارتباط وتعرف كالتالي :

$$(١٢) \quad \sqrt{\frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{est.}} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}}$$

ويتراوح بين -1 ، $+1$. العلامات \pm تستخدم للارتباط الخطي الموجب والارتباط الخطي السالب . لاحظ أن r كمية لا تميز لها أي أنها لا تعتمد على الوحدات المستخدمة .

باستخدام (٨) و (١١) وحقيقة أن الانحراف المعياري ل Y هو

$$(١٣) \quad s_Y = \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{N}}$$

نجد أن (١٢) يمكن كتابتها ، بإهمال الإشارة ، كالتالي :

$$(١٤) \quad r = \sqrt{1 - \frac{s_{Y.X}^2}{s_Y^2}} \quad \text{أو} \quad s_{Y.X} = s_Y \sqrt{1 - r^2}$$

ويمكن إيجاد تعبيرات ماثلة إذا أبدلنا Y و X

في حالة الارتباط الخطي فإن الكمية r تظل كما هي بصرف النظر عما إذا اعتبرنا X أو Y هو المتغير المستقل . بهذا فإن r يعد مقياساً جيداً للارتباط الخطي .

ملاحظة خاصة بمعامل الارتباط :

التعاريف (١٢) أو (١٤) لمعامل الارتباط تعاريف عامة ويمكن استخدامها للعلاقة الغير خطية وكذلك للعلاقة الخطية ، والاختلاف الوحيد هو أن $Y_{\text{est.}}$ تحسب من معادلة انحدار غير خطية بدلا من معادلة الانحدار الخطية والاشارات \pm تحذف . في هذه الحالة المعادلة (٨) التي تعرف الخطأ المعياري للتقدير تعد تعريفاً عاماً .

المعادلة (١٠) والتي تطبق في حالة الانحدار الخطي فقط ، يجب تعديلها . فإذا كانت المعادلة المقدرة ، على سبيل المثال ، هي

$$(١٥) \quad Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n-1} X^{n-1}$$

فإن المعادلة (١٠) تستبدل بالمعادلة

$$(١٦) \quad s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY - \dots - a_{n-1} \sum X^{n-1} Y}{N}$$

وفي هذه الحالة فإن الخطأ المعياري المعدل للتقدير (أنظر المبررات بالصفحة ٣٩١ هو $\sqrt{\frac{N}{N-n}} s_{Y.X}$ حيث المقدار $N - n$ يسمى بعدد درجات الحرية .

يجب التأكيد على أن قيمة r المحسوبة في أية حالة تقيس درجة العلاقة بالنسبة إلى نوع المعادلة المفترضة . فإذا افترضنا معادلة خطية وإذا نتج عن المعادلة (١٢) أو (١٤) قيمة r تقترب من الصفر ، فهذا يعنى أنه لا يوجد تقريباً علاقة خطية بين المتغيرات . ولكن هذا لا يعنى أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرات على الإطلاق ، حيث أنه قد يكون هناك بالفعل علاقة كبيرة غير خطية بين المتغيرات . وبصورة أخرى فإن معامل الارتباط يقيس مدى جودة توفيق المعادلة المفترضة للبيانات . ما لم يوضح خلاف ذلك ، فإن مصطلح معامل الارتباط يستخدم ليعنى الارتباط الخطى .

ويجب إيضاح أن وجود معامل ارتباط مرتفع (أى يقترب من 1 أو -1) لا يعنى وجود علاقة تبعية مباشرة بين المتغيرات . فقد يكون هناك معامل ارتباط مرتفع بين عدد الكتب المنشورة في كل سنة وعدد مباريات الكرة الملعوبة في كل سنة . مثل هذه الأمثلة يشار إليها بأنها ارتباط لامننى له أو ارتباط زائف .

صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى :

إذا افترضنا وجود علاقة خطية بين متغيرين ، فإن المعادلة (١٢) تصبح

$$(١٧) \quad r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$$

حيث $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ (أنظر المسألة ١٤ - ١٠) . هذه الصيغة ، والتي تغطى تلقائياً الإشارة المناسبة لـ r ، تسمى صيغة عزم حاصل الضرب وتظهر بشكل واضح التماثل بين X و Y

فإذا كتبنا

$$(١٨) \quad s_{xy} = \frac{\sum xy}{N}, \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}, \quad s_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}}$$

فإن s_x ، s_y تعبر عن الانحرافات المعيارية للمتغيرات X و Y على الترتيب ، بينما s_x^2 و s_y^2 تعبر عن تبايناتها - المقدار الجديد s_{xy} يسمى تباين X و Y . باستخدام رموز المعادلتين (١٧) ، (١٨) يمكن أن نكتب

$$(١٩) \quad r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

لاحظ أن r لا تعتمد على وحدات قياس X و Y ، كما لا تعتمد على اختيار نقطة الأصل .

صيغة مختصرة للعمليات الحسابية :

الصيغة (١٧) يمكن كتابتها بصورة مكافئة كالآتي :

$$(٢٠) \quad r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

وهذه الصيغة تستخدم غالباً عند حساب r (أنظر المسائل ١٤ - ١٥ ، ١٤ - ١٦) .

وبالنسبة للبيانات المجمعة في جدول لتغيرين أو التوزيع التكرارى لتغيرين (أنظر المسألة ١٤ - ١٧) ، فإنه من الملائم استخدام طريقة الترميز كما في الفصل السابق ، في مثل هذه الحالة نجد أن المعادلة (٢٠) يمكن كتابتها كالتالى :

$$(٢١) \quad r = \frac{N \sum f u_x u_y - (\sum f x u_x)(\sum f y u_y)}{\sqrt{[N \sum f x u_x^2 - (\sum f x u_x)^2][N \sum f y u_y^2 - (\sum f y u_y)^2]}}$$

أنظر المسألة ١٤ - ١٨ . لتسهيل العمليات الحاسبية باستخدام هذه الصيغة ، نستخدم جدول ارتباط (أنظر المسألة ١٤ - ١٩) أما للبيانات المجمعة ، فيمكن كتابة الصيغة (١٨) كالتالى :

$$(٢٢) \quad s_{xy} = c_x c_y \left[\frac{\sum f u_x u_y}{N} - \left(\frac{\sum f x u_x}{N} \right) \left(\frac{\sum f y u_y}{N} \right) \right]$$

$$(٢٣) \quad s_x = c_x \sqrt{\frac{\sum f x u_x^2}{N} - \left(\frac{\sum f x u_x}{N} \right)^2}$$

$$(٢٤) \quad s_y = c_y \sqrt{\frac{\sum f y u_y^2}{N} - \left(\frac{\sum f y u_y}{N} \right)^2}$$

حيث c_x و c_y هو طول الفئة (مفترضاً أنها ثابتة) المقابلة للمتغيرات X و Y على الترتيب . لاحظ أن (٢٣) ، (٢٤) مكافئتان للصيغة (١١) في الفصل الرابع ، صفحة ١١٥ .

الصيغة (١٩) يمكن إثبات أنها مكافئة للصيغة (٢١) إذا استخدمنا النتائج (٢٢) - (٢٤) .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط الخطى :

معادلة خط المربعات الصغرى $Y = a_0 + a_1 X$ ، أو معادلة خط انحدار Y على X ، يمكن كتابتها على الصورة

$$(٢٥) \quad Y - \bar{Y} = \frac{r s_y}{s_x} (X - \bar{X}) \quad \text{أو} \quad y = \frac{r s_y}{s_x} x$$

كذلك فإن خط انحدار X على Y ، $X = b_0 + b_1 Y$ ، يمكن كتابته كالتالى :

$$(٢٦) \quad X - \bar{X} = \frac{r s_x}{s_y} (Y - \bar{Y}) \quad \text{أو} \quad x = \frac{r s_x}{s_y} y$$

ويتساوى ميل الخطوط بالمعادلات (٢٥) ، (٢٦) في حالة وحيدة فقط وهى إذا كانت $r = \pm 1$. في مثل هذه الحالة فإن الخطين متطابقان وهناك علاقة خطية كاملة بين المتغيرين X و Y . أما إذا كانت $r = 0$ فإن الخطين متعامدان ولا يوجد ارتباط خطى بين X و Y . بهذا فإن معامل الارتباط الخطى يقيس بعد خطى الانحدار عن بعضهما .

لاحظ أنه إذا كتبت المعادلتان (٢٥) ، (٢٦) كالتالى : $Y = a_0 + a_1 X$ ، $X = b_0 + b_1 Y$ على الترتيب ، إذن $a_1 b_1 = r^2$ (أنظر المسألة ١٤ - ٢٢)

ارتباط الرتب :

بدلاً من استخدام قيم محددة للمتغيرات ، أو عندما لا يكون مثل هذا التحديد متاحاً ، فإنه يمكن ترتيب البيانات حسب ترتيب حجمها ، أهميتها ، . . . وغير ذلك باستخدام الأرقام $1, 2, \dots, N$. إذا رتبنا متغيرين X و Y بهذه الطريقة فإن معامل ارتباط الرتب كما يلي :

$$(٢٧) \quad r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)}$$

حيث : D = الفروق بين رتب القيم المتقابلة في X ، Y

N = عدد أزواج القيم (X, Y) في البيانات

الصيغة (٢٧) تسمى معامل سبيرمان لارتباط الرتب .

ارتباط السلاسل الزمنية :

إذا كان كل من المتغيرات X ، Y يعتمد على الزمن ، فإنه من الممكن أن توجد علاقة بين X ، Y على الرغم من أن مثل هذه العلاقة ليس بالضرورة أن تكون من نوع التبعية المباشرة ومن الممكن أن تنتج « ارتباطاً مزيفاً » . ونحصل على معامل الارتباط ببساطة باعتبار أزواج القيم (X, Y) المقابلة للأزمان المختلفة ومن ثم نستخدم الصيغ السابقة في الحل . أنظر المسألة ١٤ - ١٨ .

ومن الممكن محاولة ربط قيم المتغير X في زمن معين بالقيم المقابلة لـ X في أزمان سابقة . ويسمى مثل هذا الارتباط بالارتباط الذاتي .

ارتباط الصفات :

الطريق التي استخدمت في هذا الفصل لا تمكننا من الحصول على الارتباط بين متغيرات ليست رقمية بطبيعتها ، مثل صفات الأشخاص (كثال : لون الشعر ، لون العينين ، ... وغيرها) . لمناقشة ارتباط الصفات ، أنظر الفصل الثاني عشر .

نظرية المعاينة للارتباط :

من الممكن اعتبار أن N من أزواج القيم (X, Y) لمتغيرين لعينة من مجتمع مكون من كل الأزواج الممكنة . بما أن لدينا متغيرين فإننا نسمى هذا المجتمع مجتمعاً ذا متغيرين ، والذي يمكن أن نفترض أنه مجتمع طبيعي ذو متغيرين .

ومن الممكن تصور مجتمع نظري لمعامل الارتباط والذي نرمز له بالرمز ρ ، والذي يقدر بمعامل ارتباط العينة r . اختبارات الفروض الخاصة بقيم ρ المختلفة تتطلب معرفة توزيع المعاينة لـ r . عندما تكون $\rho = 0$ فإن شكل التوزيع

يكون مثالا ويمكن استخدام إحصائية تتبع توزيع استودينت . لقيم $p \neq 0$ فإن التوزيع ملتبس . في مثل هذه الحالة تستخدم تحويلة ترجع إلى فيشر ينتج عنها إحصائية تتوزع تقريباً كالتوزيع الطبيعي . وتلخص الاختبارات التالية الأساليب المستخدمة .

١ - اختبار الفرض $p = 0$:

هنا نستخدم حقيقة أن الإحصائية

$$(٢٨) \quad t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

لها توزيع استودينت بدرجات حرية $v = N - 2$. أنظر المسائل ١٤ - ٣٣ ، ١٤ - ٣٤ .

٢ - اختبار الفرض $p = p_0 \neq 0$:

نستخدم هنا حقيقة أن الإحصائية

$$(٢٩) \quad Z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+r}{1-r} \right) = 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)$$

حيث $e = 2.71828$. وهذه الإحصائية تتوزع بشكل تقريبي كالتوزيع الطبيعي متوسطه وانحرافه المعياري كما يلي :

$$(٣٠) \quad \mu_Z = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{1+p_0}{1-p_0} \right) = 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+p_0}{1-p_0} \right), \quad \sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$$

هذه النتيجة يمكن أيضاً استخدامها للحصول على حدود الثقة لمعاملات الارتباط (أنظر المسائل ١٤ - ٣٥ ، ١٤ - ٣٦) . التحويل (٢٩) تسمى تحويلة Z للعالم فيشر .

٢ - معنوية الفرق بين معاملات الارتباط :

لتحديد ما إذا كان معاملا الارتباط r_1, r_2 المسحوبان من عيّنتين N_1, N_2 على الترتيب ، يختلفان عن بعضهما اختلافاً معنوياً ، نحسب Z_1, Z_2 المقابلين لـ r_1, r_2 باستخدام المعادلة (٢٩) . ثم نستخدم بذلك حقيقة أن إحصائية الاختبار

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - \mu_{Z_1-Z_2}}{\sigma_{Z_1-Z_2}}$$

(٣١)

$$\mu_{Z_1-Z_2} = \mu_{Z_1} - \mu_{Z_2} \quad , \quad \sigma_{Z_1-Z_2} = \sqrt{\sigma_{Z_1}^2 + \sigma_{Z_2}^2} = \sqrt{\frac{1}{N_1-3} + \frac{1}{N_2-3}} \quad \text{حيث}$$

تتوزع توزيعاً طبيعياً (أنظر المسألة ١٣ - ٣٧) .

نظرية المعاينة للانحدار :

معادلة الانحدار $Y = a_0 + a_1 X$ نحصل عليها على أساس بيانات العينة . و أغلب الأحيان نهتم بمعادلة الانحدار للمجتمع الذى سحبت منه العينة . وفيما يلي اختبار ان خاصان يمثل هذا المجتمع .

١ - اختبار الفرض $a_1 = A_1$:

لاختبار الفرض أن معامل الانحدار a_1 يساوى قيمة محددة A_1 ، فإننا نستخدم حقيقة أن الإحصائية

$$(٢٢) \quad t = \frac{a_1 - A_1}{s_{Y.X}/s_X} \sqrt{N-2} = \frac{a_1 - A_1}{\sqrt{1-r^2}} \sqrt{N-2}$$

تتبع توزيع استودينت ب درجات حرية $N - 2$. ويمكن استخدام ذلك للحصول على فترات ثقة لمعامل الانحدار للمجتمع باستخدام قيم العينة . أنظر المسائل ١٤ - ٣٨ و ١٤ - ٣٩ .

٢ - اختبار الفرض للقيم المتنبأ بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن القيمة المتنبأ بها ل Y المقابلة ل $X = X_0$ كما هي مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة . أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن Y_p تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ للمجتمع . إذن الإحصائية

$$(٢٣) \quad t = \frac{Y_0 - Y_p}{s_{Y.X} \sqrt{N+1 + (X_0 - \bar{X})^2 / s_X^2}} \sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - Y_p}{\hat{s}_{Y.X} \sqrt{1 + 1/N + (X_0 - \bar{X})^2 / (N s_X^2)}}$$

تتبع توزيع استودينت ب درجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود ثقة لقيم المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ - ٤٠)

٣ - اختبار الفرض لقيم المتوسط المتنبأ بها :

إذا كانت Y_0 تعبر عن قيمة Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ كما هي مقدرة من معادلة الانحدار المحسوبة من العينة ، أى أن $Y_0 = a_0 + a_1 X_0$. اعتبر أن \bar{Y}_p تعبر عن القيمة المتوسطة ل Y المتنبأ بها المقابلة ل $X = X_0$ للمجتمع . إذن الإحصائية

$$(٢٤) \quad t = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{s_{Y.X} \sqrt{1 + (X_0 - \bar{X})^2 / s_X^2}} \sqrt{N-2} = \frac{Y_0 - \bar{Y}_p}{\hat{s}_{Y.X} \sqrt{1/N + (X_0 - \bar{X})^2 / (N s_X^2)}}$$

تتبع توزيع استودينت ب درجات حرية $N - 2$. ومنها يمكن أن نحصل على حدود الثقة لقيم متوسط المجتمع المتنبأ بها . (أنظر المسألة ١٤ - ٤١) .

مسائل محلولة

اشكال الانتشار وخطوط الانحدار :

١-١٤ الجدول ١-١٤ يوضح أوزان عينة مكونة من 12 أب (X) وأكبر الأبناء Y .

(أ) ارسم شكل الانتشار

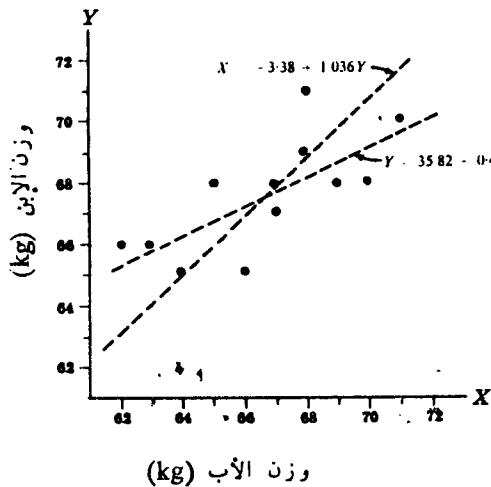
(ب) أوجد خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الممغنرى .

(ج) أوجد خط انحدار X على Y باستخدام المربعات الصغرى .

جدول ١-١٤

الوزن X للأب (kg)	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
الوزن Y للإبن (kg)	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

الحل :



وزن الأب (kg)

شكل ١-١٤

(أ) نحصل على شكل الانتشار بتوقيع النقط

(X, Y) في نظام للأحداثيات المتعامدة

موضح كما هو بالشكل ١-١٤ .

(ب) خط انحدار Y على X يعطى بالمعادلة

$Y = a_0 + a_1 X$ حيث a_1 و a_0

نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتنالية

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{aligned} \right\}$$

المجاميع موضحة بالجدول ١-١٤ ،

وبهذا تصبح المعادلات الاعتنالية

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 + 800a_1 &= 811 \\ 800a_0 + 53418a_1 &= 54107 \end{aligned} \right\}$$

ومنها نجد أن $a_0 = 35.82$ و $a_1 = 0.476$ بحيث تكون $Y = 35.82 + 0.476X$

رسم هذه المعادلة موضحة بالشكل ١-١٤ .

جدول ١٤ - ٢

X	Y	X ²	XY	Y ²
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
ΣX = 800	ΣY = 811	ΣX ² = 53 418	ΣXY = 54 107	ΣY ² = 54 849

طريقة أخرى :

$$a_0 = \frac{(\Sigma Y)(\Sigma X^2) - (\Sigma X)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 35.82,$$

$$a_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2}$$

(ح) خط انحدار X على Y يعطى بالمعادلة $X = b_0 + b_1 Y$ حيث b_0 ، b_1 نحصل عليهما بحل المعادلات الاعتدالية :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= b_0 N + b_1 \Sigma Y \\ \Sigma XY &= b_0 \Sigma Y + b_1 \Sigma Y^2 \end{aligned} \right\}$$

باستخدام المجاميع بالجدول ١٤ - ٢ ، تصبح هذه

$$\left. \begin{aligned} 12b_0 + 811b_1 &= 800 \\ 811b_0 + 54 849b_1 &= 54 107 \end{aligned} \right\}$$

ومنها نجد أن $b_0 = - 3.38$ ، $b_1 = 1.036$. بحيث تكون $X = - 3.38 + 1.036 Y$.
رسم هذه المعادلة موضح بالشكل ١٤ - ٢ .

طريقة أخرى :

$$b_0 = \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y^2) - (\Sigma Y)(\Sigma XY)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = - 3.38. \quad b_1 = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma Y)(\Sigma X)}{N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2} = 1.036$$

١٤ - ٢ حل المسألة ١٤ - ١ (ب) و ١٤ - ١ (ح) باستخدام خطوط الانحدار

$$y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x \quad , \quad x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) y$$

حيث $y = Y - \bar{Y}$ ، $x = X - \bar{X}$

الحل :

الطريقة الأولى : يمكن تنظيم العمل كما في الجدول ١٤ - ٣ .

جدول ١٤ - ٤

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
65	68	-1.7	0.4	2.89	-0.68	0.16
63	66	-3.7	-1.6	13.69	5.92	2.56
67	68	0.3	0.4	0.09	0.12	0.16
64	65	-2.7	-2.6	7.29	7.02	6.76
68	69	1.3	1.4	1.69	1.82	1.96
62	66	-4.7	-1.6	22.09	7.52	2.56
70	68	3.3	0.4	10.89	1.32	0.16
66	65	-0.7	-2.6	0.49	1.82	6.76
68	71	1.3	3.4	1.69	4.42	11.56
67	67	0.3	-0.6	0.09	-0.18	0.36
69	68	2.3	0.4	5.29	0.92	0.16
71	70	4.3	2.4	18.49	10.32	5.76
$\Sigma X = 800$ $\bar{X} = 800/12$ $= 66.7$	$\Sigma Y = 811$ $\bar{Y} = 811/12$ $= 67.6$			$\Sigma x^2 = 84.68$	$\Sigma xy = 40.34$	$\Sigma y^2 = 38.92$

خط انحدار Y على X يساوى $y = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} \right) x = \left(\frac{40.34}{84.68} \right) x \approx 0.476x$ or $Y - 67.6 = 0.476(X - 66.7)$.

خط انحدار X على Y يساوى $x = \left(\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2} \right) y = \left(\frac{40.34}{38.92} \right) y = 1.036y$ or $X - 66.7 = 1.036(Y - 67.6)$.

وهذا يتفق مع نتائج المسألة ١٤ - ١ .

الطريقة الثانية :

اطرح مقداراً ثابتاً ملائماً ، وليكن 60 ، من كل قيمة من قيم X و Y ثم تابع الحل كما في الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٧ ، الفصل الثالث عشر .

جدول ١٤ - ٤

X'	Y'	X'^2	$X'Y'$	Y'^2
5	8	25	40	64
3	6	9	18	36
7	8	49	56	64
4	5	16	20	25
8	9	64	72	81
2	6	4	12	36
10	8	100	80	64
6	5	36	30	25
8	11	64	88	121
7	7	49	49	49
9	8	81	72	64
11	10	121	110	100
$\Sigma X' = 80$	$\Sigma Y' = 91$	$\Sigma X'^2 = 618$	$\Sigma X'Y' = 647$	$\Sigma Y'^2 = 729$

$$a^1 = \frac{N \sum X'Y' - (\sum Y')(\sum X')}{N \sum X'^2 - (\sum X')^2} \quad b^1 = \frac{N \sum X'Y' - (\sum Y')(\sum X')}{N \sum Y'^2 - (\sum Y')^2} = 1.036 \quad \text{إذن}$$

بما أن $\bar{X} = 60 + 80/12 = 66.7$ and $\bar{Y} = 60 + 91/12 = 67.6$. فإن معادلات الانحدار المطلوبة هي كما سبق.

لاحظ أنه لو حسبنا a_0 ، b_0 بهذه الطريقة ، فإننا لن نحصل على نفس النتائج السابقة حيث أنها يعتمدان على اختيار نقطة الأصل . وعلى هذا فإن الطريقة تستخدم فقط للحصول على a_1 ، b_1 وهما لا يعتمدان على اختيار نقطة الأصل .

الخطأ المعياري للتقدير :

٣-١٤ إذا كانت معادلة انحدار Y على X هي $Y = a_0 + a_1 X$ ، أثبت أن الخطأ المعياري للتقدير $s_{Y.X}$ يعرف كالآتي :

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N}$$

الحل :

قيمة Y المقدرة من خط الانحدار تعطى بالمعادلة $Y_{est} = a_0 + a_1 X$ إذن

$$\begin{aligned} s_{Y.X}^2 &= \frac{\sum (Y - Y_{est})^2}{N} = \frac{\sum (Y - a_0 - a_1 X)^2}{N} \\ &= \frac{\sum Y(Y - a_0 - a_1 X) - a_0 \sum (Y - a_0 - a_1 X) - a_1 \sum X(Y - a_0 - a_1 X)}{N} \end{aligned}$$

لكن

$$\begin{aligned} \sum (Y - a_0 - a_1 X) &= \sum Y - a_0 N - a_1 \sum X = 0 \\ \sum X(Y - a_0 - a_1 X) &= \sum XY - a_0 \sum X - a_1 \sum X^2 = 0 \end{aligned}$$

و

ومن المعادلات الاعتنالية

$$\begin{cases} \sum Y = a_0 N + a_1 \sum X \\ \sum XY = a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 \end{cases}$$

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum Y(Y - a_0 - a_1 X)}{N} = \frac{\sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY}{N} \quad \text{إذن}$$

هذه النتيجة يمكن أن تعمم لتشمل معادلات الانحدار غير الخطية .

١٤ - ٤ إذا كانت $x = X - \bar{X}$ و $y = Y - \bar{Y}$ ، أثبت أن نتيجة المسألة ١٤ - ٣ يمكن كتابتها كالآتي :

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum y^2 - a_1 \sum xy}{N}$$

الحل :

من المسألة ١٤ - ٣ ، حيث $X = x + \bar{X}$ و $Y = y + \bar{Y}$ ، فإن

$$\begin{aligned} N s_{Y.X}^2 &= \sum Y^2 - a_0 \sum Y - a_1 \sum XY = \sum (y + \bar{Y})^2 - a_0 \sum (y + \bar{Y}) - a_1 \sum (x + \bar{X})(y + \bar{Y}) \\ &= \sum (y^2 + 2y\bar{Y} + \bar{Y}^2) - a_0 (\sum y + N\bar{Y}) - a_1 \sum (xy + \bar{X}y + x\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}) \\ &= \sum y^2 + 2\bar{Y} \sum y + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \sum xy - a_1 \bar{X} \sum y - a_1 \bar{Y} \sum x - a_1 N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \sum y^2 + N\bar{Y}^2 - a_0 N\bar{Y} - a_1 \sum xy - a_1 N\bar{X}\bar{Y} = \sum y^2 - a_1 \sum xy + N\bar{Y}(\bar{Y} - a_0 - a_1 \bar{X}) \\ &= \sum y^2 - a_1 \sum xy \end{aligned}$$

حيث استخدمنا النتائج $\sum x = 0$ ، $\sum y = 0$ و $\bar{Y} = a_0 + a_1 \bar{X}$ (والتي تنتج من قسمة طرفي المعادلة الاعتدالية $\sum Y = a_0 N + a_1 \sum X$ على N) .

١٤ - ٥ احسب الخطأ المعياري للتقدير ، $s_{Y.X}$ لبيانات المسألة ١٤ - ١ باستخدام :

(أ) التعريف (ب) نتيجة المسألة ١٤ - ٤ .

الحل :

(أ) من المسألة ١٤ - ١ (ب) خط انحدار Y على X هو $Y = 35.82 + 0.476X$. يبين الجدول

١٤ - ٥ قيم Y الفعلية (من جدول المسألة ١٤ - ١) وقيم Y المقدرة ، معبراً عنها بالرمز Y_{est}

كما حصلنا عليها من خط الانحدار على سبيل المثال ، المقابلة لقيمة $X = 65$

$$Y_{est.} = 35.82 + 0.476(65) = 66.76 \quad \text{فإن}$$

كذلك يوضح الجدول القيم $s = Y - Y_{est.}$ ، التي نحتاج إليها في حساب $s_{Y.X}$

جدول ١٤ - ٥

X	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70
$Y_{est.}$	66.76	65.81	67.71	66.28	68.19	65.33	69.14	67.24	68.19	67.71	68.66	69.62
$Y - Y_{est.}$	1.24	0.19	0.29	-1.28	0.81	0.67	-1.14	-2.24	2.81	-0.71	-0.66	0.38

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum (Y - Y_{est.})^2}{N} = \frac{(1.24)^2 + (0.19)^2 + \dots + (0.38)^2}{12} = 1.642 \quad \text{إذن}$$

$$s_{Y.X} = \sqrt{1.642} = 1.28 \text{ kg}$$

(ب) من المسائل ١ ، ٢ ، ٤ ، ٤

$$s_{Y.X}^2 = \frac{\sum y^2 - a_1 \sum xy}{N} = \frac{38.92 - 0.476(40.34)}{12} = 1.643$$

$$s_{Y.X} = \sqrt{1.643} = 1.28 \text{ kg}$$

١٤ - ٦ (أ) ارسم خطين متوازيين لخط انحدار المسألة ١٤ - ١ وعلى بعد رأسى يساوى $s_{Y.X}$

(ب) حدد نسبة نقط البيانات التى تقع بين هذين الخطين .

الحل :

(أ) خط الانحدار

$$Y = 35.82 + 0.476X \text{ كما}$$

حصلنا عليه فى المسألة ١٤ - ١ موضح

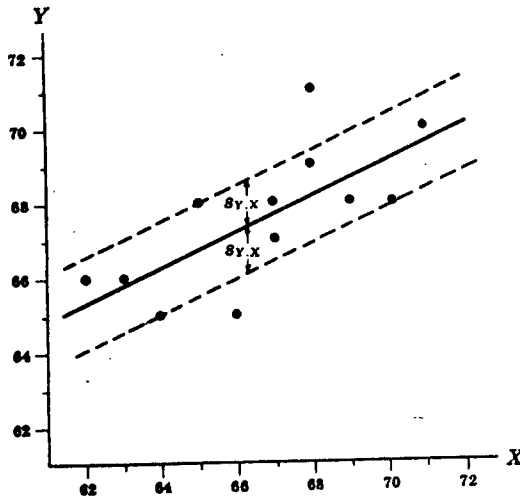
بخط ثقيل فى الشكل ١٤ - ٣ . والخطان

المتوازيان ، كلاهما على بعد رأسى

 $s_{Y.X} = 1.28$ منه (أنظر المسألة

١٤ - ٥) ، موضحيان بخطوط متقطعة

بالشكل ١٤ - ٣



شكل ١٤ - ٣

(ب) من الشكل يمكن مشاهدة أنه من الـ 12

نقطة من نقط البيانات تقع 7 نقط بين

الخطوط بينما يظهر 3 تقع على الخطوط

بمزيد من النقص باستخدام السطر الأخير

فى الجدول ١٤ - ٥ بالمسألة ١٤ - ٥ ،

على سبيل المثال ، يتضح أن نقطتين من

الـ 3 نقط تقع بين الخطوط . وبهذا فإن

النسبة المطلوبة = $75\% = 9/12$

طريقة أخرى :

من السطر الأخير بالجدول ١٤ - ٥ بالمسألة ١٤ - ٥ ، $Y - Y_{est}$ ، تقع بين 1.28و 1.28 - (أى $\pm s_{Y.X}$) . لـ 9 نقط (X, Y) . بهذا فإن النسبة المثوية المطلوبة هى $75\% = 9/12$.

إذا كانت النقط تتوزع توزيعاً طبيعياً حول خط الانحدار ، فإن النظرية تتنبأ بأن حوالى 68% من النقط تقع بين الخطوط . وهذه تكون تقريباً الحالة إذا كان الحجم العينة كبيراً .

ملحوظة : هناك تقدير أفضل للخطأ المعياري في تقدير المجتمع الذي سمحت منه عينة الأطوال يعطى بالصيغة

$$\hat{s}_{Y.X} = \sqrt{N/(N-2)}s_{Y.X} = \sqrt{12/10}(1.28) = 1.40 \text{ kg.}$$

الانحراف المفسر والانحراف غير المفسر .

$$١٤ - \text{أثبت أن } \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{\text{est}})^2 + \Sigma(Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2$$

الحل :

بتربيع طرفى المعادلة $Y - \bar{Y} = (Y - Y_{\text{est}}) + (Y_{\text{est}} - \bar{Y})$ ثم التجميع ، نحصل على

$$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma(Y - Y_{\text{est}})^2 + \Sigma(Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2 + 2 \Sigma(Y - Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}} - \bar{Y})$$

النتيجة المطلوبة نحصل عليها مباشرة إذا أمكن إثبات أن الحد الأخير يساوى صفر ، وهذه هى حالة الانحدار

الخطى نظراً لأن

$$\begin{aligned} \Sigma(Y - Y_{\text{est}})(Y_{\text{est}} - \bar{Y}) &= \Sigma(Y - a_0 - a_1X)(a_0 + a_1X - \bar{Y}) \\ &= a_0 \Sigma(Y - a_0 - a_1X) - a_1 \Sigma X(Y - a_0 - a_1X) - \bar{Y} \Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma(Y - a_0 - a_1X) = 0 \text{ and } \Sigma X(Y - a_0 - a_1X) = 0 \quad \text{ولأنه فى المعادلات الاعتدالية}$$

هذه النتيجة يمكن إثبات صلاحيتها للانحدار غير الخطى باستخدام منحنى المربعات الصغرى المعروف بما يلي

$$Y_{\text{est}} = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

$$١٤ - \text{أحسب (أ) الاختلاف الكلى . (ب) الاختلاف الغير مفسر .}$$

$$\text{(ج) الاختلاف المفسر وذلك لبيانات المسألة ١٤-١.}$$

الحل :

$$\text{(أ) الاختلاف الكلى } \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma y^2 = 38.92 \quad \text{من المسألة ١٤-٢}$$

$$\text{(ب) الاختلاف الغير مفسر } \Sigma(Y - Y_{\text{est}})^2 = N s_{Y.X}^2 = 19.70 \quad \text{من المسألة ١٤-٥}$$

$$\text{(ج) الاختلاف المفسر } \Sigma(Y_{\text{est}} - \bar{Y})^2 = 38.92 - 19.70 = 19.22 \quad \text{من المسألة ١٤-٧}$$

طريقة أخرى :

بما أن $\bar{Y} = 811/112 = 67.58$ ، فيمكن تكوين الجدول التالي باستخدام قيم Y_{est} التي حصلنا عليها بالجدول ١٤ - ٥ بالمسألة ١٤ - ٥ .

-0.82	-1.77	0.13	-1.30	0.61	-2.25	1.56	-0.34	0.61	0.13	1.08	2.04
-------	-------	------	-------	------	-------	------	-------	------	------	------	------

$$\Sigma(Y_{est.} - \bar{Y})^2 = (-0.82)^2 + (-1.77)^2 + \dots + (2.04)^2 = 19.21 \quad \text{إذن}$$

ويمكن الحصول على نتائج (أ) و (ب) مباشرة .

معامل الارتباط :

١٤ - ٩ أوجد (أ) معامل التحديد . (ب) معامل الارتباط . لبيانات المسألة ١٤ - ١ . استخدم نتائج المسألة ١٤ - ٨

الحل :

$$r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{19.22}{38.92} = 0.4938 \quad (١)$$

$$\text{معامل الارتباط} = r = \pm \sqrt{0.4938} = \pm 0.7027 \quad (ب)$$

بما أن المتغير $Y_{est.}$ يتزايد كلما تزايدت قيمة X ، فإن الارتباط موجب ويمكن بذلك أن نكتب $r = 0.7027$ أو $r = 0.70$ لرقين معنويين .

١٤ - ١٠ أثبت أن معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y يمكن كتابته في حالة الانحدار الخطي كالاتي :

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)}}$$

$$\text{حيث } y = Y - \bar{Y} \text{ و } x = X - \bar{X}$$

الحل :

خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى يمكن كتابته على الصورة $Y_{est.} = a_0 + a_1 X$

أو $y_{est.} = a_1 x$ ، حيث $a_1 = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ و $y_{est.} = Y_{est.} - \bar{Y}$ (أنظر المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر) إذن

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{\Sigma (Y_{est.} - \bar{Y})^2}{\Sigma (Y - \bar{Y})^2} = \frac{\Sigma y_{est.}^2}{\Sigma y^2} \\ &= \frac{\Sigma a_1^2 x^2}{\Sigma y^2} = \frac{a_1^2 \Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2})^2 \Sigma x^2}{\Sigma y^2} = \frac{(\Sigma xy)^2}{(\Sigma x^2)(\Sigma y^2)} \end{aligned}$$

و $r = \pm \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ بما أن المقدار موجب في حالة حالة ما إذا زادت y مع x كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى موجب) وسالب إذا تناقصت y كلما زادت x (أى ، ارتباط خطى سالب) فيظهر في الصيغة الإشارة الصحيحة تلقائياً . بهذا نعرف معامل الارتباط الخطى بأنه

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$$

وهذا يسمى غالباً بصيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى .

عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط الخطى :

١١-١٤ أوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين X و Y المبينين في الجدول ١٤ - ٦

جدول ١٤ - ٦

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

الحصل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب في الحسابات كما في الجدول ١٤ - ٧

جدول ١٤ - ٧

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
1	1	-6	-4	36	24	16
3	2	-4	-3	16	12	9
4	4	-3	-1	9	3	1
6	4	-1	-1	1	1	1
8	5	1	0	1	0	0
9	7	2	2	4	4	4
11	8	4	3	16	12	9
14	9	7	4	49	28	16
$\sum X = 56$ $\bar{X} = 56/8 = 7$	$\sum Y = 40$ $\bar{Y} = 40/8 = 5$			$\sum x^2 = 132$	$\sum xy = 84$	$\sum y^2 = 56$

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{84}{\sqrt{(132)(56)}} = 0.977$$

وهذا يوضح أن هناك ارتباطاً خطياً قوياً جداً بين المتغيرات ، كما لاحظنا بالفعل في المسائل ١٣ - ٨ و ١٣ - ١٢ .
بالفصل الثالث عشر .

١٢-١٤ أوجد (أ) الانحراف المعياري لـ X ، (ب) الانحراف المعياري لـ Y ، (ج) تباين X ، (د) تباين Y (هـ) تباين X و Y وذلك لبيانات المسألة ١١-١٤

الحل :

$$\text{الانحراف المعياري لـ } X = s_x = \sqrt{\frac{\sum (X - \bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\frac{132}{8}} = 4.06 \quad (أ)$$

$$\text{الانحراف المعياري لـ } Y = s_y = \sqrt{\frac{\sum (Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} = \sqrt{\frac{56}{8}} = 2.65 \quad (ب)$$

$$\text{تباين } X = s_x^2 = 16.50 \quad (ج)$$

$$\text{تباين } Y = s_y^2 = 7.00 \quad (د)$$

$$\text{تباين } X \text{ و } Y = s_{xy} = \frac{\sum xy}{N} = \frac{84}{8} = 10.50 \quad (هـ)$$

١٣-١٤ اثبت الصيغة $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ لبيانات المسألة ١١-١٤

الحل :

من المسألة ١٢-١٤ $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{10.50}{(4.06)(2.65)} = 0.976$ وذلك بالاتفاق (فيما عدا أخطاء التقريب) مع نتائج المسألة ١١-١٤ .

١٤-١٤ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب ، أوجد معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١١-١٤

الحل :

يمكن ترتيب العمل المطلوب في الحساب كما في الجدول ١٤-٣ بالمسألة ١٤-٢ . إذن

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{40.34}{\sqrt{(84.68)(38.92)}} = 0.7027$$

وهذا يتفق مع الطريقة المطولة المستخدمة في المسألة ١٤-١٩

١٥-١٤ وضع أن معامل الارتباط الخطي يعرف كالآتي :

$$r = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[N \sum X^2 - (\sum X)^2][N \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

الحل :

بكتابة $x = X - \bar{X}$ ، $y = Y - \bar{Y}$ في نتيجة المسألة ١٠ ، نحصل على

$$(١) \quad r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{[\sum (X - \bar{X})^2][\sum (Y - \bar{Y})^2]}}$$

$$\begin{aligned}\Sigma (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) &= \Sigma (XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y}) = \Sigma XY - \bar{X} \Sigma Y - \bar{Y} \Sigma X + N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} - N\bar{Y}\bar{X} + N\bar{X}\bar{Y} = \Sigma XY - N\bar{X}\bar{Y} \\ &= \Sigma XY - \frac{(\Sigma X)(\Sigma Y)}{N}\end{aligned}$$

$$\bar{X} = (\Sigma X)/N \text{ and } \bar{Y} = (\Sigma Y)/N \quad \text{ونظراً لأن}$$

$$\begin{aligned}\Sigma (X - \bar{X})^2 &= \Sigma (X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2) = \Sigma X^2 - 2\bar{X} \Sigma X + N\bar{X}^2 \\ &= \Sigma X^2 - \frac{2(\Sigma X)^2}{N} + \frac{(\Sigma X)^2}{N} = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}\end{aligned}$$

$$\Sigma (Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{N} \quad \text{و هذا تصبح (١) في الصورة :$$

$$r = \frac{\Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)/N}{\sqrt{[\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2/N][\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2/N]}} = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}}$$

١٦-١٤ استخدم صيغة المسألة ١٤ - ١٥ للحصول على معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١٤ - ١ .

الحل :

من الجدول ١٤ - ٢ بالمسألة ١٤ - ١ ، نحصل على

$$\begin{aligned}r &= \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} \\ &= \frac{(12)(54107) - (800)(811)}{\sqrt{[(12)(53418) - (800)^2][(12)(54849) - (811)^2]}} = 0.7027\end{aligned}$$

كافي المسألة ١٤ - ٩ و ١٤ - ١٤ .

طريقة أخرى :

قيمة r مستقلة عن اختيار نقطة الأصل في X و Y . بهذا يمكن استخدام الطريقة الثانية بالمسألة ١٤ - ٢ للحصول على :

$$r = \frac{N \Sigma X'Y' - (\Sigma X')(\Sigma Y')}{\sqrt{[N \Sigma X'^2 - (\Sigma X')^2][N \Sigma Y'^2 - (\Sigma Y')^2]}} = \frac{12(647) - (80)(91)}{\sqrt{[(12)(618) - (80)^2][(12)(729) - (91)^2]}} = 0.7027$$

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٧-١٤ الجدول ١٤ - ٨ يوضح التوزيع التكراري للدرجات النهائية لـ 100 طالب في مادتي الرياضة والطبيعة . بالرجوع إلى هذا الجدول أوجد

- عدد الطلبة الذين حصلوا على الدرجات 79 -- 70 في الرياضة و 89 و 80 في الطبيعة .
- النسبة المئوية للطلبة الذين حصلوا في الرياضة على درجات أقل من 70 .
- عدد الطلبة الذين حصلوا على درجات 70 أو أكثر في الطبيعة وأقل من 80 في الرياضة .
- النسبة المئوية للطلبة الذين نجحوا في كل من الطبيعة والرياضة مفترضاً أن 60 هو الحد الأدنى لدرجة النجاح .

جدول ١٤ - ٨

درجات الرياضة

	40 — 49	50 — 59	60 — 69	70 — 79	80 — 89	90 — 99	المجموع
90 — 99				2	4	4	10
80 — 89			1	4	6	5	16
70 — 79			5	10	8	1	24
60 — 69	1	4	9	5	2		21
50 — 59	3	6	6	2			17
40 — 49	3	5	4				12
المجموع	7	15	25	23	20	10	100

الحل :

(أ) اتجه إلى أسفل في العمود المعنون 79 — 70 (درجات الرياضة) إلى الصف المعنون 89 — 80 (درجات الطبيعة) الخلية المشتركة وهي 4 تعطى عدد الطلبة المطلوب .

(ب) العدد الكلي للطلبة الذين درجاتهم في الرياضة أقل من 70 = العدد الذي درجاته 49 — 40 + العدد الذي درجاته 59 — 50 + العدد الذي درجاته 69 — 60 = 47 = 25 + 15 + 7 . النسبة المئوية للطلبة الذين درجاتهم في الرياضة أقل من 70 هو : $47 / 100 = 47\%$

(ج) عدد الطلبة المطلوب هو مجموع العناصر في الجدول ١٤ - ٩ ، والذي يمثل جزءاً من الجدول ١٤ - ٨ .
عدد الطلبة المطلوب = 22 = 1 + 5 + 2 + 4 + 10

جدول ١٤ - ١٠

درجات الرياضة

	60 — 69	70 — 79
90 — 99		2
80 — 89	1	4
70 — 79	5	10

جدول ١٤ - ٩

درجات الرياضة

	40 — 49	50 — 59
50 — 59	3	6
40 — 49	3	5

(د) بالرجوع إلى الجدول ١٠ - ١٤ والمأخوذ من الجدول ١٤ - ٨ ، يتضح أن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم أقل من 60 في كل من الرياضة والطبيعة هو $17 = 5 + 6 + 3 + 3$. وبهذا فإن عدد الطلبة الذين كانت درجاتهم 60 أو أكثر في كل من الطبيعة والرياضة هو $83 = 100 - 17$ ، والنسبة المئوية المطلوبة هي $83\% = 83 / 100$.

الجدول ١٤ - ٨ يسمى أحياناً جدولاً تكرارياً لمتغيرين أو توزيعاً تكرارياً ذا متغيرين ، كل مربع في الجدول يسمى خلية ويقابل زوجين من الفئات . الرقم الموضح في الخلية يسمى تكرار الخلية . على سبيل المثال ، في الجزء (أ) الرقم 4 هو تكرار الخلية المقابل لأزواج الفئات 79 — 70 في الرياضة و 89 — 80 في الطبيعة .

المجاميع الموضحة في الصف الأخير وفي العمود الأخير تسمى بالمجاميع الهامشية أو التكرارات الهامشية . وهى تقابل على الترتيب تكرارات الفئات للتوزيع التكرارى للرياضة إذا اعتبر بمفرده والتوزيع التكرارى للطبيعة بمفرده .

١٨-١٤ وضع كيف تعدل صيغة المسألة ١٤ - ١٥ بحيث تنطبق في حالة البيانات المجمعة في الجدول التكرارى المزدوج (جدول ١٤ - ٨) للمسألة ١٤ - ١٧ .

الحل :

للبيانات المجمعة ، يمكن أن نعتبر القيم المختلفة للمتغيرات X و Y تتفق مع مراكز الفئات بيننا f_X و f_Y هي التكرارات المقابلة للفئات أو التكرارات الهامشية الموضحة في الصف الأخير والعمود الأخير .

لجدول التكرارى المزدوج (ذى المتغيرين) . إذا اعتبرنا f تمثل تكرارات الخلايا المختلفة المقابلة لأزواج مراكز الفئات (X و Y) ، إذن يمكن أن نحل محل الصيغة ١٤ - ١٥ ، الصيغة التالية

$$(١) \quad r = \frac{N \sum f_{XY} - (\sum f_X X)(\sum f_Y Y)}{\sqrt{[N \sum f_X X^2 - (\sum f_X X)^2][N \sum f_Y Y^2 - (\sum f_Y Y)^2]}}$$

إذا اعتبرنا $Y = B + c_Y u_Y$ و $X = A + c_X u_X$ حيث c_Y و c_X هي طول الفئة (بفرض أنها ثابتة) A و B هي مراكز فئات اختيارية مقابلة للمتغيرات ، فإن الصيغة السابقة تصبح :

$$(٢) \quad r = \frac{N \sum f_{u_X u_Y} - (\sum f_{u_X})(\sum f_{u_Y})}{\sqrt{[N \sum f_{u_X}^2 - (\sum f_{u_X})^2][N \sum f_{u_Y}^2 - (\sum f_{u_Y})^2]}}$$

وهذه هي طريقة الترميز المستخدمة في الفصول السابقة كطريقة مختصرة لحساب المتوسطات ، الانحرافات المعيارية والمزوم الأعلى رتبة .

١٩-١٤ أوجد معامل الارتباط الخطى لدرجات الرياضة والطبيعة بالمسألة ١٤ - ١٧ .

الحل :

نستخدم الصيغة (٢) بالمسألة ١٤ - ١٨ . ويمكن ترتيب الحل كما في الجدول ١٤ - ١١ والذي يسمى بجدول الارتباط المجاميع $\sum f_X$, $\sum f_X u_X$, $\sum f_X u_X^2$, $\sum f_Y$, $\sum f_Y u_Y$ and $\sum f_Y u_Y^2$ نحصل عليها باستخدام طريقة الترميز كما في الفصول السابقة .

جداول ١٤ - ١١

		درجات الرياضة							f_r	$f_r u_r$	$f_r u_r^2$	مجموع الأرقام بالرمعات الجانبية في كل عمود
		X	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5				
درجات الطبيعة Y	Y	u_x u_y	-2	-1	0	1	2	3				
	94.5	2				2	4	4	10	20	40	44
	84.5	1			1	4	6	5	16	16	16	31
	74.5	0			5	10	8	1	24	0	0	0
	64.5	-1	1	4	9	5	2		21	-21	21	-3
	54.5	-2	3	6	6	2			17	-34	68	20
	44.5	-3	3	5	4				12	-36	108	33
f_x			7	15	25	23	20	10	$\Sigma f_x = \Sigma f_r = N = 100$	$\Sigma f_r u_r = -55$	$\Sigma f_r u_r^2 = 253$	$\Sigma f u_x u_r = 125$
$f_x u_x$			-14	-15	0	23	40	30	$\Sigma f_x u_x = 64$	مراجعة		
$f_x u_x^2$			28	15	0	23	80	90	$\Sigma f_x u_x^2 = 236$			
مجموع الأرقام بالرمعات الجانبية في كل عمود			32	31	0	-1	24	39	$\Sigma f u_x u_r = 125$			

الرقم في المربع الجانبي في كل خلية يمثل حاصل ضرب $f u_x u_y$ حيث f تعبر عن تكرار الخلية . مجموع هذه الأرقام الموجودة في المربع الجانبي بكل خلية موضحة في الصف المقابل بالعمود الأخير . مجموع هذه الأرقام الجانبية في كل عمود موضحة بالعمود المقابل بالصف الأخير . المجاميع الكلية في الصف الأخير والعمود الأخير متساويان ويمثلان $\Sigma f u_x u_y$

من الجدول ١٤ - ١١ نحصل على

$$r = \frac{N \Sigma f u_x u_y - (\Sigma f_x u_x)(\Sigma f_y u_y)}{\sqrt{[N \Sigma f_x u_x^2 - (\Sigma f_x u_x)^2][N \Sigma f_y u_y^2 - (\Sigma f_y u_y)^2]}}$$

$$= \frac{(100)(125) - (64)(-55)}{\sqrt{[(100)(236) - (64)^2][(100)(253) - (-55)^2]}} = \frac{16020}{\sqrt{(19504)(22275)}} = 0.7686$$

٢٠-١٤ استخدم جدول الارتباط بالمسألة ١٤ - ١٩ لحساب (أ) s_X (ب) s_Y (ج) s_{XY} وأثبت الصيغة $r = s_{XY}/(s_X s_Y)$.

الحل :

$$s_X = c_X \sqrt{\frac{\sum f_X u_X^2}{N} - \left(\frac{\sum f_X u_X}{N}\right)^2} = 10 \sqrt{\frac{236}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2} = 13.966 \quad (أ)$$

$$s_Y = c_Y \sqrt{\frac{\sum f_Y u_Y^2}{N} - \left(\frac{\sum f_Y u_Y}{N}\right)^2} = 10 \sqrt{\frac{253}{100} - \left(\frac{-55}{100}\right)^2} = 14.925 \quad (ب)$$

$$s_{XY} = c_X c_Y \left[\frac{\sum f_X u_X u_Y}{N} - \left(\frac{\sum f_X u_X}{N}\right) \left(\frac{\sum f_Y u_Y}{N}\right) \right] = (10)(10) \left[\frac{125}{100} - \left(\frac{64}{100}\right) \left(\frac{-55}{100}\right) \right] = 160.20 \quad (ج)$$

أى أن الانحراف المعياري لدرجات الرياضة هو 14.0 و لدرجات الطبيعة هو 14.9 . بينما تغايرهما هو 160.2 .

وهذا يكون معامل الارتباط $r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{160.20}{(13.966)(14.925)} = 0.7686$ ، متفق مع المسألة ١٤ - ١٩ .

خطوط الانحدار ومعامل الارتباط :

٢١-١٤ أثبت أن خطوط انحدار Y على X و X على Y نحصل عليهما من المعادلات التالية على الترتيب

$$Y - \bar{Y} = \frac{rs_Y}{s_X} (X - \bar{X}) \quad (أ)$$

$$X - \bar{X} = \frac{rs_X}{s_Y} (Y - \bar{Y}) \quad (ب)$$

الحل :

(أ) من المسألة ١٥ (أ) بالفصل الثالث عشر ، معادلة خط انحدار Y على X هي

$$Y - \bar{Y} = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) (X - \bar{X}) \quad \text{أو} \quad y = \left(\frac{\sum xy}{\sum x^2} \right) x$$

بما أن $r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}$ (أنظر المسألة ١٤ - ١٠) ، فإن

$$\frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{r \sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}}{\sum x^2} = \frac{r \sqrt{\sum y^2}}{\sqrt{\sum x^2}} = \frac{rs_Y}{s_X}$$

وهذا نحصل على النتيجة المطلوبة .

(ب) نحصل على هذه النتيجة بتبديل Y و X في الجزء (أ)

٢٢-١٤ إذا كانت خطوط الانحدار X و Y تعطى بالمعادلات $Y = a_0 + a_1 X$ و $X = b_0 + b_1 Y$ ، أثبت أن $a_1 b_1 = r^2$.

الحل :

من المسائل ٢١ (أ) ، ٢١ (ب) ، $a_1 = \frac{r s_Y}{s_X}$ و $b_1 = \frac{r s_X}{s_Y}$ إذن $a_1 b_1 = \left(\frac{r s_Y}{s_X}\right)\left(\frac{r s_X}{s_Y}\right) = r^2$

هذه النتيجة يمكن اعتبارها كنقطة بداية في تعريف معامل الارتباط الخطي .

٢٣-١٤ استخدم نتائج المسألة ١٣ - ٢٢ لإيجاد معامل الارتباط الخطي لبيانات المسألة ١٤ - ١

الحل :

من المسألة ١-١٤ (ب) و ١-١٤ (ج) على الترتيب ، $a_1 = 484/1016 = 0.476$ and $b_1 = 484/467 = 1.036$ ،

إذن $r^2 = a_1 b_1 = (484/1016)(484/467)$ and $r = 0.7027$ بالاتفاق مع المسائل ١٤-٩ ، ١٤-١٤ ، ١٤-١٦

٢٤-١٤ أكتب معادلات خطوط الانحدار (أ) Y على X (ب) X على Y لبيانات المسألة ١٤ - ١٩

الحل :

من جدول الارتباط بالمسألة ١٤ - ١٩ ، نحصل على

$$\bar{X} = A + c_X \frac{\sum f_X u_X}{N} = 64.5 + \frac{(10)(64)}{100} = 70.9$$

$$\bar{Y} = B + c_Y \frac{\sum f_Y u_Y}{N} = 75.4 + \frac{(10)(-55)}{100} = 69.0$$

من نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ ، $14.20, s_X = 13.966, s_Y = 14.925$ and $r = 0.7686$ ،

ومن ثم نستخدم المسائل ١٤ - ٢١ (أ) و ١٤ - ٢١ (ب) للحصول على معادلات خطوط الانحدار .

$$Y - \bar{Y} = \frac{r s_Y}{s_X} (X - \bar{X}), Y - 69.0 = \frac{(0.7686)(14.925)}{13.966} (X - 70.9), \text{ or } Y - 69.0 = 0.821(X - 70.9) \quad (أ)$$

$$X - \bar{X} = \frac{r s_X}{s_Y} (Y - \bar{Y}), X - 70.9 = \frac{(0.7686)(13.966)}{14.925} (Y - 69.0), \text{ or } X - 70.9 = 0.719(Y - 69.0) \quad (ب)$$

٢٥-١٤ احسب الخطأ المعياري لتقدير (أ) $s_{Y.X}$ (ب) $s_{X.Y}$ لبيانات المسألة ١٤ - ١٩ . استخدم نتائج المسألة ١٤ - ٢٠ .

الحل :

$$s_{Y.X} = s_Y \sqrt{1 - r^2} = 14.925 \sqrt{1 - (0.7686)^2} = 9.548 \quad (أ)$$

$$s_{X.Y} = s_X \sqrt{1 - r^2} = 13.966 \sqrt{1 - (0.7686)^2} = 8.934 \quad (ب)$$

ارتباط الرتب

٢٦-١٤ الجدول التالى يوضح كيف أن 10 طلاب ، مرتين ترتيباً أبجدياً ، رتبوا حسب مستوى أدائهم فى كل من جزء المعمل وجزء المحاضرات فى مادة البيولوجى . أوجد معامل ارتباط الرتب .

المعمل	8	3	9	2	7	10	4	6	1	5
المحاضرات	9	5	10	1	8	7	3	4	2	6

الحل :

يوضح الجدول التالى الفروق D بين رتب كل من المعمل والمحاضرات . كذلك يوضح الجدول ΣD^2 و D^2 .

D فروق الرتب	-1	-2	-1	1	-1	3	1	2	-1	-1
D^2	1	4	1	1	1	9	1	4	1	1
ΣD^2	= 24									

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(24)}{10(10^2 - 1)} = 0.8545$$

إذن

عما يشير إلى وجود علاقة ملحوظة بين أداء الطلبة فى المعمل والمحاضرات .

٢٧-١٤ احسب معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤ - ١ وقارن نتائجك بمعامل الارتباط الذى حصلت عليه بالطرق الأخرى

الحل :

رتب أوزان الآباء ترتيباً تصاعدياً كالاتى :

(١) 62, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 70, 71

وبما أن المكان السادس والسابع فى هذه المنظومة يمثل نفس الوزن (67(kg) فإننا نعطى هذه الأماكن متوسط الرتبتين أى 6.5 . كذلك فإن المكانين الثامن والتاسع تعطى لهما الرتبة 8.5 . بهذا فإن أوزان الآباء تعطى لها الرتب .

(٢) 1, 2, 3, 4, 5, 6.5, 6.5, 8.5, 8.5, 10, 11, 12

بصورة مماثلة ، رتب أوزان الأبناء ترتيباً تصاعدياً كالاتى :

(٣) 65, 65, 66, 66, 67, 68, 68, 68, 69, 70, 71

بما أن الأماكن السادس والسابع والثامن والتاسع تمثل نفس الوزن (68 kg) فإننا نعطى متوسط الرتب 7.5 إلى هذه الأماكن ونحسب $[(6 + 7 + 8 + 9)/4]$ بهذا فإن أوزان الأبناء تعطى لها الرتب .

(٤) 1.5, 1.5, 3.5, 3.5, 5, 7.5, 7.5, 7.5, 7.5, 10, 11, 12

باستخدام التقابل بين (١) ، (٢) و (٣) ، (٤) ، فإن الجدول ١-١٤ للمسألة ١-١٤ يصبح .

رتبة الأب	4	2	6.5	3	8.5	1	11	5	8.5	6.5	10	12
رتبة الابن	7.5	3.5	7.5	1.5	10	3.5	7.5	1.5	12	5	7.5	11

الاختلاف في الرتب D ، وحساب D^2 و ΣD^2 موضح بالجدول التالي .

D	-3.5	-1.5	-1.0	1.5	-1.5	-2.5	3.5	3.5	3.5	1.5	2.5	1.0
D^2	12.25	2.25	1.00	2.25	2.25	6.25	12.25	12.25	12.25	2.25	6.25	1.00
ΣD^2	= 72.50											

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(72.50)}{12(12^2 - 1)} = 0.7465 \quad \text{إذن}$$

والتي تتفق مع قيمة $r = 0.7027$ التي حصلنا عليها في المسائل ١٤ - ٩ ، ١٤ - ١٤ ، ١٤ - ١٦ أو ١٤ - ٢٣ بالفصل الرابع عشر .

ارتباط السلاسل الزمنية :

١٤ - ٢٨ الجدول ١٢ - ١٤ يبين متوسط أسعار الأسهم والسندات ببورصة نيويورك للأوراق المالية خلال الأعوام 1950 — 1959 :
(١) أوجد معامل الارتباط . (ب) فسر النتائج

جدول ١٤ - ١٢

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
متوسط أسعار الأسهم (بالدولار)	35.22	39.87	41.85	43.23	40.06	53.29	54.14	49.12	40.71	55.15
متوسط أسعار السندات (بالدولار)	102.43	100.93	97.43	97.81	98.32	100.07	97.08	91.59	94.85	94.65

المصدر : بورصة نيويورك للأوراق المالية

الحل :

(١) اعتبر أن X تمثل متوسط أسعار الأسهم و Y متوسط أسعار السندات ، حساب معامل الارتباط يمكن إجراؤه .
كما في الجدول ١٤ - ١٣ . لاحظ أن السنة استخدمت فقط لبيان قيم Y و X المتقابلة .

جدول ١٣ - ١٤

X	Y	$x = X - \bar{X}$	$y = Y - \bar{Y}$	x^2	xy	y^2
35.22	102.43	-10.04	4.91	100.80	-49.30	24.11
39.87	100.93	-5.39	3.41	29.05	-18.38	11.63
41.85	97.43	-3.41	-0.09	11.63	0.31	0.01
43.23	97.81	-2.03	0.29	4.12	-0.59	0.08
40.06	98.32	-5.20	0.80	27.04	-4.16	0.64
53.29	100.07	8.03	2.55	64.48	20.48	6.50
54.14	97.08	8.88	-0.44	78.85	-3.91	0.19
49.12	91.59	3.86	-5.93	14.90	-22.89	35.16
40.71	94.85	-4.55	-2.67	20.70	12.15	7.13
55.15	94.65	9.89	-2.87	97.81	-28.38	8.24
ΣX = 452.64 $\bar{X} = 45.26$	ΣY = 975.16 $\bar{Y} = 97.52$			Σx^2 = 449.38	Σxy = 94.67	Σy^2 = 93.69

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{(\sum x^2)(\sum y^2)}} = \frac{-94.67}{\sqrt{(449.38)(93.69)}} = -0.4614$$

هذا وباستخدام صيغة عزم حاصل الضرب

(ب) نستنتج مما سبق أن هناك ارتباطاً سالباً بين أسعار الأسهم والسندات (أى ، أن هناك اتجاهها لانخفاض أسعار الأسهم كلما زادت أسعار السندات ، والعكس) على الرغم من أن هذه العلاقة ليست على قدر كبير من الوضوح .

طريقة أخرى : باستخدام ارتباط الرتب (كافى المسائل ١٤ - ٢٦ و ١٤ - ٢٧) .

الجدول ١٤-١٤ يوضح رتب متوسط أسعار الأسهم والسندات للسنوات 1950-1959 بصورة تصاعدية . كذلك يوضح فى الجدول فروق الرتب $\sum D^2$ و D

جدول ١٤-١٤

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959
أسعار الأسهم حسب الرتب	1	2	5	6	3	8	9	7	4	10
أسعار السندات حسب الرتب	10	9	5	6	7	8	4	1	3	2
الفروق بين الرتب D	-9	-7	0	0	-4	0	5	6	1	8
D^2	81	49	0	0	16	0	25	36	1	64
$\sum D^2 =$	272									

$$r_{\text{rank}} = 1 - \frac{6 \sum D^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6(272)}{10(10^2 - 1)} = -0.6485$$

إذن

وهذه النتيجة تقارن بصورة مرضية مع نتيجة الطريقة الأولى . ويمكن أيضاً طرح ثابت مناسب من المتغيرات ثم نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٤-١٦ .

الارتباط الغير خطى :

١٤-٢٩ وفق معادلة قطع مكافئ فى الصورة $Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$ ، باستخدام طريقة المربعات الصغرى ، للبيانات التالية .

جدول ١٤-١٥

X	1.2	1.8	3.1	4.9	5.7	7.1	8.6	9.8
Y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

الحل :

المعادلات الاعتدالية هى (أنظر الفصل الثالث عشر ، صفحة ٣٥٥) .

$$\left. \begin{aligned} \sum Y &= a_0 N + a_1 \sum X + a_2 \sum X^2 \\ \sum XY &= a_0 \sum X + a_1 \sum X^2 + a_2 \sum X^3 \\ \sum X^2 Y &= a_0 \sum X^2 + a_1 \sum X^3 + a_2 \sum X^4 \end{aligned} \right\}$$

العمل المتضمن في حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٤-١٦ .

جدول ١٤-١٦

X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1.2	4.5	1.44	1.73	2.08	5.40	6.48
1.8	5.9	3.24	5.83	10.49	10.62	19.12
3.1	7.0	9.61	29.79	92.35	21.70	67.27
4.9	7.8	24.01	117.65	576.48	38.22	187.28
5.7	7.2	32.49	185.19	1055.58	41.04	233.93
7.1	6.8	50.41	357.91	2541.16	48.28	342.79
8.6	4.5	73.96	636.06	5470.12	38.70	332.82
9.8	2.7	96.04	941.19	9223.66	26.46	259.31
$\Sigma X = 42.2$	$\Sigma Y = 46.4$	$\Sigma X^2 = 291.20$	$\Sigma X^3 = 2275.35$	$\Sigma X^4 = 18971.92$	$\Sigma XY = 230.42$	$\Sigma X^2Y = 1449.00$

هذا فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح ، حيث $N = 8$ ، كالاتي :

$$\begin{cases} 8a_0 + 42.2a_1 + 291.20a_2 = 46.4 \\ 42.2a_0 + 291.20a_1 + 2275.35a_2 = 230.42 \\ 291.20a_0 + 2275.35a_1 + 18971.92a_2 = 1449.00 \end{cases}$$

هذا ، فإن قطع مكافئ

$$a_0 = 2.588, a_1 = 2.065, a_2 = -0.2110$$

يحل هذه المعادلات نحصل على

المربعات الصغرى له المعادلة .

$$Y = 2.588 + 2.065X - 0.2110X^2$$

١٤-٣٠ استخدم قطع مكافئ المربعات الصغرى بالمسألة ١٤-٢٩ لتقدير قيم Y لقيم X المطبقة .

الحل :

لقيمة $X = 102$ فإن $X = 1.2, Y_{est.} = 2.588 + 2.065(1.2) - 0.2110(1.2)^2 = 4.762$ بصورة ماثلة

نحصل على القيم المقدرة الأخرى . النتائج موضحة بالجدول ١٤-١٧ الذي يعطى أيضا قيم Y الفعلية .

جدول ١٤-١٧

$Y_{est.}$	4.762	5.621	6.962	7.640	7.503	6.613	4.741	2.561
Y	4.5	5.9	7.0	7.8	7.2	6.8	4.5	2.7

١٤-٣١ (١) أوجد معامل الارتباط الخطي بين المتغيرات X و Y بالمسألة ١٤-٢٩ .

(ب) أوجد معامل الارتباط غير الخطي بين هذه المتغيرات ، مفترضاً علاقة القطع المكافئ التي حصلت عليها

بالمسألة ١٤-٢٩ .

(ج) أشرح الفرق بين معاملات الارتباط التي حصلت عليها في (١) ، (ب) .

(د) ماهي النسبة المتوقعة للاختلاف الكلي الذي سينتج غير مفسر تحت فرض علاقة القطع المكافئ بين X ، Y ؟

الحل :

(١) باستخدام الحسابات التي حصلنا عليها بالجدول ١٦-١٤ للمسألة ٢٩-١٤ وبإضافة حقيقة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$

نجد

$$r = \frac{N \Sigma XY - (\Sigma X)(\Sigma Y)}{\sqrt{[N \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2][N \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2]}} = \frac{(8)(230.42) - (42.2)(46.4)}{\sqrt{[(8)(291.20) - (42.2)^2][(8)(290.52) - (46.4)^2]}} = -0.3743$$

(ب) من الجدول ١٦-١٤ بالمسألة ٢٩-١٤ ، $14.29, P = (\Sigma Y)/N = (46.4)/8 = 5.80$ ،

$$\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40 = \text{إذن ، الاختلاف الكلي}$$

من الجدول ١٧-١٤ بالمسألة ٣٠-١٤ ، الاختلاف المفسر 21.02 ،

$$r^2 = \frac{\text{الاختلاف المفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = \frac{21.02}{21.40} = 0.9822 \quad \text{بهذا}$$

$$r = 0.9911 \quad \text{أو } 0.99$$

(ج) حقيقة أن الجزء (١) أظهر معامل ارتباط خطي يساوي -0.3743 فقط يشير من الناحية العملية بعدم

وجود علاقة خطية بين X, Y . على أية حال ، هناك علاقة غير خطية واضحة يمثلها القطع المكاني بالمسألة

٢٩-١٤ وما يدل على ذلك حقيقة أن معامل الارتباط في (ب) هو 0.99 .

$$(د) \frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{\text{الاختلاف الكلي}} = 1 - r^2 = 1 - 0.9822 = 0.0178$$

أي أن 1.78% من الاختلاف الكلي ما زال غير مفسر . وهذا قد يرجع إلى التقلبات العشوائية أو إلى متغير إضافي لم يؤخذ في الاعتبار .

٣٢-١٤ أوجد (١) s_y (ب) $s_{y \cdot x}$. لبيانات المسألة ٢٩-١٤

الحل :

(١) من المسألة ٣١-١٤ (١) $\Sigma(Y - \bar{Y})^2 = 21.40$. إذن الانحراف المعياري لـ Y هو

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - \bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{21.40}{8}} = 1.636 \text{ or } 1.64$$

الطريقة الاولى :

باستخدام (١) والمسألة ٣١-١٤ (١) ، نحصل على الخطأ المعياري لتقدير Y على X وهو

$$s_{y \cdot x} = s_y \sqrt{1 - r^2} = 1.636 \sqrt{1 - (0.9911)^2} = 0.218 \text{ or } 0.22$$

الطريقة الثانية :

باستخدام المسألة ٣١-١٤

$$s_{y \cdot x} = \sqrt{\frac{\Sigma(Y - Y_{est})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\text{الاختلاف الغير مفسر}}{N}} = \sqrt{\frac{21.40 - 21.02}{8}} = 0.218 \text{ or } 0.22$$

الطريقة الثالثة :

باستخدام المسألة ١٤-٢٩ وبمعرفة أن $\Sigma Y^2 = 290.52$ نحصل على

$$s_{Y.X} = \sqrt{\frac{\Sigma Y^2 - a_0 \Sigma Y - a_1 \Sigma XY - a_2 \Sigma X^2 Y}{N}} = 0.218 \text{ or } 0.22.$$

نظرية المعاينة للارتباط :

١٤-٣٣ إذا كان معامل الارتباط المحسوب من عينة حجمها 18 هو 0.32 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية (أ) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للمجتمع يختلف عن الصفر ؟

الحل :

نريد الاختيار بين الفروض $H_0: \rho = 0$ ، $H_1: \rho > 0$.

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.32\sqrt{18-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.35$$

(أ) باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت عند مستوى 0.05 فوجب رفض H_0 إذا كانت $t > t_{0.95} = 1.75$ لدرجات حرية $(18-2) = 16$. بهذا لا نستطيع رفض H_0 عند المستوى 0.05 .

(ب) بما أنه لا يمكننا رفض H_0 عند المستوى 0.05 ، فإنه لا يمكن بالتأكيد رفضه عند المستوى 0.01 .

١٤-٣٤ ما هو الحد الأدنى لحجم العينة الضروري لاستنتاج أن معامل ارتباط قيمته 0.32 يختلف معنوياً عن الصفر عند المستوى 0.05 ؟

الحل :

عند مستوى 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت .

فإن الحد الأدنى لقيمة N يجب أن يختار بحيث تكون

$$N - 2 \text{ درجات حرية} \quad \frac{0.32\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-(0.32)^2}} = t_{0.95}$$

لعدد لانهاى لدرجات الحرية $t_{0.95} = 1.64$ بهذا فإن $N = 25.6$.

لقيمة $N = 26$ فإن $v = 24$ ، $t_{0.95} = 1.71$ ، $t = 0.32\sqrt{24/\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.65$

لقيمة $N = 27$ فإن $v = 25$ ، $t_{0.95} = 1.71$ ، $t = 0.32\sqrt{25/\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.69$

لقيمة $N = 28$ فإن $v = 26$ ، $t_{0.95} = 1.71$ ، $t = 0.32\sqrt{26/\sqrt{1-(0.32)^2}} = 1.72$

بهذا فإن الحد الأدنى لحجم العينة هو $N = 28$

٣٥-١٤ قوة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 24 هي $r = 0.75$ هل يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط المجتمع في مثل صغر القيم :

(أ) $p = 0.60$ (ب) $p = 0.50$ ، عند مستوى المعنوية 0.05 ؟

الحل :

$$Z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + 0.75}{1 - 0.75} \right) \quad \mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1 + 0.60}{1 - 0.60} \right) \quad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \quad (1)$$

$$= 0.9730, \quad = 0.6932, \quad = 0.2182$$

$$z = (Z - \mu_z) / \sigma_z = (0.9730 - 0.6932) / 0.2182 = 1.28 \quad \text{إذن}$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وباستخدام اختبار من طرف واحد للتوزيع الطبيعي ، فإننا نرفض الفرض في حالة وحيدة إذا كانت Z أكبر من 1.64 . بهذا لا يمكن رفض الفرض أن معامل ارتباط المجتمع في مثل صغر 0.60 .

(ب) إذا كانت $p = 0.50$ فإن $z = (0.9730 - 0.5493) / 0.2182 = 1.94$ ، فإن $p = 0.50$ يمكن رفض الفرض بأن معامل ارتباط المجتمع في مثل صغر $p = 0.50$ عند مستوى المعنوية 0.05 .

٣٦-١٤ كان معامل الارتباط بين درجات الامتحان النهائي في الطبيعة والرياضة لمجموعة من 21 طالبا هو 0.80 . أوجد 95% حدود ثقة لهذا المعامل .

الحل :

بما أن $r = 0.80$ و $N = 21$ فإن 95% حدود ثقة لـ μ_z تعطى بما يلي :

$$Z \pm 1.96\sigma_z = 1.1513 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \pm 1.96 \left(\frac{1}{\sqrt{N-3}} \right) = 1.0986 \pm 0.4620$$

إذن μ_z لها 95% فترة ثقة من 0.5366 إلى 1.6606

إذا كانت $\mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1+p}{1-p} \right) = 0.5366$ فإن $p = 0.4904$.

إذا كانت $\mu_z = 1.1513 \log \left(\frac{1+p}{1-p} \right) = 1.6606$ فإن $p = 0.9155$.

بهذا فإن 95% حدود ثقة لـ p هي من 0.49 إلى 0.92 .

٣٧-١٤ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها $N_1 = 28$ فكان $r_1 = 0.50$ والثاني من عينة حجمها $N_2 = 35$ فكان $r_2 = 0.30$ على الترتيب . هل هناك فرق معنوي بين معاملي الارتباط عند المستوى 0.05 ؟

الحل :

$$Z_1 = 1.1513 \log \left(\frac{1+r_1}{1-r_1} \right) = 0.5493, \quad Z_2 = 1.1513 \log \left(\frac{1+r_2}{1-r_2} \right) = 0.3095$$

$$\sigma_{z_1 - z_2} = \sqrt{\frac{1}{N_1 - 3} + \frac{1}{N_2 - 3}} = 0.2669 \quad \text{و}$$

ونريد التقرير بين فرضين $H_1: \mu_{z_1} \neq \mu_{z_2}$ و $H_0: \mu_{z_1} = \mu_{z_2}$

$$z = \frac{Z_1 - Z_2 - (\mu_{z_1} - \mu_{z_2})}{\sigma_{z_1 - z_2}} = \frac{0.5493 - 0.3095 - 0}{0.2669} = 0.8985 \quad \text{تحت الفرض } H_0$$

باستخدام اختبار من طرفين للتوزيع الطبيعي ، فيجب رفض H_0 فقط إذا كانت $z > 1.96$ أو

$z < -1.96$. هذا لا يمكن رفض H_0 ونستنتج من ذلك أن الفروق غير معنوية عند المستوى 0.05 .

نظرية المعاينة للانحدار :

٣٨-١٤ في المسألة ١-١٤ نجد أن معادلة انحدار Y على X هي $Y = 35.82 + 0.476 X$. اختبار صحة الفرض

القاتل أنه عند مستوى المعنوية 0.05 يكون معامل انحدار معادلة انحدار المجتمع في مثل انخفاض 0.180 .

الحل :

$$t = \frac{a_1 - A_1}{s_{Y.X}/s_X} \sqrt{N-2} = \frac{0.476 - 0.180}{1.28/2.66} \sqrt{12-2} = 1.95$$

نظراً لأن $s_{Y.X} = 1.28$ (محصوبة من المسألة ١٤-٥) و $\sqrt{(\sum x^2)/N} = \sqrt{84.68/12} = 2.66$

(من المسألة ١٤-٢) .

باستخدام اختبار من طرف واحد لتوزيع أستودينت عند مستوى 0.05 نجد أنه يجب رفض الفرض

القاتل أن معامل الانحدار في مثل انخفاض 0.180 إذا كانت $t > t_{0.95} = 1.81$ لدرجات حرية

$10 = (12 - 2)$. وبهذا لا يمكن رفض الفرض .

٣٩-١٤ أوجد 95% حدود ثقة لمعامل الانحدار في المسألة السابقة .

الحل :

$$A_1 = a_1 - \frac{t}{\sqrt{N-2}} \frac{s_{Y.X}}{s_X} \quad (\text{نحصل عليها بوضع})$$

$t = \pm t_{0.975} = \pm 2.23$ لدرجات حرية $10 = 12 - 2$ هي

$$a_1 = \frac{2.23}{\sqrt{12-2}} \left(\frac{s_{Y.X}}{s_X} \right) = 0.476 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} \left(\frac{1.28}{2.66} \right) = 0.476 \pm 0.340$$

أي أننا واثقين بنسبة 95% بأن A_1 تقع بين 0.136 و 0.816

١٤-٤٠ في المسألة ١٤-١ ، أوجد 95% حدود ثقة لأوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم .

$$(1) \quad 65.0 \text{ kg} \quad (ب) \quad 70.0 \text{ kg}$$

الحل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية $10 = (12 - 2)$ ، فإن 59% حدود ثقة لـ Y_p (أنظر صفحة ٣٩٧) تعطى كالتالي :

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{N-2}} s_{Y.X} \sqrt{N+1 + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{s_x^2}}$$

$$\text{حيث } Y_0 = 35.82 + 0.476 X_0 \quad (\text{المسألة } ١٤-١) \quad s_{Y.X} = 1.28, s_x = 2.26 \quad N = 12 \quad (\text{المسألة } ١٤-٢٨)$$

$$(1) \quad \text{إذا كانت } X_0 = 65.0, Y_0 = 66.76 \text{ kg.} \quad \text{و كذلك}$$

$$(X_0 - \bar{X})^2 = (65.0 - 800/12)^2 = 2.78, \quad \text{فإن } 95\% \text{ حدود ثقة هي :}$$

$$66.76 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} (1.28) \sqrt{12+1 + \frac{2.78}{(2.66)^2}} = 66.76 \pm 3.31 \text{ kg}$$

بمعنى أننا واثقون بنسبة 95% أن أوزان الأبناء تقع بين 63.4 و 70.1 kg

$$(ب) \quad \text{إذا كانت } X_0 = 70.0 \text{ فإن } Y_0 = 69.14 \text{ kg.} \quad \text{كذلك } (X_0 - \bar{X})^2 = (70.0 - 800/12)^2 = 11.11.$$

$$\text{إذن } 95\% \text{ حدود ثقة حسب كالتالي } 69.14 \pm 3.45 \text{ kg} \quad \text{أي أننا تكون واثقين بنسبة حوالى } 95\%$$

$$\text{بأن أوزان الأبناء تقع بين } 65.7 \text{ و } 72.6 \text{ kg.}$$

لاحظ أنه لقيم N الكبيرة ، فإن 95% حدود ثقة تعطى تقريبا بالمعادلة $Y_0 \pm 1.96 s_{Y.X}$ أو $Y_0 \pm 2 s_{Y.X}$ على شرط أن $(X_0 - \bar{X})$ ليست كبيرة . هذا يتفق مع النتيجة التقريبية المشار إليها في صفحة ٢٥١ .

طرق هذه المسألة تنطبق بصرف النظر عن حجم N أو $(X_0 - \bar{X})$ ، بمعنى أن طرق المعاينة مضبوطة .

١٤-٤١ في المسألة ١٤-١ ، أوجد 95% حدود ثقة لمتوسط أوزان الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم .

$$(1) \quad 65.0 \text{ kg} \quad (ب) \quad 70.0 \text{ kg}$$

الحل :

بما أن $t_{0.975} = 2.23$ لدرجات حرية 10 ، فإن 95% حدود ثقة لـ \bar{Y}_p (أنظر صفحة ٣٩٧) تعطى كما يلي .

$$Y_0 \pm \frac{2.23}{\sqrt{10}} s_{Y.X} \sqrt{1 + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{s_x^2}}$$

$$\text{حيث } Y_0 = 35.82 + 0.476 X_0 \quad (\text{المسألة } ١٤-١) \quad s_{Y.X} = 1.28, s_x = 2.66 \quad (\text{المسألة } 14.38)$$

$$(1) \quad \text{إذا كانت } X_0 = 65.0 \text{ ، نجد (قارن بالمسألة } ١٤-٤٠ \text{) أن } 95\% \text{ حدود ثقة هي}$$

$(66.76 \pm 1.07) \text{ kg}$ ، أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم 65.0 kg سوف تقع بين 65.7 و 67.8 kg .

(ب) إذا كانت $X_0 = 70.0$ ، نجد (قارن بالمسألة ١٤ - ٤٠ (ب)) أن 95% حدود ثقة هى $(69.14 \pm 1.45) \text{ kg}$ أى أننا نكون واثقين بحوالى 95% أن متوسط الأوزان لجميع الأبناء الذين تكون أوزان آبائهم 70.0 kg سوف تقع بين 67.7 و 70.6 kg .

مسائل إضافية

الانحدار الخطى والارتباط :

١٤-٢٢ الجدول التالى يوضح أول درجتين ، يرمز لهما بالرمزين Y و X على الترتيب ، لعشرة من الطلبة فى امتحانين مفاجئين قصيرين فى مادة البيولوجى .

(أ) كون شكل الانتشار .

(ب) أوجد خط الانحدار المربعات الصغرى لـ Y على X .

$$Y = 4.000 + 0.500 X \quad \text{ج}$$

(ج) أوجد خط الانحدار المربعات الصغرى لـ Y على X .

$$X = 2.408 + 6120. Y \quad \text{ج}$$

(د) ارسم خط الانحدار فى (ب) ، (ج) على شكل الانتشار فى (أ) .

(X) درجات الامتحان المفاجئ الأول	6	5	8	8	7	6	10	4	9	7
(Y) درجات الامتحان المفاجئ الثانى	8	7	7	10	5	8	10	6	8	6

١٤-٢٣ أوجد (أ) $s_{Y \cdot X}$ (ب) $s_{X \cdot Y}$ ، للبيانات بالمسألة السابقة .

$$1.304 \quad (أ) \quad 1.443 \quad (ب) \quad \text{ج}$$

١٤-٢٤ احسب (أ) الاختلاف الكلى فى Y ، (ب) الاختلاف الغير مفسر فى Y (ج) الاختلاف المفسر فى Y ، لبيانات المسألة ١٤-٢٢ .

$$24.50 \quad (أ) \quad 17.00 \quad (ب) \quad 7.50 \quad (ج) \quad \text{ج}$$

١٤-٢٥ استخدم نتائج المسألة ١٤-٢٤ لاييجاد معامل الارتباط بين مجموعتى درجات الامتحان فى المسألة ١٤-٢٢ .

$$0.5533 \quad \text{ج}$$

٤٦-١٤ (١) أوجد معامل الارتباط بين درجات الامتحانين في المسألة ١٤-٤٢ باستخدام صيغة عزم حاصل الضرب وقارن بنتيجة المسألة ١٤-٤٥ .

(ب) أوجد معامل الارتباط مباشرة من معاملات الانحدار لمخطوط الانحدار بالمسائل ١٤-٤٢ (ب) ، (ج) .

٤٧-١٤ أوجد تغاير البيانات لبيانات المسألة ١٤-٤٢ (١) مباشرة (ب) باستخدام الصيغة $s_{X.Y} = r s_X s_Y$ ونتيجة المسائل ١٤-٤٥ أو ١٤-٤٦ .

ج : 1.5 .

٤٨-١٤ الجدول التالي يوضح السن X وضغط الدم Y لاثنتي عشرة امرأة .

(١) أوجد معامل الارتباط بين X و Y .

(ب) أوجد معادلة انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى .

(ج) قدر ضغط الدم لامرأة عمرها 45 سنة .

(X) السن	56	42	72	36	63	47	55	49	38	42	68	60
(Y) ضغط الدم	147	125	160	118	149	128	150	145	115	140	152	155

ج : (١) 0.8961 (ب) $Y = 80.78 + 1.138 X$ (ج) 132 .

٤٩-١٤ أوجد معاملات الارتباط لبيانات (١) المسألة ١٣-٢٢ بالفصل الثالث عشر (ب) المسألة ١٤-٣٥ بالفصل الثالث عشر .

ج : (١) 0.958 (ب) 0.872 .

٥٠-١٤ معامل الارتباط بين X و Y هو $r = 0.60$.

إذا كانت $\bar{Y} = 20$ و $\bar{X} = 10$ ، $s_Y = 2.00$ و $s_X = 1.50$.

أوجد معادلات مخطوط انحدار (١) Y على X (ب) X على Y .

ج : (١) $Y = 0.8 X + 12$ (ب) $X = 0.45 Y + 1$

٥١-١٤ احسب (١) $s_{Y.X}$ (ب) $s_{X.Y}$ لبيانات المسألة ٤-٥٠ .

ج : (١) 1.60 (ب) 1.20

٥٢-١٤ إذا كانت $s_{Y.X} = 3$ و $s_Y = 5$ أوجد r .

ج : ± 0.80

٥٣-١٤ إذا كان معامل الارتباط بين X و Y هو 0.50 ، ماهى النسبة المئوية للاختلاف الكلى الذى يظل غير مفسر بمعادلة الانحدار ؟

ج : 75%

٥٤-١٤ أثبت أن معادلة خط انحدار Y على X يمكن أن تكتب على الصورة $Y - \bar{Y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(X - \bar{X})$ اكتب المعادلة المناظرة لخط انحدار X على Y .

٥٥-١٤ (١) احسب معامل الارتباط بين قيم X و Y المتقابلة والموضحة بالجدول المرافق .

X	2	4	5	6	8	11
Y	18	12	10	8	7	5

(ب) أضرب كل قيمة من قيم X بالجدول فى 2 وأضف لها 6

واضرب كل قيمة من قيم Y بالجدول فى 3 وأطرح 15 .

أوجد معامل الارتباط بين مجموعى الأرقام الجديدة ، وضح السبب فى أنك ستحصل - أو لن تحصل - على نفس النتيجة التى حصلت عليها فى (١) .

ج : (١) 0.9203 -

٥٦-١٤ (١) أوجد معادلات انحدار Y على X للبيان الموضح فى الأجزاء (١) ، (ب) بالمسألة السابقة .

(ب) وضح العلاقة بين هذه المعادلات .

ج : (١) $Y = 18.04 - 1.34 X$

$Y = 51.18 - 2.01 X$

٥٧-١٤ أثبت أن معامل الارتباط بين X و Y يمكن أن يكتب على الصورة .

$$r = \frac{\bar{X}\bar{Y} - \bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{[\bar{X}^2 - \bar{X}^2][\bar{Y}^2 - \bar{Y}^2]}}$$

٥٨-١٤ أثبت أن معامل الارتباط لا يعتمد على اختيار نقطة الأصل للمتغيرات أو الوحدات المستخدمة فى التعبير عنها

(إرشاد : افترض $X' = c_1X + A$ ، $Y' = c_2Y + B$ حيث A و B و c_1 و c_2 ثوابت ، وأثبت أن

معامل الارتباط بين Y' و X' مثيل لمعامل الارتباط بين Y و X) .

٥٩-١٤ أثبت أنه فى الانحدار الخطى $\frac{s_{Y.X}^2}{s_Y^2} = \frac{s_{X.Y}^2}{s_X^2}$. هل النتيجة تنطبق فى حالة الانحدار غير الخطى ؟

معامل الارتباط للبيانات المجمعة :

١٤-٦٠ أوجد معامل الارتباط بين المتغيرات X و Y والمعطاة قيمها بالجدول التكرارى التالى .

	X					
	59 — 62	63 — 66	67 — 70	71 — 74	75 — 78	
90 — 109	2	1				
110 — 129	7	8	4	2		
130 — 149	5	15	22	7	1	
150 — 169	2	12	63	19	5	Y
170 — 189		7	28	32	12	
190 — 209		2	10	20	7	
210 — 229			1	4	2	

ج : 0.5402

١٤-٦١ (أ) أوجد معادلة خط انحدار Y على X باستخدام المربعات الصغرى لبيانات المسألة السابقة .

(ب) قدر Y عند $X = 64$ و $X = 72$

ج : (أ) $Y = 3.33 X - 66.4$ (ب) 173.4 و 146.7

١٤-٦٢ أوجد (أ) s_{yx} (ب) s_{xy} لبيانات المسألة ١٤-٦٠ .

ج : (أ) 20.36 (ب) 3.30

١٤-٦٣ أثبت الصيغة (٢١) ، صفحة ٣٩٤ ، لمعامل الارتباط للبيانات المجمعة .

ارتباط السلاسل الزمنية :

١٤-٦٤ أوجد معامل الارتباط بين الأرقام القياسية لأسعار المستهلك والأرقام القياسية لأسعار الجملية لجميع السلع بالولايات

المتحدة وذلك للسنوات 1949 — 1958 والموضحة بالجدول التالى . فترة الأساس $1947 - 1949 = 100$.

(أنظر المسألة ١٣-٣٧ ، الفصل الثالث عشر) .

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى لأسعار المستهلك	101.8	102.8	111.0	113.5	114.4	114.8	114.5	116.2	120.2	123.5
الرقم القياسى لأسعار الجملية	99.2	103.1	114.8	111.6	110.1	110.3	110.7	114.3	117.6	119.2

المصدر : مكتب احصاءات العمل

ج : 0.9254

١٤-٥٦ أوجد معامل الارتباط للبيانات بالمسألة ١-٦٦ ، الفصل الأول .

ج : 0.1608

ارتباط الرتب :

١٤-٦٦ حكان في مسابقة ، طلب منها ترتيب 8 متسابقين A, B, C, D, E, F, G, H حسب تفضيلهم ، قدموا الاختبارات الموضحة بالجدول . أوجد معامل ارتباط الرتب وقرر مدى جودة اتفاق الحكين في اختيارها .

A	B	C	D	E	F	G	H	
5	2	8	1	4	6	3	7	الحكم الأول
4	5	7	3	2	8	1	6	الحكم الثاني

ج : $r_{rank} = \frac{2}{3}$

١٤-٦٧ أوجد معامل ارتباط الرتب للبيانات في (١) المسألة ١٤-٤٢ (ب) المسألة ١٤-٨٠ :

ج : (١) 0.5606 (ب) 0.9318

١٤-٦٨ (١) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤-٥٥ .

(ب) من الملاحظات في (١) ، ناقش المساوي الممكنة لطريقة ارتباط الرتب .

ج : (١) 1.0000 -

١٤-٦٩ (١) أوجد معامل ارتباط الرتب لبيانات المسألة ١٤-٦٤ .

(ب) قارن بمعامل الارتباط الذي حصلت عليه في هذه المسألة .

ج : (١) 0.7333

نظرية المعاينة للارتباط :

١٤-٧٠ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 27 هي 0.40 . هل يمكن أن نستنتج عند مستوى المعنوية

(١) 0.05 (ب) 0.01 أن معامل الارتباط المقابل للمجتمع يختلف عن الصفر ؟

ج : (١) نعم (ب) لا

١٤-٧١ قيمة معامل ارتباط محسوب من عينة حجمها 35 هي 0.50 . هل يمكن رفض الفرض القائل أن معامل ارتباط

المجتمع . (١) في مثل صفر $p = 0.30$ (ب) في مثل كبر $p = 0.70$ ، مستخدما مستوى المعنوية 0.05 .

ج : (١) لا (ب) نعم

٧٢-١٤ أوجد (أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الارتباط الذي قيمته 0.60 والمحسوب من عينة حجمها 28 .

ج : (أ) 0.7951, 0.2923 (ب) 0.8361, 0.1763

٧٣-١٤ حل المسألة ٧٢-١٤ إذا كان حجم العينة هو 52 .

ج : (أ) 0.7500, 0.3912 (ب) 0.7861, 0.3146

٧٤-١٤ أوجد 95% حدود ثقة لمعامل الارتباط المحسوب في

(أ) بالمسألة ٤٨-١٤ .

(ب) بالمسألة ٦٠-١٤ .

ج (أ) 0.9653, 0.7096 (ب) 0.6158, 0.4547

٧٥-١٤ معاملان ارتباط حسب الأول من عينة حجمها 23 فكان 0.80 والثاني من عينة حجمها 82 فكان 0.95 على

الترتيب . هل يمكن أن نستنتج عند المستوى (أ) 0.05 (ب) 0.01 ، بأن هناك اختلافا معنويا بين

المعاملين .

ج : (أ) نعم (ب) لا

نظرية المعاينة للانحدار :

٧٦-١٤ باستخدام عينة حجمها 27 وجد أن معادلة الانحدار Y على X هي $Y = 25.0 + 2.00X$.

فإذا كانت $s_{YX} = 1.50$ $s_X^2 = 3.00$ $\bar{X} = 7.50$ ، أوجد

(أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمعامل الانحدار .

ج : (أ) 2.00 ± 0.21

(ب) 2.00 ± 0.28

٧٧-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ اختبر صحة الفرض القائل أن معامل انحدار المجتمع .

(أ) في مثل انخفاض 1.70 (ب) في مثل ارتفاع 2.20 ،

عند مستوى المعنوية 0.01 .

ج : (أ) باستخدام اختبار من طرف واحد يمكن رفض الفرض .

(ب) باستخدام اختبار من طرف واحد لا يمكن رفض الفرض .

٧٨-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ أوجد

(أ) 95% (ب) 99% حدود ثقة لـ Y عند $\bar{X} = 6.000$

ج : (أ) 37.0 ± 3.28 (ب) 37.0 ± 4.45

٧٩-١٤ في المسألة ٧٦-١٤ أوجد

(١) 95% (ب) 99% حدود ثقة لمتوسط جميع قيم Y المقابلة لقيمة $X = 6.00$.

ج : (١) 37.0 ± 0.69

(ب) 37.0 ± 0.94

٨٠-١٤ بالرجوع إلى المسألة ٤٨-١٤ ، أوجد 95% حدود ثقة للآتي :

(١) معامل انحدار Y على X (ب) ضغط الدم للنساء اللائي أعمارهن 45 سنة

(ج) متوسط ضغط الدم لجميع النساء اللائي أعمارهن 45 سنة .

(١) 1.138 ± 0.398

(ب) 132.0 ± 16.6

(ج) 132.0 ± 5.4

الفصل الخامس عشر

معامل الارتباط الجزئي والمتعدد

الارتباط المتعدد :

درجة العلاقة الموجودة بين ثلاث متغيرات أو أكثر تسمى بالارتباط المتعدد . المبادئ الأساسية في مشكلة الارتباط المتعدد ماثلة لتلك المبادئ في الارتباط البسيط والذي سبق معالجته بالفصل الرابع عشر .

رمز الدلائل :

لإتاحة الفرصة للتعميمات لعدد كبير من المتغيرات ، فن الأوفق استخدام رموز تتضمن الأدلة .

سوف نعتبر X_1, X_2, X_3, \dots هي المتغيرات تحت الدراسة . ومن ثم نعتبر $X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots$ القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X_1 و $X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots$ تعبر عن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير X_2 ، وهكذا ، مستخدماً هذه الرموز نجد أن المجموع مثل $X_{21} + X_{22} + X_{23} + \dots + X_{2N}$ ، على سبيل المثال ، يمكن أن يكتب

على الصورة $\sum_{j=1}^N X_{2j}$ ، أو ببساطة $\sum X_2$. وعندما لا يكون هناك سبيل للخلط سوف نستخدم الرمز الأخير في هذه الحالة فإن متوسط X_2 يكتب $\bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N}$.

معادلة الانحدار • مستوى الانحدار :

معادلة الانحدار هي معادلة لتقدير متغير تابع ، وليكن X_1 ، من المتغيرات المستقلة X_2, X_3, \dots ونسب بمعادلة انحدار X_1 على X_2, X_3, \dots وباستخدام صيغة الدالة تكتب العلاقة بصورة مختصرة $X_1 = F(X_2, X_3, \dots)$. ونقرأ « X_1 دالة في X_2, X_3 ، وهكذا » .

في حالة ثلاث متغيرات ، أبسط معادلة انحدار ل X_1 على X_2 و X_3 لها الشكل

$$(1) \quad X_1 = b_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$$

حيث $b_{1.23}$ ، $b_{12.3}$ ، $b_{13.2}$ ثوابت .

في المعادلة (١) ، إذا اعتبرنا X_3 ثابت ، فإن الرسم البياني ل X_1 مقابل X_2 يمر عن خط مستقيم ميله $b_{12.3}$ وإذا احتفظنا ب X_2 ثابت فإن الرسم البياني ل X_1 مقابل X_3 يمر عن خط مستقيم ميله $b_{13.2}$. ومز الواضح أن الرقم التالي للنقطة في الدليل يوضح المتغيرات المدخلة كشوايت في كل حالة^٢ .

ونتيجة لحقيقة أن X_1 تتغير جزئياً بسبب التغير في X_2 وجزئياً بسبب التغير في X_3 ، فإننا نسمى $b_{12.3}$. بمعامل الانحدار الجزئى لـ X_1 على X_2 مع اعتبار X_3 ثابت و $b_{13.2}$ بمعامل الانحدار الجزئى لـ X_1 على X_3 مع اعتبار X_2 ثابت .

المعادلة (١) تسمى بمعادلة الانحدار الخطى لـ X_1 على X_2 و X_3 . وتمثل في نظام للاحداثيات المتعامدة ذات الثلاثة أبعاد بمستوى يسمى مستوى الانحدار وهو يمد تمهياً لحالة الانحدار في متغيرين الذى درس في الفصل الثالث عشر .

المعادلات الاعتدالية لمستوى انحدار المربعات الصغرى :

كما أنه يوجد خطوط انحدار المربعات الصغرى التى تقرب مجموعة من N من نقط البيانات (X, Y) في شكل انتشار ذى بعدين ، فإنه يوجد أيضاً مستوى انحدار المربعات الصغرى والذى يوفق مجموعة من N نقط من نقط البيانات (X_1, X_2, X_3) في شكل انتشار ذى ثلاثة أبعاد .

مستوى انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2, X_3 يعبر عنه بالمعادلة (١) حيث $b_{12.3}$ ، $b_{13.2}$ ، $b_{1.23}$ تحدد بحل المعادلات الاعتدالية الآتية آنياً :

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} \sum X_1 &= b_{1.23} N + b_{12.3} \sum X_2 + b_{13.2} \sum X_3 \\ \sum X_1 X_2 &= b_{1.23} \sum X_2 + b_{12.3} \sum X_2^2 + b_{13.2} \sum X_2 X_3 \\ \sum X_1 X_3 &= b_{1.23} \sum X_3 + b_{12.3} \sum X_2 X_3 + b_{13.2} \sum X_3^2 \end{aligned} \right\}$$

حيث نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفى المعادلة (١) في $1, X_2, X_3$ على التوالى ثم التجميع على الطرفين :

مالم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معادلة الانحدار فإننا نفترض أننا نعنى معادلة انحدار المربعات الصغرى .

إذا كانت $\bar{x}_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ ، فإنه يمكن كتابة معادلة انحدار X_1 على X_2, X_3 بصورة أكثر بساطة كالآتى :

$$(٣) \quad x_1 = b_{12.3} x_2 + b_{13.2} x_3$$

حيث $b_{12.3}$ ، $b_{13.2}$ نحصل عليها بحل المعادلات الآتية آنياً

$$(٤) \quad \left. \begin{aligned} \sum x_1 x_2 &= b_{12.3} \sum x_2^2 + b_{13.2} \sum x_2 x_3 \\ \sum x_1 x_3 &= b_{12.3} \sum x_2 x_3 + b_{13.2} \sum x_3^2 \end{aligned} \right\}$$

هذه المعادلات ، وهى مكافئة للمعادلات الاعتدالية (٢) نحصل عليها بصورة أساسية بضرب طرفى المعادلة (٣) في x_2 و x_3 على التوالى ثم التجميع على الطرفين . أنظر المسألة ١٥ - ٨ .

مستويات الانحدار ومعاملات الانحدار :

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بين X_1 ، X_2 بالرمز r_{12} وبين X_1 ، X_3 بالرمز r_{13} وبين X_2 ، X_3 بالرمز r_{23} حيث يتم حسابها كما في الفصل الرابع عشر (تسمى أحياناً بمعاملات الارتباط من الدرجة صفر) ، فإن معادلة انحدار مستوى المربعات الصغرى هي

$$(٥) \quad \frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_3}{s_3}$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1$ ، $x_2 = X_2 - \bar{X}_2$ ، $x_3 = X_3 - \bar{X}_3$ ، s_1 ، s_2 ، s_3 هي الانحرافات المعيارية لكل من X_1 ، X_2 ، X_3 على الترتيب (أنظر المسألة ١٥ - ٩) .

لاحظ أنه إذا كان المتغير X_3 غير موجود و $X_1 = Y$ و $X_2 = X$ ، فإن المعادلة (٥) تختصر إلى المعادلة (٢٥) صفحة ٣٩٤ ، بالفصل الرابع عشر .

الخطأ المعياري للتقدير :

بتعميم المعادلة (٨) صفحة ٣٩٠ ، بالفصل الرابع عشر ، يمكن أن نعرف الخطأ المعياري للتقدير X_1 على X_2 و X_3 كالتالي :

$$(٦) \quad s_{1.23} = \sqrt{\frac{\sum (X_1 - X_{1.est.})^2}{N}}$$

حيث $X_{1.est.}$ تدبر عن قيم X_1 المقدرة كما هي محسوبة من معادلات انحدار (١) أو (٥) .

وبدلالة معاملات الارتباط r_{12} ، r_{13} ، r_{23} ، فإن الخطأ المعياري للتقدير يمكن حسابه أيضاً من النتيجة

$$(٧) \quad s_{1.23} = s_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

التفسير المستند إلى نظرية المعاينة للخطأ المعياري للتقدير في حالة متغيرين كما هو معطى بالصفحة ٣٩٠ في حالة ما إذا كانت N كبيرة يمكن تعميمه لحالة الأبعاد الثلاثة وذلك بإحلال الخطوط الموازية لخط الانحدار بمستويات موازية لمستوى الانحدار . وكتقدير أفضل للخطأ المعياري للمجتمع للتقدير نستخدم

$$\hat{s}_{1.23} = \sqrt{N/(N-3)} s_{1.23}$$

معامل الارتباط المتعدد :

يعرف معامل الارتباط المتعدد كامتداد للمعادلات (١٢) أو (١٤) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر . فعلى سبيل المثال ، فإنه في حالة متغيرين مستقلين ، فإن معامل الارتباط المتعدد يعرف كما يلي :

$$(٨) \quad R_{1.23} = \sqrt{1 - \frac{s_{1.23}^2}{s_1^2}}$$

حيث s_1 هو الانحراف المعياري للمتغير X_1 و $s_{1.23}$ يعرف بالمعادلة (٦) أو (٧) . المقدار $R_{1.23}^2$ يسمى معامل التحديد المتعدد .

وعند استخدام معادلة الانحدار الخطي ، فإن معامل الارتباط المتعدد يسمى معامل الارتباط المتعدد الخطي . وبالم يذكر خلاف ذلك ، فإنه عند الإشارة إلى معامل الارتباط المتعدد فإن هذا يتضمن الارتباط المتعدد الخطي .

بدلالة r_{12} و r_{13} و r_{23} يمكن كتابة المعادلة (٨) كالآتي :

$$(٩) \quad R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

معامل الارتباط المتعدد ، مثل $R_{1.23}$ يقع بين صفر وواحد . وكلما اقترب من واحد كلما كان الارتباط الخطي بين المتغيرات أفضل . وكلما اقترب من الصفر كلما كان الارتباط الخطي أسوأ . فإذا كان معامل الارتباط المتعدد يساوي الواحد ، فإن الارتباط يسمى تام ، وعلى الرغم من أن معامل الارتباط صفر يشير إلى عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرات ، فإنه من الممكن وجود علاقة غير خطية .

تبديل المتغير التابع :

النتائج السابقة صحيحة في حالة اعتبار X_1 هو المتغير التابع . وعلى أية حال ، فإذا أردنا اعتبار X_3 ، على سبيل المثال ، كتغير تابع بدلا من X_1 ، فإنه يجب فقط إبدال الدليل ١ بدلا من ٣ و ٣ بدلا من ١ ، في الصيغة التي حصلنا عليها .

على سبيل المثال ، معادلة انحدار X_3 على X_1 و X_2 تصبح

$$(١٠) \quad \frac{x_3}{s_3} = \left(\frac{r_{23} - r_{13}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \frac{x_1}{s_1}$$

كما حصلنا عليها من المعادلة (٥) ، باستخدام $r_{32} = r_{23}$ ، $r_{31} = r_{13}$ ، $r_{21} = r_{12}$

التعميم في حالة أكثر من ثلاث متغيرات :

هذه الحالة نحصل عليها بالمائلة مع النتائج السابقة . على سبيل المثال ، فإن معادلة الانحدار الخطي لـ X_1 على X_2 ، X_3 ، X_4 يمكن كتابتها على الصورة

$$(١١) \quad X_1 = b_{1.234} + b_{12.34}X_2 + b_{13.24}X_3 + b_{14.23}X_4$$

ويمثل مستوى زائد في مجال ذي أربعة أبعاد . بضرب طرفي المعادلة (١١) في X_2, X_3, X_4 ، على التوالي ثم التجميع على الطرفين نحصل على المعادلات الاعتدالية اللازمة لتحديد قيمة $b_{1,234}, b_{12,34}, b_{13,24}$ and $b_{14,23}$. والتي بإحلالها في (١١) نحصل على معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2, X_3, X_4 . وهذه يمكن كتابتها في صورة ماثلة للمعادلة (٥) . (أنظر المسألة ١٤ - ٤١) .

الارتباط الجزئى :

غالباً ما يكون من المهم قياس الارتباط بين المتغير التابع ، ومتغير مستقل معين عندما نعتبر جميع المتغيرات الأخرى ثابتة ، أى عندما نزيل أثر جميع المتغيرات الأخرى (ويشار إليها بالعبارة « العوامل الأخرى تظل متساوية ») . وهذه يمكن الحصول عليها بتعريف معامل الارتباط الجزئى كما في المعادلة (١٢) صفحة ٣٩٢ بالفصل الرابع عشر ، فيما عدا أننا يجب اعتبار الاختلافات المفسرة والاختلافات الغير مفسرة والتي تنشأ مع وجود المتغير المستقل وكذلك التي تنشأ في حالة عدم وجوده .

فإذا كان $r_{12.3}$ يعبر عن معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_3 ، فإننا نجد

$$(١٢) \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}}$$

وبصورة ماثلة إذا كانت $r_{12.34}$ هي معامل الارتباط الجزئى بين X_1 و X_2 مع تثبيت X_3 و X_4 ، فإن

$$(١٣) \quad r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}}$$

وهذه النتائج مفيدة نظراً لدلالاتها فإن أى معامل ارتباط جزئى يمكن في النهاية جعله يعتمد على معاملات الارتباط r_{12}, r_{23} وهكذا (أى على معاملات الارتباط ذات الرتبة صفر) .

في حالة متغيرين X و Y ، فإنه إذا كان خطى الانحدار $Y = a_0 + a_1X$ و $X = b_0 + b_1Y$ ، فإن $r^2 = a_1b_1$ (أنظر المسألة ١٤ - ٢٢ ، الفصل الرابع عشر) . وهذه النتيجة يمكن تعميمها . فعلى سبيل المثال ، إذا كان

$$(١٤) \quad X_1 = b_{1,234} + b_{12,34}X_2 + b_{13,24}X_3 + b_{14,23}X_4$$

$$(١٥) \quad X_4 = b_{4,123} + b_{41,23}X_1 + b_{42,13}X_2 + b_{43,12}X_3$$

هي معادلات خطية في X_1 على X_2 و X_3 و X_4 على X_1 و X_2 و X_3 على X_4 ، إذن

$$(١٦) \quad r_{14,23}^2 = b_{14,23}b_{41,23}$$

(أنظر المسألة ١٥ - ١٨) وهذه يمكن اعتبارها نقطة بداية في تعريف معامل الارتباط الجزئى الخطى .

العلاقة بين معاملات الارتباط المتعددة والجزئية :

يمكن الحصول على نتائج ذات أهمية تربط بين معاملات الارتباط المتعددة ومعاملات الارتباط الجزئية المختلفة .
على سبيل المثال ، نجد

$$(١٧) \quad 1 - R_{1,23}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)$$

$$(١٨) \quad 1 - R_{1,234}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13,2}^2)(1 - r_{14,23}^2)$$

ومن السهل تعميم هذه النتائج :

معامل الارتباط المتعدد غير الخطى :

النتائج السابقة للانحدار المتعدد الخطى يمكن امتدادها لتشمل الانحدار المتعدد غير الخطى . معاملات الارتباط المتعددة والجزئية يمكن كذلك تعريفها بطرق ماثلة كالتى شرحت أعلاه .

مسائل محلولة

معادلات انحدار تتضمن أكثر من ثلاث متغيرات :

١٥ - ١ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

$$(أ) \quad X_2 \text{ على } X_1 \text{ و } X_3 \quad (ب) \quad X_3 \text{ على } X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } X_4$$

$$(ج) \quad X_5 \text{ على } X_1 \text{ و } X_2 \text{ و } X_3 \text{ و } X_4$$

الحل :

$$(أ) \quad X_2 = b_{2,13} + b_{21,3}X_1 + b_{23,1}X_3$$

$$(ب) \quad X_3 = b_{3,124} + b_{31,24}X_1 + b_{32,14}X_2 + b_{34,12}X_4$$

$$(ج) \quad X_5 = b_{5,1234} + b_{51,234}X_1 + b_{52,134}X_2 + b_{53,124}X_3 + b_{54,123}X_4$$

١٥ - ٢ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

$$(أ) \quad X_3 = b_{3,12} + b_{31,2}X_1 + b_{32,1}X_2$$

$$(ب) \quad X_1 = b_{1,234} + b_{12,34}X_2 + b_{13,24}X_3 + b_{14,23}X_4$$

الحل :

(أ) بضرب المعادلة على الترتيب في 1 ، X_1 ، X_2 ، والتجميع على الطرفين . نجد أن المعادلات الاعتيادية هي

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_3 &= b_{3.12} N + b_{31.2} \Sigma X_1 + b_{32.1} \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 X_3 &= b_{3.12} \Sigma X_1 + b_{31.2} \Sigma X_1^2 + b_{32.1} \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 X_3 &= b_{3.12} \Sigma X_2 + b_{31.2} \Sigma X_1 X_2 + b_{32.1} \Sigma X_2^2 \end{aligned} \right\}$$

(ب) بضرب المعادلة على الترتيب في 1 ، X_2 ، X_3 ، X_4 ، والتجميع على الطرفين نجد أن المعادلات الاعتيادية هي

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X_1 &= b_{1.234} N + b_{12.34} \Sigma X_2 + b_{13.24} \Sigma X_3 + b_{14.23} \Sigma X_4 \\ \Sigma X_1 X_2 &= b_{1.234} \Sigma X_2 + b_{12.34} \Sigma X_2^2 + b_{13.24} \Sigma X_2 X_3 + b_{14.23} \Sigma X_2 X_4 \\ \Sigma X_1 X_3 &= b_{1.234} \Sigma X_3 + b_{12.34} \Sigma X_2 X_3 + b_{13.24} \Sigma X_3^2 + b_{14.23} \Sigma X_3 X_4 \\ \Sigma X_1 X_4 &= b_{1.234} \Sigma X_4 + b_{12.34} \Sigma X_2 X_4 + b_{13.24} \Sigma X_3 X_4 + b_{14.23} \Sigma X_4^2 \end{aligned} \right\}$$

لاحظ أن هذه ليست طريقة لاستنتاج المعادلات الاعتيادية ولكنها فقط طريقة أساسية لتذكرها . . . استنتاج هذه المعادلات نحصل عليه ببساطة باستخدام التفاضل كما في الملحق VIII ، صفحة ٥٤٠

عدد المعادلات الاعتيادية يساوى عدد الثوابت المجهولة .

١٥ - ٣ . يعتقد أن المتغير X_1 دالة خطية في X_2 و X_3 . عينة من 12 من أزواج القراءات (X_2 و X_3) نتج عنها قيم X_1 الموضحة بالجدول ١٥ - ١

(أ) أوجد معادلة الانحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 .(ب) أوجد قيمة X_1 المقدرة من قيم X_2 و X_3 المعطاة(ج) قدر X_1 عند $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$.

جدول ١٥ - ١

X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68
X_2	57	59	49	62	51	50	55	48	52	42	61	57
X_3	8	10	6	11	8	7	10	9	10	6	12	9

الحل :

(أ) معادلة الانحدار الخطي لـ X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالتالي :

$$X_1 = b_{1.23} + b_{12.3} X_2 + b_{13.2} X_3$$

فإن المعادلات الاعتدالية لاختدار المربعات الصغرى هي

$$(١) \quad \left. \begin{aligned} \Sigma X_1 &= b_{1.23} N + b_{12.3} \Sigma X_2 + b_{13.2} \Sigma X_3 \\ \Sigma X_1 X_2 &= b_{1.23} \Sigma X_2 + b_{12.3} \Sigma X_2^2 + b_{13.2} \Sigma X_2 X_3 \\ \Sigma X_1 X_3 &= b_{1.23} \Sigma X_3 + b_{12.3} \Sigma X_2 X_3 + b_{13.2} \Sigma X_3^2 \end{aligned} \right\}$$

العمل المتضمن في حساب المجاميع يمكن ترتيبه كما في الجدول ١٥ - ٢ . على الرغم من أننا لسنا الآن في حاجة إلى العمود المعنون X_1^2 ، إلا أننا أضفناه لاستخدامه فيما بعد .

جدول ١٥ - ٢

X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_2 X_3$
64	57	8	4096	3249	64	3648	512	456
71	59	10	5041	3481	100	4189	710	590
53	49	6	2809	2401	36	2597	318	294
67	62	11	4489	3844	121	4154	737	682
55	51	8	3025	2601	64	2805	440	408
58	50	7	3364	2500	49	2900	406	350
77	55	10	5929	3025	100	4235	770	550
57	48	9	3249	2304	81	2736	513	432
56	52	10	3136	2704	100	2912	560	520
51	42	6	2601	1764	36	2142	306	252
76	61	12	5776	3721	144	4636	912	732
68	57	9	4624	3249	81	3876	612	513
$\Sigma X_1 = 753$	$\Sigma X_2 = 643$	$\Sigma X_3 = 106$	$\Sigma X_1^2 = 48139$	$\Sigma X_2^2 = 34843$	$\Sigma X_3^2 = 976$	$\Sigma X_1 X_2 = 40830$	$\Sigma X_1 X_3 = 6796$	$\Sigma X_2 X_3 = 5779$

باستخدام الجدول ١٥ - ٢ ، فإن المعادلات الاعتدالية (١) تصبح

$$(٢) \quad \left. \begin{aligned} 12b_{1.23} + 643b_{12.3} + 106b_{13.2} &= 753 \\ 643b_{1.23} + 34843b_{12.3} + 5779b_{13.2} &= 40830 \\ 106b_{1.23} + 5779b_{12.3} + 976b_{13.2} &= 6796 \end{aligned} \right\}$$

بالحل نجد $b_{1.23} = 3.6512$ ، $b_{12.3} = 0.8546$ ، $b_{13.2} = 1.5063$ ومعادلة الاختدار المطلوبة هي

$$(٣) \quad X_1 = 3.65 + 0.855X_2 + 1.506X_3 \quad \text{أو} \quad X_1 = 3.6512 + 0.8546X_2 + 1.5063X_3$$

طريقة أخرى نتلافى فيها حل المعادلات آنياً ، (أنظر المسألة ١٥ - ٦)

(ب) باستخدام معادلة الاختدار (٣) نحصل على قيم X_1 المقدرة ، ويرمز لها بالرمز X_{1est} ، وذلك بالتعويض عن قيم X_2 و X_3 المقابلة . على سبيل المثال ، بالتعويض عن $X_1 = 57$ و $X_3 = 8$ في (٣) نجد أن $X_{1est} = 64.414$

وبطريقة ماثلة نحصل على القيم الأخرى المقدرة لـ X_1 وهي موضحة بالجدول ١٥ - ٣ مع قيم العينة لـ X_1

جدول ١٥ - ٣

X_{est}	64.414	69.136	54.564	73.206	59.286	56.925	65.717	58.229	63.153	48.582	73.857	65.920
X_1	64	71	53	67	55	58	77	57	56	51	76	68

(ج) بوضع $X_2 = 54$ و $X_3 = 9$ في المعادلة (٣) ، فإن التقدير هو $X_{est} = 63.356$ أو حوالى 63 .

١٥ - ٤ احسب الانحرافات المعيارية (أ) s_1 (ب) s_2 (ج) s_3 لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

(أ) المقدار s_1 هو الانحراف المعياري للمتغير X_1 . إذن باستخدام الجدول ١٥ - ٢ بالمسألة ١٥ - ٣ (أ) نجد ، باستخدام طرق الفصل الرابع

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum X_1^2}{N} - \left(\frac{\sum X_1}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{48139}{12} - \left(\frac{753}{12}\right)^2} = 8.6035 \text{ or } 8.6$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum X_2^2}{N} - \left(\frac{\sum X_2}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{34843}{12} - \left(\frac{643}{12}\right)^2} = 5.6930 \text{ or } 5.7 \quad (\text{ب})$$

$$s_3 = \sqrt{\frac{\sum X_3^2}{N} - \left(\frac{\sum X_3}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{976}{12} - \left(\frac{106}{12}\right)^2} = 1.8181 \text{ or } 1.8 \quad (\text{ج})$$

١٥ - ٥ احسب (أ) r_{12} (ب) r_{13} (ج) r_{23} لبيانات المسألة ١٥ - ٣

الحل :

(أ) المقدار r_{12} هو معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين X_1 و X_2 ، بإهمال المتغير X_3

إذن وباستخدام طرق الفصل الرابع عشر ، نحصل على

$$r_{12} = \frac{N \sum X_1 X_2 - (\sum X_1)(\sum X_2)}{\sqrt{[N \sum X_1^2 - (\sum X_1)^2][N \sum X_2^2 - (\sum X_2)^2]}}$$

$$= \frac{(12)(40830) - (753)(643)}{\sqrt{[(12)(48139) - (753)^2][(12)(34843) - (643)^2]}} = 0.8196 \text{ or } 0.82$$

(ب) ، (ج) باستخدام الصيغ المقابلة ، نحصل على $r_{13} = 0.7698 \text{ or } 0.77$ ، و $r_{23} = 0.7984 \text{ or } 0.80$.

١٥-٦ حل المسألة ١٥-٣ (أ) باستخدام المعادلة (٥) في صفحة ٤٣٢ ونتائج المسائل ١٥-٤ و ١٥-٥ .

الحل :

معادلة الانحدار X_1 على X_2 و X_3 هي ، بضرب طرفى المعادلة (٥) ، صفحة ٤٣٢ ، في s_1 ،

$$(١) \quad x_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) x_2 + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right) x_3$$

حيث $x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3$. باستخدام نتائج المسائل ١٥-٤ ، ١٥-٥ ، تصبح المعادلة (١) كالآتي

$$x_1 = 0.8546x_2 + 1.5063x_3$$

ونظراً لأن $\bar{X}_1 = \frac{\sum X_1}{N} = \frac{753}{12} = 62.750, \bar{X}_2 = \frac{\sum X_2}{N} = 53.583, \bar{X}_3 = 8.833$ بالمسألة ١٥-٣ ، المعادلة المطلوبة يمكن كتابتها كالآتي :

$$X_1 - 62.750 = 0.8546(X_2 - 53.583) + 1.506(X_3 - 8.833)$$

وهذه تتفق مع نتائج المسألة ١٥-٣ (أ) .

١٥-٧ لبيانات المسألة ١٥-٣ حدد (أ) متوسط الزيادة في X_1 المقابلة لوحدة زيادة في X_2 باعتبار X_3 ثابت (ب) متوسط الزيادة في X_1 المقابلة لوحدة زيادة في X_3 باعتبار X_2 ثابت .

الحل :

من معادلة الانحدار التي حصلنا عليها في ١٥-٣ (أ) ' و ١٥-٦ نجد أن إجابة (أ) هي 0.8546 أو حوالى 0.9 وإجابة (ب) هي 1.5063 أو حوالى 1.5 .

١٥-٨ وضع أن المعادلات (٣) و (٤) ، صفحة ٤٣١ ، مترتبة على (١) ، (٢) صفحات ٤٣٠ ، ٤٣١ .

الحل :

من المعادلة الأولى في المعادلات (٢) ، صفحة ٤٣١ ، نجد بقسمة الطرفين على N أن

$$(١) \quad \bar{X}_1 = b_{1.23} + b_{12.3}\bar{X}_2 + b_{13.2}\bar{X}_3$$

بطرح المعادلة من المعادلة (١) ، صفحة ٤٣٠ ، يعطى

$$(٢) \quad X_1 - \bar{X}_1 = b_{12.3}(X_2 - \bar{X}_2) + b_{13.2}(X_3 - \bar{X}_3)$$

$$x_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3 \quad \text{أو}$$

وهى المعادلة (٣) ، صفحة ٤٣١ .

اعتبر أن $X_1 = x_1 + \bar{X}_1$, $X_2 = x_2 + \bar{X}_2$, $X_3 = x_3 + \bar{X}_3$ فى المعادلات الثانية والثالثة من مجموعة المعادلات (٢) ، صفحة ٤٣١ . إذن بعد عمليات تبسيط جبرية ، وباستخدام النتائج $\Sigma x_1 = \Sigma x_2 = \Sigma x_3 = 0$ تصبح هذه المعادلات

$$(٣) \quad \Sigma x_1 x_2 = b_{12.3} \Sigma x_2^2 + b_{13.2} \Sigma x_2 x_3 + N \bar{X}_2 [b_{1.23} + b_{12.3} \bar{X}_2 + b_{13.2} \bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

$$(٤) \quad \Sigma x_1 x_3 = b_{12.3} \Sigma x_2 x_3 + b_{13.2} \Sigma x_3^2 + N \bar{X}_3 [b_{1.23} + b_{12.3} \bar{X}_2 + b_{13.2} \bar{X}_3 - \bar{X}_1]$$

والتي تختصر إلى المعادلات (٤) ، صفحة ٤٣١ ، نظراً لأن الكليات داخل الأقواس فى الجانب الأيمن فى (٣) و (٤) تصبح صفر من المعادلة (١) .

طريقة أخرى : أنظر المسألة ١٥ - ٣٠ .

$$9-10 \quad \text{استنتج المعادلة (٥) ، صفحة ٤٣٢ :} \quad \frac{x_1}{s_1} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_2}{s_2} + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \frac{x_3}{s_3}$$

من المعادلات (٣) و (٤) بالمسألة ١٥ - ٨

$$(١) \quad \begin{cases} b_{12.3} \Sigma x_2^2 + b_{13.2} \Sigma x_2 x_3 = \Sigma x_1 x_2 \\ b_{12.3} \Sigma x_2 x_3 + b_{13.2} \Sigma x_3^2 = \Sigma x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\text{بما أن } \Sigma x_2^2 = N s_2^2 \text{ and } \Sigma x_3^2 = N s_3^2 \text{ فإن } s_2^2 = \frac{\Sigma x_2^2}{N} \text{ and } s_3^2 = \frac{\Sigma x_3^2}{N}$$

$$\text{وبما أن } \Sigma x_2 x_3 = N s_2 s_3 r_{23} \text{ فإن } r_{23} = \frac{\Sigma x_2 x_3}{\sqrt{(\Sigma x_2^2)(\Sigma x_3^2)}} = \frac{\Sigma x_2 x_3}{N s_2 s_3}$$

$$\text{وبالمثل } \Sigma x_1 x_2 = N s_1 s_2 r_{12} \text{ and } \Sigma x_1 x_3 = N s_1 s_3 r_{13}$$

بالتعويض بهذه القيم فى (١) والتبسيط ، نجد

$$(٢) \quad \begin{cases} b_{12.3} s_2 + b_{13.2} s_3 r_{23} = s_1 r_{12} \\ b_{12.3} s_2 r_{23} + b_{13.2} s_3 = s_1 r_{13} \end{cases}$$

$$\text{بحل المعادلات (٢) آنياً ، } b_{12.3} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) \text{ and } b_{13.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right)$$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة $X_1 = b_{12.3}x_2 + b_{13.2}x_3$ (المعادلة (٢) ، المسألة ١٥ - ٨) وبالقسمة على s_1 نحصل على النتيجة المطلوبة .

الخطا المعياري للتقدير :

١٥ - ١٠ احسب الخطأ المعياري لتقدير X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

من الجدول ١٥ - ٣ بالمسألة ١٥ - ٣ (ب) ، نحصل على

$$s_{1,23} = \sqrt{\frac{\sum (X_1 - X_{1est})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{(64 - 64.414)^2 + (71 - 69.136)^2 + \dots + (68 - 65.920)^2}{12}} = 4.6447 \text{ or } 4.6$$

وتقدر الخطأ المعياري للتقدير للمجتمع : $s_{1,23} \cdot \sqrt{N_i(N-3)} = 5.3$ في هذه الحالة

١٥ - ١١ استخدم $s_{1,23}$ للحصول على نتائج المسألة ١٥ - ١٠

$$s_1 \sqrt{\frac{1 - r_{12}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2 + 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

الحل :

من المسائل ١٥ - ٤ (أ) و ١٥ - ٥ ، نحصل على

$$s_{1,23} = 8.6035 \sqrt{\frac{1 - (0.8196)^2 - (0.7698)^2 - (0.7984)^2 + 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7984)^2}} = 4.6$$

لاحظ أنه بالطريقة التي استخدمت في هذه المسألة فإننا نحصل على الخطا المعياري للتقدير بدون استخدام معادلة الانحدار .

معامل الارتباط المتعدد :

١٥ - ١٢ احسب معامل الارتباط المتعدد الخطى : X_1 على X_2 و X_3 من بيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

الطريقة الاولى : من نتائج المسائل ١٥ - ٤ (أ) و ١٥ - ١٠ ، نحصل على

$$R_{1,23} = \sqrt{1 - \frac{s_{1,23}^2}{s_1^2}} = \sqrt{1 - \frac{(4.6447)^2}{(8.6035)^2}} = 0.8418$$

الطريقة الثانية : من نتائج المسألة ١٥ - ٥

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = \sqrt{\frac{(0.8196)^2 + (0.7698)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7984)^2}} = 0.8418$$

لاحظ أن معامل الارتباط المتعدد $R_{1.23}$ أكبر من كل من المعاملات r_{12} أو r_{13} (أنظر المسألة ١٥ - ٥) . وهذا صحيح وفي نفس الوقت متوقع ، نظراً لأنه بالأخذ في الاعتبار إضافة متغيرات مستقلة أكثر لها صلة فيجب أن نصل إلى علاقة أفضل بين المتغيرات .

١٥ - ١٣ احسب معامل التحديد المتعدد لـ X_1 على X_2 و X_3 لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

معامل التحديد المتعدد لـ X_1 على X_2 و X_3 هو

$$R_{1.23}^2 = (0.8418)^2 = 0.7086$$

باستخدام المسألة ١٥ - ١٢ . إذن هناك حوالى 71 % من الاختلاف الكلى في X_1 المفسر باستخدام معادلة الانحدار

١٥ - ١٤ احسب (أ) $R_{2.13}$ (ب) $R_{3.12}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٣ وقارن بقيمة $R_{1.23}$.

الحل :

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{(0.8196)^2 + (0.7984)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.7698)^2}} = 0.8606 \quad (أ)$$

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{13}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{12}^2}} = \sqrt{\frac{(0.7698)^2 + (0.7984)^2 - 2(0.8196)(0.7698)(0.7984)}{1 - (0.8196)^2}} = 0.8234 \quad (ب)$$

هذه المسألة توضح حقيقة أنه ، بشكل عام ، $R_{1.23}$ ، $R_{3.12}$ ، $R_{2.13}$ غير متساويين ، كما هو مشاهد بالمقارنة بالمسألة ١٥ - ١٢ .

١٥ - ١٥ إذا كانت $R_{1.23} = 1$ فاثبت أن (أ) $R_{2.13} = 1$ (ب) $R_{3.12} = 1$.

الحل :

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}} \quad (١)$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2}} \quad (٢)$$

(أ) في (١) بوضع $R_{1.23} = 1$ وتربيع الطرفين ، نجد $r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{23}^2$ إذن

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 1 - r_{23}^2 \quad \text{أو} \quad \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{13}^2} = 1$$

أى $R_{2.13}^2 = 1$ أو $R_{2.13} = 1$ ، نظراً لأن معامل الارتباط المتعدد يعتبر غير سالب .

(ب) $R_{3.12} = 1$ نستنتج من الجزء (أ) بإبدال الأدلة ٢ ، ٣ في النتيجة ١ $R_{2.13} = 1$.

١٥ - ١٦ إذا كانت $R_{1.23} = 0$ ، هل يترب على ذلك بالضرورة أن تكون $R_{2.13} = 0$ ؟

الحل :

من المعادلة (١) بالمسألة ١٥ - ١٥ ، $R_{1.23} = 0$ في حالة وحيدة فقط ، وهى إذا كانت

$$r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23} = 0 \quad \text{or} \quad 2r_{12}r_{13}r_{23} = r_{12}^2 + r_{13}^2$$

من المعادلة (٢) بالمسألة ١٥ - ١٥ ،

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - (r_{12}^2 + r_{13}^2)}{1 - r_{13}^2}} = \sqrt{\frac{r_{23}^2 - r_{13}^2}{1 - r_{13}^2}}$$

وهى لاتساوى بالضرورة صفر .

الارتباط الجزئى :

١٥ - ١٧ احسب معاملات الارتباط الجزئى الخطئى (أ) $r_{12.3}$ (ب) $r_{13.2}$ (ج) $r_{23.1}$. لبيانات المسألة ١٥ - ٣ .

الحل :

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{13}^2)}}$$

باستخدام نتائج المسألة ١٥ - ٥ ، نجد $r_{12.3} = 0.5334$ ، $r_{13.2} = 0.3346$ ، $r_{23.1} = 0.4580$

ومنها نجد أنه إذا اعتبرنا X_3 ثابتاً فإن معامل الارتباط بين X_1 و X_2 هو 0.53 . ولقيمة ثابتة لـ X_2 فإن معامل الارتباط بين X_1 و X_3 هو 0.33 . وبما أن هذه النتائج تعتمد على عينة صغيرة حجمها 12 مجموعة من القيم ، فإن الاعتماد عليها ليس في نفس درجة مأمونية الاعتماد على النتائج التي تحصل عليها من عينة ذات حجم أكبر .

١٥ - ١٨ إذا كانت $X_1 = b_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3$ و $X_3 = b_{3.12} + b_{32.1}X_2 + b_{31.2}X_1$ هي معادلات انحدار X_1 على X_2 و X_3 ، X_3 على X_2 و X_1 ، حل الترتيب ، أثبت $r_{13.2}^2 = b_{13.2}b_{31.2}$

الحل :

معادلة انحدار X_1 على X_2 و X_3 يمكن كتابتها كالتالى (أنظر المعادلة (٥) صفحة ٤٣٢)

$$(١) \quad X_1 - \bar{X}_1 = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_2} \right) (X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right) (X_3 - \bar{X}_3)$$

معادلة انحدار X_3 على X_2 و X_1 يمكن كتابتها كالتالى (أنظر المعادلة (١٠) صفحة ٤٣٣)

$$(٢) \quad X_3 - \bar{X}_3 = \left(\frac{r_{23} - r_{12}r_{13}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_2} \right) (X_2 - \bar{X}_2) + \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_1} \right) (X_1 - \bar{X}_1)$$

من (١) ، (٢) ، نجد أن معامل X_3 هو

$$b_{31.2} = \left(\frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \right) \left(\frac{s_3}{s_1} \right) \text{ ومعامل } X_1 \text{ هو } b_{13.2} = \left(\frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2} \right) \left(\frac{s_1}{s_3} \right)$$

$$b_{13.2} b_{31.2} = \frac{(r_{12} - r_{13}r_{23})^2}{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{12}^2)} = r_{13.2}^2 \quad \text{إذن}$$

$$r_{13.2} = r_{13} \sqrt{\frac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (أ) \quad \text{إذا كانت } r_{12.3} = 0 \text{ ، أثبت أن (أ)}$$

$$r_{23.1} = r_{23} \sqrt{\frac{1 - r_{13}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (ب)$$

الحل :

$$r_{12} = r_{13} r_{23} \quad \text{فإن} \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} = 0 \quad \text{إذا كانت}$$

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13} - (r_{13}r_{23})r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{r_{13}(1 - r_{23}^2)}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = r_{13} \sqrt{\frac{1 - r_{23}^2}{1 - r_{12}^2}} \quad (أ)$$

(ب) بدل رموز الدليل 1 و 2 في نتيجة الجزء (أ) .

الارتباط المتعدد والجزئى فى حالة أربع متغيرات أو أكثر :

١٥ - ٢٠ يتكون امتحان القبول بإحدى الكليات من ثلاث امتحانات فى الرياضة ، اللغة الإنجليزية والمعلومات العامة . لأختبار مقدرة امتحان القبول فى التنبؤ بأداء الطالب فى مقرر الإحصاء ، جمعت بيانات تخص عينة من 200 طالب وتم تحليلها . اعتبر .

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{درجات مقرر الإحصاء} \\ X_2 &= \text{درجات امتحان الرياضة} \\ X_3 &= \text{درجات امتحان المعلومات العامة} \\ X_4 &= \text{درجات امتحان اللغة الإنجليزية} \end{aligned}$$

وقد تم الحصول على الحسابات التالية :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 75, s_1 = 10, \bar{X}_2 = 24, s_2 = 5, \bar{X}_3 = 15, s_3 = 3, \bar{X}_4 = 36, s_4 = 6 \\ r_{12} &= 0.90, r_{13} = 0.75, r_{14} = 0.80, r_{23} = 0.70, r_{24} = 0.70, r_{34} = 0.85 \end{aligned}$$

أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 و X_4 .

الحل :

بتعميم نتائج المسألة ١٥ - ٨ ، يمكن كتابته معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_1 على X_2 و X_3 و X_4 فى الصورة

$$(١) \quad x_1 = b_{12.34}x_2 + b_{13.24}x_3 + b_{14.23}x_4$$

حيث $b_{12.34}$ ، $b_{13.24}$ ، $b_{14.23}$ يمكن الحصول عليها من المعادلات الاعتدالية

$$(٢) \quad \begin{cases} \sum x_1 x_2 = b_{12.34} \sum x_2^2 + b_{13.24} \sum x_2 x_3 + b_{14.23} \sum x_2 x_4 \\ \sum x_1 x_3 = b_{12.34} \sum x_2 x_3 + b_{13.24} \sum x_3^2 + b_{14.23} \sum x_3 x_4 \\ \sum x_1 x_4 = b_{12.34} \sum x_2 x_4 + b_{13.24} \sum x_3 x_4 + b_{14.23} \sum x_4^2 \end{cases}$$

$$\text{حيث } x_1 = X_1 - \bar{X}_1, x_2 = X_2 - \bar{X}_2, x_3 = X_3 - \bar{X}_3, x_4 = X_4 - \bar{X}_4.$$

ومن البيانات المعطاة ، نجد

$$\begin{aligned} \sum x_1^2 &= N s_1^2 = 5000 & \sum x_1 x_2 &= N s_1 s_2 r_{12} = 9000 & \sum x_2 x_3 &= N s_2 s_3 r_{23} = 2100 \\ \sum x_1^2 &= N s_1^2 = 5000 & \sum x_1 x_3 &= N s_1 s_3 r_{13} = 4500 & \sum x_2 x_4 &= N s_2 s_4 r_{24} = 4200 \\ \sum x_1^2 &= N s_1^2 = 5000 & \sum x_1 x_4 &= N s_1 s_4 r_{14} = 9600 & \sum x_3 x_4 &= N s_3 s_4 r_{34} = 3060 \end{aligned}$$

بوضع هذه النتائج فى المعادلات (٢) والحل ، نحصل على

$$(٣) \quad b_{12.34} = 1.3333, b_{13.24} = 0.0000, b_{14.23} = 0.5556$$

إذن بالتعويض فى (١) نحصل على معادلة الانحدار المطلوبة .

$$\begin{aligned} (٤) \quad x_1 &= 1.3333x_2 + 0.0000x_3 + 0.5556x_4 \\ X_1 - 75 &= 1.3333(X_2 - 24) + 0.5556(X_4 - 36) \quad \text{أو} \\ X_1 &= 22.9999 + 1.3333X_2 + 0.5556X_4 \quad \text{أو} \end{aligned}$$

والحل التقيق للمعادلة (٢) ينتج $b_{12.34} = \frac{4}{3}$ ، $b_{13.24} = 0$ ، $b_{14.23} = \frac{5}{9}$ ، بحيث يمكن أيضاً كتابة معادلة الانحدار كالتالى :

$$(٥) \quad X_1 = 23 + \frac{4}{3}X_2 + \frac{5}{9}X_4$$

ومن المهم ملاحظة أن معادلة الانحدار لاتتضمن درجات اللغة الإنجليزية ، بالتحديد X_3 . وهذا لايعنى أن معرفة الشخص باللغة الإنجليزية ، ليس لها أى صلة بأدائه فى الإحصاء . ولكن تعنى أن الحاجة إلى اللغة الإنجليزية ، فيما يختص بالتنبؤ بدرجات الإحصاء ، تحجبها الدرجات التى تتحقق فى الامتحانات الأخرى .

١٥ - ٢١ طالبان أديا امتحان الالتحاق بالكلية الموضحة فى المسألة ١٥ - ٢٠ ، وقد سجلوا الدرجات التالية :

(أ) 30 رياضة ، 18 لغة انجليزية ، 32 معلومات عامة

(ب) 18 رياضة ، 30 لغة انجليزية ، 36 معلومات عامة . ماهى درجاتهم المتوقعة فى الإحصاء ؟

الحل :

(أ) بالتعويض $X_2 = 30$ ، $X_3 = 18$ ، $X_4 = 32$ فى المعادلة (٥) بالمسألة ١٥ - ١٩ ، فإن الدرجة المتوقعة فى الإحصاء هى $X_1 = 81$.

(ب) كما فى الجزء (أ) حيث $X_4 = 36$ ، $X_3 = 20$ ، $X_2 = 18$ ، نجد أن $X_1 = 37$.

١٥ - ٢٢ أوجد معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12.34}$ (ب) $r_{13.24}$ (ج) $r_{14.23}$. لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ .

الحل :

$$(١) ، (ب) \quad r_{12.4} = \frac{r_{12} - r_{14}r_{24}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{24}^2)}} , \quad r_{13.4} = \frac{r_{13} - r_{14}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{14}^2)(1 - r_{34}^2)}} , \quad r_{23.4} = \frac{r_{23} - r_{24}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{24}^2)(1 - r_{34}^2)}} .$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ - ٢٠ ، نحصل على $r_{12.4} = 0.7935$ ، $r_{13.4} = 0.2215$ ، $r_{23.4} = 0.2791$. إذن

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0.7814 , \quad r_{13.24} = \frac{r_{13.4} - r_{12.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{12.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = 0.0000$$

$$(ج) \quad r_{14.3} = \frac{r_{14} - r_{13}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{34}^2)}} , \quad r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{13}^2)(1 - r_{23}^2)}} , \quad r_{24.3} = \frac{r_{24} - r_{23}r_{34}}{\sqrt{(1 - r_{23}^2)(1 - r_{34}^2)}} .$$

باستخدام القيم الموضحة بالمسألة ١٥ - ٢٠ ، نحصل على $r_{14.3} = 0.4664$ ، $r_{12.3} = 0.7939$ ، $r_{24.3} = 0.2791$. إذن

$$r_{14.23} = \frac{r_{14.3} - r_{12.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{12.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}} = 0.4193$$

١٥ - ٢٢ فسر معاملات الارتباط الجزئية (أ) $r_{12.4}$ (ب) $r_{13.4}$ (ت) $r_{12.34}$ (ث) $r_{14.3}$ (ج) $r_{14.23}$ التي حصلت عليها في المسألة ١٥ - ٢٢ .

الحل :

(أ) $r_{12.4} = 0.7935$. تمثل معامل الارتباط (الخطي) بين درجات الإحصاء و ما سجله الطلبة في الرياضيات وذلك لجميع الطلبة الذين لهم نفس درجات المعلومات العامة . وللحصول على هذا المعامل ، فإن درجات اللغة الإنجليزية (وكذلك العوامل الأخرى التي لم تأخذ في الحسبان) لم تأخذ في الاعتبار ، وهذا واضح من حقيقة أن الدليل 3 قد حذف .

(ب) $r_{13.4} = 0.2215$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء و ما سجله الطلبة في اللغة الإنجليزية وذلك للذين سجلوا نفس الدرجة في المعلومات العامة . هنا درجة الطلبة في الرياضيات لم تأخذ في الاعتبار

(ج) $r_{12.34} = 0.7814$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء و ما سجله الطلبة في الرياضيات وذلك للطلبة المتساويين فيما سجلوه في اللغة الإنجليزية و ما سجلوه في المعلومات العامة .

(د) $r_{14.23} = 0.4664$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء و ما سجله الطلبة في المعلومات العامة وذلك للطلبة المتساويين فيما سجلوه في اللغة الإنجليزية .

(هـ) $r_{14.23} = 0.4193$ تمثل معامل الارتباط بين درجات الإحصاء و ما سجله الطلبة في المعلومات العامة للطلبة المتساويين فيما سجلوه في الرياضيات و ما سجلوه ، في اللغة الإنجليزية .

١٥ - ٢٤ (أ) لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ ، بين أن

$$(١) \quad \frac{r_{12.4} - r_{13.4}r_{23.4}}{\sqrt{(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{23.4}^2)}} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3}r_{24.3}}{\sqrt{(1 - r_{14.3}^2)(1 - r_{24.3}^2)}}$$

(ب) اشرح دلالة التساوى في الجزء (أ)

الحل :

(أ) الجانب الأيسر من (١) حسب في المسألة ١٥ - ٢٢ (أ) ، ويعطى النتيجة 0.7814 . لحساب الجانب الأيمن من (١) ، نستخدم نتائج المسألة ١٥ - ٢٢ (ج) والتي تعطى 0.7814 . أى أن الجانبين متساويان في هذه الحالة الخاصة .

بالمعاملات الجبرية المباشرة من الممكن إثبات أن الطرفين متساويان بشكل عام .

(ب) الجانب الأيسر من (١) هو $r_{12.34}$ ، الجانب الأيمن هو $r_{12.43}$. بما أن $r_{12.34}$ هو معامل الارتباط بين المتغيرات X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_3 و X_4 ككوابت ، بينما $r_{12.43}$ هو معامل الارتباط بين X_1 و X_2 مع الاحتفاظ بـ X_3 و X_4 ككوابت فإن ذلك يوضح السبب في حدوث التساوى .

١٥ - ٢٥ أوجد (أ) معامل الارتباط المتعدد $R_{1.234}$

(ب) الخطأ المعياري للتقدير $s_{1.234}$ وذلك لبيانات المسألة ١٥ - ٢٠ .

الحل :

$$1 - R_{1.234}^2 = (1 - r_{12}^2)(1 - r_{13.2}^2)(1 - r_{14.23}^2) \text{ or } R_{1.234} = 0.9310 \quad (أ)$$

وبما أن $r_{12} = 0.90$ من المسألة ١٥ - ٢٠ ، $r_{14.23} = 0.4193$ من المسألة ١٥ - ٢٢ (ت) ، و

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12}r_{23}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2)(1 - r_{23}^2)}} = \frac{0.75 - (0.90)(0.70)}{\sqrt{[1 - (0.90)^2][1 - (0.70)^2]}} = 0.3855$$

طريقة أخرى :

بإبدال الأدلة 2 و 4 في المعادلة الأولى نحصل على

$$R_{1.234} = 0.9310 \text{ ، } 1 - R_{1.234}^2 = (1 - r_{14}^2)(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{12.34}^2)$$

حيث استخدمت نتائج المسألة ١٥ - ٢٢ (أ) مباشرة

$$s_{1.234} = s_1 \sqrt{1 - R_{1.234}^2} = 10 \sqrt{1 - (0.9310)^2} = 3.650 \text{ أو } R_{1.234} = \sqrt{1 - s_{1.234}^2/s_1^2} \quad (ب)$$

قارن بالمعادلة (٨) ، صفحة ٤٣٣

مسائل إضافية

معادلات انحدار تتضمن ثلاث متغيرات :

١٥ - ٢٦ باستخدام رموز الدليل الملائمة ، اكتب معادلات الانحدار

(ب) X_4 على X_1 و X_2 و X_3 و X_5 . (أ) X_3 على X_1 و X_2 .

$$X_3 = b_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2 \quad (أ) \text{ ج}$$

$$X_4 = b_{4.1235} + b_{41.235}X_1 + b_{42.135}X_2 + b_{43.125}X_3 \quad (ب)$$

١٥ - ٢٧ اكتب المعادلات الاعتدالية المقابلة لمعادلات الانحدار

(أ) X_2 على X_1 و X_3 . (ب) X_3 على X_1 و X_2 و X_3 و X_4 .

١٥ - ٢٨ الجدول يوضح القيم المتقابلة لثلاث متغيرات

X_1	3	5	6	8	12	14
X_2	16	10	7	4	3	2
X_3	90	72	54	42	30	12

(أ) أوجد معادلة انحدار مربعات الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

(ب) قدر x_3 عند $x_1 = 10$ و $x_2 = 6$.

$$ج : (أ) \quad X_3 = 61.40 - 3.65X_1 + 2.54X_2$$

(ب) 40

١٥ - ٢٩ محاضر في الرياضيات يريد تحديد العلاقة بين درجات الامتحان النهائي ودرجات امتحانين مفاجئين خلال الفصل الدراسي. اعتبر أن X_1 هو درجات الطالب في الامتحان المفاجيء الأول و X_2 درجاته في الامتحان المفاجيء الثاني و X_3 هي درجته في الامتحان النهائي ، وقد أعطى الحسابات التالية لمجموع 120 طالباً .

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 6.8 & \bar{X}_2 &= 7.0 & \bar{X}_3 &= 74 \\ s_1 &= 1.0 & s_2 &= 0.80 & s_3 &= 9.0 \\ r_{12} &= 0.60 & r_{13} &= 0.70 & r_{23} &= 0.65 \end{aligned}$$

(أ) أوجد معادلة انحدار المربعات الصغرى لـ X_3 على X_1 و X_2 .

(ب) قدر درجات الامتحان النهائي لطالين بـ 8 و 4 ، 7 و 9 على الترتيب في الامتحانين المفاجئين

$$ج : (أ) \quad X_3 - 74 = 4.36(X_1 - 6.8) + 4.04(X_2 - 7.0) \text{ or } X_3 = 16.07 + 4.36X_1 + 4.04X_2$$

(ب) 66 و 84

١٥ - ٣٠ حل المسألة ١٥ - ٨ باختيار المتغيرات X_2 و X_3 بحيث تكون $\Sigma X_2 = \Sigma X_3 = 0$

الخطا المعياري للتقدير :

١٥ - ٣١ أوجد الخطأ المعياري لتقدير X_3 على X_1 و X_2 للبيانات بالمسألة ١٥ - ٢٨ .

ج : 3.12

١٥ - ٣٢ أوجد الخطأ المعياري لتقدير (أ) X_3 على X_1 و X_2

(ب) X_1 على X_2 و X_3 . لبيانات المسألة ٥١ - ٢٩

ج : (أ) 5.883 (ب) 0.6882

معامل الارتباط المتعدد

١٥ - ٣٣ احسب معامل الارتباط المتعدد الخطى لـ X_3 على X_1 و X_2 لبيانات المسألة ١٥ - ٢٨

١٥ - ٣٤ احسب (أ) $R_{3 \cdot 12}$ (ب) $R_{1 \cdot 23}$ (ج) $R_{2 \cdot 13}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٢٩ .

ج : (أ) 0.7567 (ب) 0.7255 (ج) 0.6810

١٥ - ٣٥ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $R_{1 \cdot 23} = R_{2 \cdot 31} = R_{3 \cdot 12} = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1+r}}$. ناقش الحالة $r = 1$.

١٥ - ٣٦ إذا كانت $R_{1 \cdot 23} = 0$ ، أثبت أن $|r_{12}| \geq |r_{23}|$ و $|r_{23}| \geq |r_{13}|$ وفسر ذلك .

الارتباط الجزئي :

١٥ - ٣٧ احسب معاميل الارتباط الجزئي الخطي (أ) $r_{12 \cdot 3}$ (ب) $r_{13 \cdot 2}$ (ج) $r_{23 \cdot 1}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٢٨ وفسر إجابتك

ج : (أ) 0.5950 (ب) 0.8995 (ج) 0.8727

١٥ - ٣٨ حل المسألة ١٥ - ٣٧ باستخدام بيانات المسألة ١٥ - ٢٩ .

ج : (أ) 0.2672 (ب) 0.5099 (ج) 0.4026

١٥ - ٣٩ إذا كانت $r_{12} = r_{13} = r_{23} = r \neq 1$ ، بين أن $r_{12 \cdot 3} = r_{13 \cdot 2} = r_{23 \cdot 1} = r/(1+r)$. ناقش الحالة $r = 1$

١٥ - ٤٠ إذا كانت $r_{12 \cdot 3} = 1$ ، بين أن (أ) $|r_{13 \cdot 2}| = 1$ ، (ب) $|r_{23 \cdot 1}| = 1$ ، (ج) $R_{1 \cdot 23} = 1$ ، (د) $s_{1 \cdot 23} = 0$

الانحراف المتعدد والجزئي في حالة وجود اربع متغيرات او اكثر :

١٥ - ٤١ وضح أن معادلة انحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 يمكن كتابتها

$$\frac{x_4}{s_4} = a_1\left(\frac{x_1}{s_1}\right) + a_2\left(\frac{x_2}{s_2}\right) + a_3\left(\frac{x_3}{s_3}\right)$$

حيث a_1 و a_2 و a_3 تحدد بحل المعادلات الآتية :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 r_{11} + a_2 r_{12} + a_3 r_{13} = r_{14} \\ a_1 r_{21} + a_2 r_{22} + a_3 r_{23} = r_{24} \\ a_1 r_{31} + a_2 r_{32} + a_3 r_{33} = r_{34} \end{array} \right.$$

وحيث $x_j = X_j - \bar{X}_j$ ، $r_{jj} = 1$ ، $j = 1, 2, 3, 4$. نعلم النتيجة في حالة وجود أكثر من أربع متغيرات .

٤٢ - ١٥ إذا كانت

$$\bar{X}_1 = 20, X_2 = 36, \bar{X}_3 = 12, \bar{X}_4 = 80, s_1 = 1.0, s_2 = 2.0, s_3 = 1.5, s_4 = 6.0, r_{12} = -0.20, r_{13} = 0.40, r_{23} = 0.50, r_{14} = 0.40, r_{24} = 0.30, r_{34} = -0.10.$$

(أ) أوجد معادلة الانحدار X_4 على X_1 و X_2 و X_3 .

(ب) قدر X_4 عند $X_1 = 15$ و $X_2 = 40$ و $X_3 = 14$.

ج : (أ) $X_4 = 6X_1 + 3X_2 - 4X_3 - 100$ (ب) 54

٤٣ - ١٥ أوجد (أ) $r_{41.23}$ (ب) $r_{42.13}$ (ج) $r_{43.12}$. لبيانات المسألة ١٥ - ٤٢ وفسر نتائجك.

ج : (أ) 0.8710 (ب) 0.8587 (د) -0.8426

٤٤ - ١٥ (أ) $R_{4.123}$ (ب) $s_{4.123}$ لبيانات المسألة ١٥ - ٤٢.

ج : (أ) 0.8947 (ب) 2.680

٤٥ - ١٥ جمع عالم بيانات خاصة بأربع متغيرات W و V و U و T . ويعتقد أن معادلة على الصورة

$W = aT^b U^c V^d$ حيث a, b, c, d ثوابت غير معروفة ، يمكن الحصول عليها ومنها يمكن تحديده قيمة W بمعرفة T, U, V . حدد بصورة واضحة أسلوباً يمكن به تحقيق هذا الهدف .

(إرشاد : احصل على لوغاريتم طرفى المعادلة) .

الفصل السادس عشر

تحليل السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية :

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات أخذت في فترات زمنية محددة ، عادة على فترات متساوية .

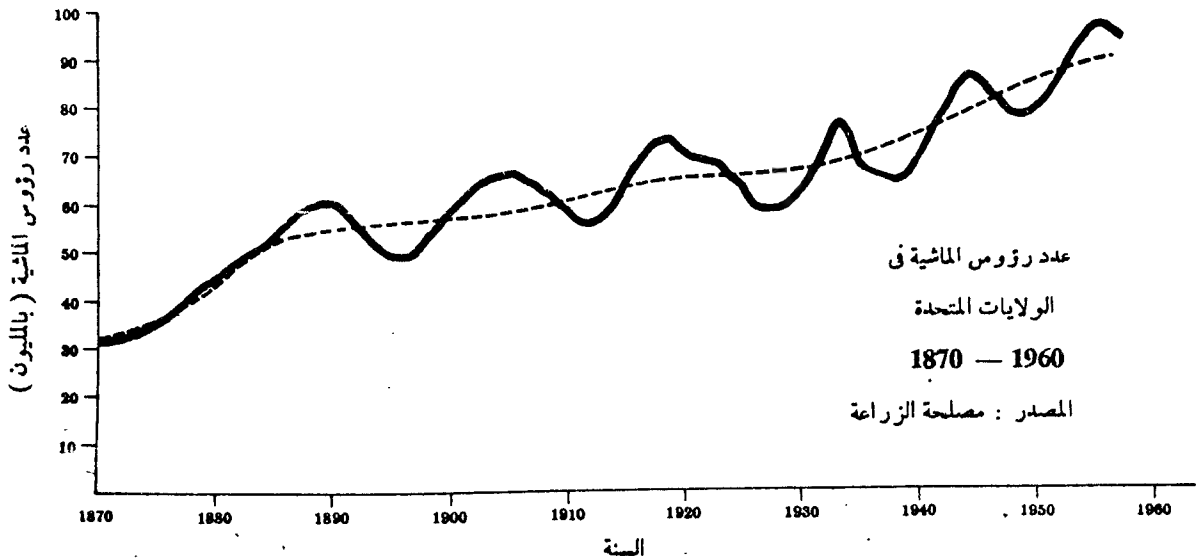
من أمثلة السلاسل الزمنية الانتاج الكلى في السنة من الصلب في الولايات المتحدة على مدار عدد من السنوات ، سعر الإقفال اليومي للأسهم في سوق الأوراق المالية ، درجات الحرارة كل ساعة والمعلن عنها بواسطة مكتب التنبؤات الجوية في مدينة ، المجموع الشهري لإيصالات المبيعات في أحد المتاجر .

وتعرف السلسلة الزمنية رياضياً بالقيم Y_1, Y_2, \dots والتي يأخذها المتغير Y (درجات الحرارة ، سعر الإقفال للأسهم ، وغيرها) عند الزمن t_1, t_2, \dots أى أن Y دالة في t ، ونرمز لذلك بالرمز $Y = F(t)$.

الرسم البياني للسلاسل الزمنية :

تمثل السلسلة الزمنية المتضمنة المتغير Y تصويرياً بتكوين الشكل البياني Y مقابل t ، كما فعلنا ذلك عديداً من المرات ، في فصول سابقة .

الشكل ١٦ - ١ يوضح الرسم البياني لسلسلة زمنية توضح عدد رؤوس الماشية في الولايات المتحدة خلال السنوات 1870-1960.



التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

من المفيد التفكير في الرسم البياني للسلسلة الزمنية ، كما هو موضح بالشكل ١٦ - ١ ، كنقطة تتحرك مع مرور الزمن . وذلك فيما يشبه التحرك المادي للذرة تحت تأثير قوى مادية . وعلى أية حال ، فبدلاً من القوى المادية فإن الحركة قد تكون ناتجة عن قوى اقتصادية ، اجتماعية ، نفسية أو قوى أخرى .

ملاحظة كثير من السلاسل الزمنية تكشف عن وجود تحركات مميزة أو اختلافات مميزة .

بعضها أو كلها توجد بدرجات مختلفة . وتحليل مثل هذه التحركات له أهمية كبرى في كثير من الاستخدامات ، منها مشكلة التنبؤ بالتحركات المستقبلية . وهذا يوضح بصورة لاتدع مجالاً للدهشة الأسباب التي تجعل كثيراً من الصناعات والوكالات الحكومية تهتم بصورة حيوية بهذا الموضوع الهام .

تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية :

يمكن تصنيف التحركات في السلاسل الزمنية إلى أربعة أنماط ، تسمى غالباً مكونات السلسلة الزمنية .

١ - **التحركات طويلة المدى (الاتجاه العام)** وتشير إلى الاتجاه العام الذي يظهر به الشكل البياني للسلسلة الزمنية على مدى فترة طويلة من الزمن . في الشكل أعلاه هذه الحركة العامة أو الاتجاه العام يرمز لها بمنحنى الاتجاه العام والمعبّر عنه بخطوط متقطعة . لبعض السلاسل الزمنية قد يكون خط الاتجاه العام أكثر ملاءمة . وقد سبق دراسة تحديد مثل هذه الخطوط والمنحنيات بطريقة المربعات الصغرى في الفصل الثالث عشر . وسوف تناقش طرق أخرى فيما بعد .

٢ - **تحركات دورية أو تغيرات دورية** وهي تشير إلى الذبذبات طويلة المدى حول خط الاتجاه العام أو منحني الاتجاه العام . هذه الدورات ، كما تسمى أحياناً ، قد تكون أو قد لا تكون على فترات ، بمعنى أنها قد تتبع وقد لا تتبع نفس النمط بعد كل فترة زمنية متساوية . في مجال الأعمال والنشاط الاقتصادي ، تعد التحركات دورية إذا تكررت بعد فترات زمنية تزيد عن السنة .

من الأمثلة الهامة للتحركات الدورية ما يسمى بدورات الأعمال والتي تمثل فترات ، الرخاء ، الركود ، الكساد ثم الإنهاء من الأزمة .

٣ - **التحركات الموسمية أو التغيرات الموسمية** وهي تشير إلى النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر المتعاقبة خلال السنوات المتتالية . . مثل هذه التحركات ترجع إلى أحداث تقع سنوياً ، مثل الزيادة المفاجئة في مبيعات المحلات في الفترة السابقة لأعياد الميلاد .

في الشكل ١٦ - ١ لا تظهر أي تغيرات موسمية ، نظراً لأن الشكل يوضح الأرقام السنوية فقط .

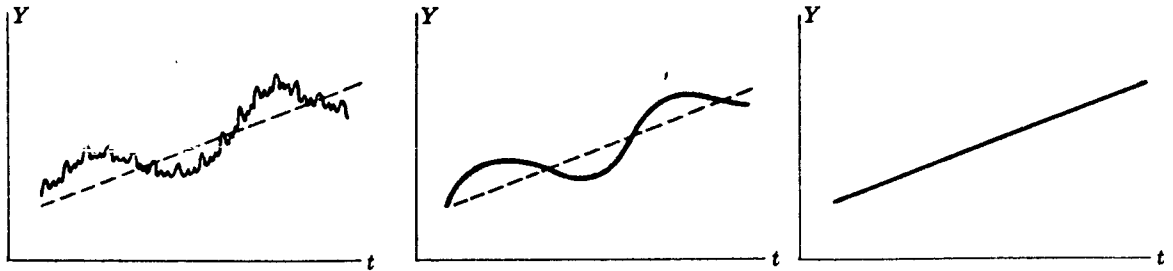
وعلى الرغم من أن التحركات الموسمية بشكل عام تشير إلى الدورية السنوية في الأعمال والاقتصاد ، فإن الفكرة يمكن أن تمتد لتشمل الدورية لأية فترة من الزمن مثل اليوم ، الساعة ، الأسبوع ، ... وهكذا بالاعتماد على نوع البيانات المتاحة .

٤ — **تحركات منتظمة أو عشوائية :** وتشير إلى الحركة المنتظمة في السلسلة الزمنية مثل الفيضانات « الإضرابات » ، الانتخابات ، وغيرها . على الرغم أنه من المعتاد افتراض أن مثل هذه الأحداث تنتج تغيرات تستمر لفترة قصيرة من الزمن ، فن المعقول أن تكون على درجة من الكثافة نتيجة لوجود دورات جديدة أو غيرها من التحركات .

تحليل السلاسل الزمنية :

تحليل السلاسل الزمنية تتكون من وصف (بصورة عامة رياضية) مكونات التحركات الموجودة . لتوضيح الطرق التي تستخدم في هذا الوصف ، اعتبر الشكل ١٦ - ٢ والذي يشار إليها بالسلسلة الزمنية المثالية .

الشكل (أ) يوضح شكل خط الاتجاه العام طويل المدى (من الممكن أن نستخدم كذلك منحني الاتجاه العام . الشكل (ب) يوضح خط الاتجاه العام طويل المدى موضحاً فوقه تحركات دورية (نفترض أنها على فترات متساوية) . إذا أردنا أن نوضح على الشكل (ج) بمض التحركات غير المنتظمة أو العشوائية ، وتظهر النتيجة أكثر شها بالسلاسل الزمنية التي تحدث في النواحي العملية



(ج) الاتجاه العام طويل المدى
والتحركات الدورية الموسمية

(ب) الاتجاه العام طويل المدى
والتحركات الدورية

(أ) الاتجاه العام طويل المدى

شكل ١٦ - ٢

المناقشة السابقة تعطينا أسلوباً ممكناً لتحليل السلاسل الزمنية . نفترض أن المتغير Y الذي يعبر عن السلسلة الزمنية هو حاصل ضرب المتغيرات T, C, S, I ، والتي تنتج الاتجاه العام (T) والتحركات الدورية (C) والتحركات الموسمية (S) والتحركات غير المنتظمة (I) . باستخدام الرموز

$$(١) \quad Y = T \times C \times S \times I = TCSI$$

تحليل السلاسل الزمنية يتضمن فحص العوامل T, C, S, I ، والتي يشار إليها بتفكيك السلسلة الزمنية إلى المكونات الأساسية لتحركاتها .

ويجب أن نشير إلى أن بعض الاحصائيين يفضلون اعتبار Y كـ مجموع $T+C+S+I$ للمتغيرات الأساسية المعتبرة في السلسلة. وعلى الرغم من أننا سنفترض التفكيك (١) في طرق هذا الفصل ، فإن هناك طرق مشابهة في حالة افتراض صيغة الجمع . ومن الناحية العملية ، فإن قرار اتخاذ أى من طرق التفكيك التي يجب افتراضها تعتمد على درجة النجاح المتحقق في تطبيق هذا الفرض .

المتوسطات المتحركة . تمهيد السلاسل الزمنية :

إذا كان لدينا مجموعة من الأرقام

$$(٢) \quad Y_1, Y_2, Y_3, \dots$$

فإننا نعرف الوسط المتحرك من الدرجة N بأنه يعطى بمتابعة من الأوساط الحسابية

$$(٣) \quad \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}, \quad \frac{Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{N+1}}{N}, \quad \frac{Y_3 + Y_4 + \dots + Y_{N+2}}{N}, \dots$$

المجاميع في البسط بالمعادلة (٣) تسمى المجاميع المتحركة من الدرجة N .

مثال ١ : إذا كان لدينا الأرقام 2, 6, 1, 5, 3, 7, 2 فإن الوسط المتحرك من الدرجة 3 ، يعطى بالمتابيد

$$\frac{2+6+1}{3}, \frac{6+1+5}{3}, \frac{1+5+3}{3}, \frac{5+3+7}{3}, \frac{3+7+2}{3} \text{ i.e. } 3, 4, 3, 5, 4$$

ومن المعتاد أن نضع كل رقم في الوسط المتحرك في مكانه الملائم بالنسبة للبيانات الأصلية . في هذا المثال يجب أن نكتب

$$2, 6, 1, 5, 3, 7, 2 \quad \text{البيانات الأصلية}$$

$$3, 4, 3, 5, 4 \quad \text{الوسط المتحرك من الدرجة 3}$$

كل رقم في الوسط المتحرك عبارة عن متوسط الأرقام الثلاثة الواقعة فوقه .

إذا كانت البيانات معطاة سنوياً أو شهرياً ، فإن المتوسط المتحرك من الدرجة N يسمى على الترتيب N سنة متوسط متحرك أو N شهر متوسط متحرك . هذا نتحدث عن 5 سنوات متوسطات متحركة ، 12 شهراً متوسطات متحركة ، .. وغيرها ومن الواضح أنه يمكن استخدام وحدات أخرى للزمن .

المتوسطات المتحركة لها خاصية أنها تتجه إلى التقليل من كمية الاختلاف الموجودة في مجموعة من البيانات . في حالة السلاسل الزمنية تستخدم هذه الخاصية لاستبعاد التقلبات غير المرغوب فيها وتسمى العملية بتمهيد السلاسل الزمنية .

إذا استخدمنا في (٣) ، الوسط الحسابي المرجح ، وكانت الترجيعات محددة مقدماً ، فإن المتتابعة الناتجة تسمى الأوساط المتحركة المرجحة من الدرجة N .

مثال ٢ : إذا استخدمت الأوزان 1, 4, 1 في المثال 1 ، فإن المتوسط المتحرك المرجح من الدرجة 3 يعطى بالمتتالية :

$$\frac{1(2) + 4(6) + 1(1)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(6) + 4(1) + 1(5)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(1) + 4(5) + 1(3)}{1 + 4 + 1},$$

$$\frac{1(5) + 4(3) + 1(7)}{1 + 4 + 1}, \frac{1(3) + 4(7) + 1(2)}{1 + 4 + 1}$$

أو 4.5, 2.5, 4.0, 4.0, 5.5

تقدير الاتجاه العام :

يمكن تقدير الاتجاه العام بعدة طرق :

١ — طريقة المربعات الصغرى المعطاة بالفصل الثالث عشر يمكن استخدامها للحصول على معادلة لخط الاتجاه العام الملائم أو لمنحنى الاتجاه العام . من هذه المعادلة يمكن أن نحسب القيمة الاتجاهية T .

٢ — طريقة التمهيد باليد والتي تتكون من توفيق خط الاتجاه العام أو منحنى الاتجاه العام الذي يمكن استخدامه لتقدير T بالنظر إلى الشكل البياني . وعلى أية حال ، فهذه لها مميزات حيث أنها تعتمد كثيراً على التقدير الشخصي .

٣ — طريقة المتوسط المتحرك باستخدام المتوسطات المتحركة من درجات ملائمة ، فإن الأنماط الدائرية ، الموسمية وغير المنتظمة يمكن حذفها ، تاركة فقط حركة الاتجاه العام .

أحد مساوئ هذه الطريقة هو أن البيانات في بداية ونهاية السلسلة تفقد . في المثال 1 أعلاه نبدأ بسبعة أرقام وباستخدام متوسط متحرك من الدرجة 3 فننتهي بخمسة أرقام . أحد المساوئ الأخرى هو أن المتوسطات المتحركة قد تولد تحركات دائرية أو غيرها ليست موجودة في البيانات الأصلية . صعوبة ثالثة هو أن المتوسطات المتحركة تتأثر بشدة بالقيم المتطرفة وللتغلب على هذه الصعوبة ، فإننا نستخدم أحياناً متوسطاً متحركاً مرجحاً بأوزان ملائمة . في هذه الحالة فإن القيمة المركزية (أو القيم) تعطى الوزن الأكبر وتمطى القيم المتطرفة أوزاناً أقل .

٤ — طريقة انشباہ المتوسطات تتكون من تقسيم البيانات إلى مجموعتين (يفضل أن يكون متساويين) ثم نحصل على متوسط كل جزء ، وهذا يعطينا نقطتين على خط السلسلة الزمنية . ويرسم خط الاتجاه العام بين هذين النقطتين ويمكن بذلك تحديد القيم الاتجاهية . ويمكن كذلك تحديد القيم الاتجاهية بدون الرسم البياني (المسألة ١٦ - ٥) .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة بسيطة في تطبيقها ، إلا أنها قد تؤدي إلى نتائج غير جيدة إذا استخدمت بدون تمييز . كذلك فإنها قابلة للتطبيق فقط في حالة ما إذا كان الاتجاه العام خطأً أو يقرب إلى خطين ، على الرغم من أنه يمكن مد صلاحيتها في الحالات التي يمكن تجزئة البيانات فيها إلى عدد من الأجزاء في كل جزء يكون الاتجاه العام فيه خطياً .

تقدير التغيرات الموسمية • الدليل الموسمي :

لتحديد المعامل الموسمي S في المعادلة (١) ، فيجب أن نقدر كيف تتغير البيانات في السلاسل الزمنية من شهر إلى شهر خلال سنة نموذجية . مجموعة الأرقام التي توضح القيم النسبية لمُتغير خلال أشهر السنة تسمى الدليل الموسمي للمتغير . فإذا كنا نعلم على سبيل المثال أن أرقام المبيعات خلال يناير ، فبراير ، مارس ، . . . هي 50 ، 120 ، 90 ، . . . في المائة من متوسط المبيعات الشهرية خلال العام كله ، فإن الأرقام 50 ، 120 ، 90 ، . . . تعطي الدليل الموسمي ويشار إليها أحياناً بالأرقام القياسية الموسمية . وسط (المتوسط) الدليل الموسمي للسنة كلها يجب أن يكون 100% ، أى أن مجموع الأرقام القياسية يجب أن يكون 1200% .

وهناك عدة طرق متاحة لحساب الدليل الموسمي :

١ — **طريقة متوسط النسب المئوية :** في هذه الطريقة يعبر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من المتوسط في السنة . ثم نحصل على وسط النسبة المئوية للأشهر المتقابلة في مختلف السنوات وذلك أما باستخدام الوسط الحسابي أو الوسيط . فإذا استخدمنا الوسط الحسابي فن الأفضل تجنب القيم المتطرفة والتي يمكن أن تحدث . وإذا 12 نسبة مئوية الناتجة تعطي الدليل الموسمي . فإذا كان متوسطها ليس 100% (أى إذا كان المجموع لا يساوى 1200%) فيجب تعديله بالضرب في معامل ملائم .

٢ — **طريقة النسبة المئوية للاتجاه العام أو النسبة للاتجاه العام :** في هذه الطريقة فإن بيانات كل شهر يعبر عنها كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية في الشهر . وباستخدام وسط ملائم لهذه النسب للأشهر المتقابلة نحصل على الدليل المطلوب . وكما في الطريقة الأولى نعدل هذه القيم إذا لم يكن متوسطها 100% .

لاحظ أن قسمة كل من القيم الشهرية Y على القيمة الاتجاهية T ينتج $Y/T = CSI$ من المعادلة (١) . وينتج عن عمليات الحصول على متوسط Y/T الأدلة الموسمية والتي قد تحتوى على التغيرات الدورية وغير المنتظمة وعلى وجه الخصوص إذا كانت كبيرة . وهذه قد تكون من المساوىء المهمة لهذه الطريقة .

٣ — طريقة النسبة المئوية للمتوسط المتحرك أو النسبة للمتوسط المتحرك :

في هذه الطريقة نحسب 12 شهراً متوسطاً متحركاً . وبما أن النتائج التي حصلنا عليها تقع بين الأشهر المتتالية بدلاً من وقوعها في منتصف الشهر كما هي الحال في البيانات الأصلية ، فإننا نحسب 2 شهر متوسط متحرك لهذا 12 شهرياً متوسطاً متحركاً . وتسمى النتيجة 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً . بعد ذلك ، نعبر ، عن البيانات الأصلية لكل شهر كنسبة مئوية من الـ 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل له . وبحسب الدليل المطلوب بأخذ متوسط النسب للأشهر المتقابلة . وكما سبق ، فإننا نعدل هذه النسب إذا لم يكن متوسطها 100% .

لاحظ أن السبب المنطقي وراء استخدام هذه الطريقة يحىء من المعادلة (١) . الـ 12 شهراً متوسطاً متحرراً مركزياً Y_I يعمل على استبعاد التحركات الموسمية وغير المنتظمة I و S ، وهذا مكافئ للقيم المغطاة بـ TC . بهذا فإن بقية البيانات الأصلية على TC تنتج SI . والعملية التالية في الحصول على أوساط الأشهر المتقابلة تعمل على حذف المتغيرات العرضية I وهذا ينتج دليلاً ملائماً S .

٤ — طريقة الوصلات النسبية : في هذه الطريقة يعبر عن بيانات كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق . وتسمى هذه النسب بالنسب الموصولة ، حيث أنها تربط كل شهر بالشهر السابق عليه . ثم نحصل على متوسط ملائم للنسب الموصولة للأشهر المتقابلة .

ومن هذه الإثني عشر متوسط النسب الموصولة يمكن أن نحصل على النسبة المئوية لكل شهر بالنسبة لشهر يناير والذي يعتبر مثل 100% . وبعد أن نفعل ذلك فإنه من المعتاد أن نجد أن شهر يناير التالي تقابله نسبة مئوية قد تكون أما على أو أقل من 100% وهذا يعتمد على ما إذا كان الاتجاه العام في زيادة أو نقصان . باستخدام ذلك ، نقوم بتعديل النسب المئوية المختلفة التي حصلنا عليها بالأخذ في الاعتبار هذا الاتجاه العام . وهذه النسب المئوية النهائية ، والمعدلة بحيث يكون متوسطها 100% ، تعطى الدليل الموسمي المطلوب .

تحليل البيانات عن أثر الموسمية :

إذا قسمنا البيانات الشهرية الأصلية على الأرقام القياسية الموسمية المقابلة ، فإن البيانات التي نحصل عليها تسمى ببيانات لا موسمية أو بيانات معدلة لاستبعاد التغيرات الموسمية . مثل هذه البيانات تتضمن الاتجاه العام ، التغيرات الدورية والتغيرات غير المنتظمة .

تقدير التغيرات الدورية :

بعد تحليل البيانات من أثر الموسم ، فإنه يمكن تعديلها أيضاً للتخلص من أثر الاتجاه العام وذلك بقسمة البيانات ببساطة على القيم الاتجاهية المقابلة . وطبقاً للمعادلة (١) فإن عملية التعديل للتخلص من التغيرات الموسمية والقيم الاتجاهية تقابل بقسمة Y على ST ، بحيث ينتج CI ، أي التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وباستخدام متوسط متحرر كعدد بسيط من الأشهر (3 ، 5 أو 7 أشهر على سبيل المثال ، بحيث لا تحتاج إلى الحصول على قيم مركزية بعد ذلك) نستطيع استبعاد المتغيرات غير المنتظمة I حيث يبقى فقط التغيرات الدورية . وطالما أمكن عزل هذه التغيرات فإنه يمكن دراستها بالتفصيل . فإذا كانت الدورات متكررة فإنه يمكن تكوين دليل الدورية بطريقة مشابهة لتكوين الدليل الموسمي .

تقدير التغيرات العشوائية أو غير المنتظمة :

يمكن تقدير التغيرات العشوائية أو غير المنتظمة وذلك باستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية . ويمكن تحقيق ذلك بقسمة البيانات الأصلية Y على T, S, C ، وينتج عن ذلك I من المعادلة (١) . ومن الناحية العملية وجد أن التحركات غير المنتظمة تنتج إلى أن تكون ذات حجم صغير وأنها غالباً تنتج إلى أن تتبع نمط التوزيع الطبيعي ، أي انحرافات صغيرة تحدث بتكرارات كبيرة أما الانحرافات الكبيرة فتحدث بتكرارات صغيرة .

قابلية البيانات للمقارنة :

يجب إلزام الحذر عند مقارنة البيانات حيث يجب أن تكون مثل هذا المقارنة ممكنة . على سبيل المثال ، فمعد مقارنة بيانات عن شهر فبراير ، يجب أن نلاحظ أن شهر مارس 31 يوماً بينما شهر فبراير قد يكون أما 28 أو 29 يوماً . كذلك ، عند مقارنة أشهر فبراير لسنوات مختلفة يجب أن نتذكر أنه خلال السنوات الكبيسة يكون شهر فبراير 29 وليس 28 . كذلك فإن عدد أيام العمل خلال الأشهر المختلفة لنفس السنة أو لسنوات مختلفة قد تختلف نتيجة لأيام الأجازات ، الإضرابات أو الأعطال ، وغيرها .

ومن الناحية العملية ، لا توجد قاعدة محددة لإجراء التعديلات اللازمة لهذه التغيرات . ويترك تقدير الحاجة لهذه التعديلات لتوجيهات الباحث .

التنبؤ :

الدراسة السابقة يمكن استخدامها في المشكلة الهامة الخاصة بالتنبؤ بالسلاسل الزمنية . وعلى أية حالة ، فيجب أن نتأكد من أن المعالجة الرياضية للبيانات لا تحل في حد ذاتها المشكلة . ولكن بالجمع بين الإحساس العام ، والخبرة والقدرة على الحكم السليم للباحث وبين التحليل الرياضي يمكن أن يكون له قيمة في كل من التنبؤ طويل المدى والتنبؤ قصير المدى .

تلخيص الخطوات الأساسية في تحليل السلاسل الزمنية :

- ١ - اجمع البيانات الخاصة بالسلسلة الزمنية ، وأبذل كل مجهود للتأكد من أن البيانات يمكن الاعتماد عليها . في جمع البيانات يجب أن نضع نصب أعيننا الهدف من تحليل السلسلة الزمنية . على سبيل المثال ، فإذا أراد شخص التنبؤ بسلسلة زمنية معينة ، قد يساعد على ذلك الحصول على سلسلة زمنية على علاقة بها وكذلك معلومات أخرى . وقد يكون من الضروري تعديل البيانات لجعلها قابلة للمقارنة مثل التعديل للسنوات الكبيسة ، وغيرها .
- ٢ - ارسم السلسلة الزمنية ، لاحظ من الناحية الوصفية وجود الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية والتغيرات الموسمية .
- ٣ - أوجد منحى الاتجاه العام أو خط الاتجاه العام واحصل على القيم الاتجاهية باستخدام إما طريقة المربعات الصغرى ، طريقة التمهيد باليد ، طريقة المتوسطات المتحركة أو طريقة شبه المتوسطات .
- ٤ - إذا كانت هناك تغيرات موسمية ، احصل على الدليل الموسمي ثم عدل البيانات وذلك للتخلص من أثر الموسم أى ، جعل البيانات لاموسمية .
- ٥ - خُصص البيانات اللاموسمية من أثر الاتجاه العام . بهذا تحتوى البيانات الناتجة (نظرياً) على التغيرات الدورية أو غير المنتظمة . متوسط متحرك نستخدم فيه 3 ، 5 أو 7 أشهر يفيد في حذف التغيرات غير المنتظمة وإظهار التغيرات الدورية .
- ٦ - ارسم التغيرات الدورية التى حصلت عليها في الخطوة الخامسة ، لاحظ أى تكرارية (أو شبه تكرارية) التى يمكن أن تحدث .
- ٧ - بتجميع نتائج الخطوات من ١ - ٦ مع أية معلومات أخرى متاحة ، أجرى التنبؤ (إذا كان ذلك مرغوباً فيه) وإذا كان ممكناً ناقش مصادر الخطأ وحجمه .

مسائل محلولة

التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

١٦ - ١ إلى أى من التحركات المميزة في السلاسل الزمنية تنتمي أساساً مايلي :

(أ) اشتعال النار في مصنع أدى إلى تأخير الإنتاج ثلاثة أسابيع

ج : غير منتظمة

(ب) عهد من الرفاهية

ج : دورية

(ج) مبيعات فترة ما بعد عيد الفصح في أحد المتاجر

ج : موسمية .

(د) الحاجة إلى زيادة إنتاج القمح نتيجة للزيادة المستمرة في السكان

ج : طويلة المدى

(هـ) عدد مليمترات الأمطار التي تهبط في الشهر على مدينة معينة خلال فترة 5 سنوات .

ج : موسمية .

المتوسطات المتحركة :

١٦ - ٢ الجدول ١٦ - ١ يوضح متوسط الإنتاج الشهري ، في بلد معين ، من فحم البيتومينس بمليون الكيلوجرامات للسنوات

من 1948 - 1958 . احسب (أ) 5 سنوات متوسط متحرك (ب) 4 سنوات متوسط متحرك (ج) 4 سنوات

متوسط متحرك مركزى .

جدول ١٦ - ١

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط الإنتاج الشهري من فحم البيتومينس (ملايين الكيلوجرامات)	50.0	36.5	43.0	44.5	38.9	38.1	32.6	38.7	41.7	41.1	33.8

الحل :

(أ) بالرجوع إلى الجدول ١٦-٢

المجموع المتحرك الأول 212.9

بالعمود الثالث (من اليسار)

هو المجموع من العنصر الأول

إلى العنصر الخامس في العمود

الثاني (من اليسار) . المجموع

المتحرك الثاني 201.0 هو

المجموع من العنصر الثاني إلى العنصر

السادس في العمود الثاني وهكذا .

من الناحية العملية فإنه بعد

الحصول على المجموع المتحرك الأول

212.9 ، فن السهل الحصول

جدول ١٦ - ٢

السنة	البيانات	5 سنوات مجموع متحرك	5 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0		
1951	44.5		
1952	38.9		
1953	38.1		
1954	32.6		
1955	38.7		
1956	41.7		
1957	41.1		
1958	33.8		
		212.9	42.6
		201.0	40.2
		197.1	39.4
		192.8	39.6
		190.0	38.0
		192.2	38.4
		187.9	37.6

على المجموع المتحرك الثاني وذلك بطرح 50.0 (العنصر الأول في العمود 2) وإضافة 38.1 (العنصر

السادس في العمود 2) فتكون النتيجة 201.0 . المجاميع المتحركة التالية نحصل عليها بطريقة مشابهة

وبقسمة كل مجموع متحرك على 5 ينتج المتوسط المتحرك المطلوب .

(ب) بالرجوع إلى الجدول ١٦ - ٣

نحصل على الـ 4 سنوات مجموع

متحرك كما حصلنا عليه في الجزء (أ) ،

فيما عداً أننا نجمع العناصر الأربعة

الأولى في العمود الثاني (من

اليسار) بدلا من خمسة عناصر .

لاحظ أن المجاميع المتحركة

تتمركز بين السنوات المتتالية ،

وذلك بخلاف الجزء (أ) . وهذه

دائما الحالة فيما إذا أخذنا عددًا زوجيًا

من السنوات عند حساب المتوسط

المتحرك . فإذا اعتبرنا أن سنة

جدول ١٦ - ٣

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	4 سنوات متوسط متحرك
1948	50.0		
1949	36.5		
1950	43.0		
1951	44.5		
1952	38.9		
1953	38.1		
1954	32.6		
1955	38.7		
1956	41.7		
1957	41.1		
1958	33.8		
		174.0	43.5
		162.9	40.7
		164.5	41.1
		154.1	38.5
		148.3	37.1
		151.1	37.8
		154.1	38.5
		155.3	38.8

1949 على سبيل المثال ، تعبر عن أول يوليو 1949 فإن السنوات الأربع مجاميع متحركة تتمركز عند

يناير 1950 أو 31 ديسمبر 1949 .

ونحصل على الـ 4 سنوات متوسط متحرك بقسمة الـ 4 سنوات مجموع متحرك على 4 .

(ج) الطريقة الأولى : أنظر الجدول ١٦ - ٤

نحسب أولاً 4 سنوات متوسطات متحركة كما في الجزء (أ) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

إذا حسبنا الآن 2 سنة مجموعاً متحركاً من الـ 4 سنوات متوسطات متحركة ، فإن النتيجة تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج بالعمود 4 (من اليسار) ينتج الـ 4 سنوات متوسطات متحركة مركزية المطلوبة .

الجدول ١٦ - ٤

السنة	البيانات	4 سنوات متوسط متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعמוד السابق	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (العمود 2 ÷ 4)
1948	50.0			
1949	36.5			
1950	43.0	43.5	84.2	42.1
1951	44.5	40.7	81.8	40.9
1952	38.9	41.1	79.6	39.8
1953	38.1	38.5	75.6	37.8
1954	32.6	37.1	74.9	37.5
1955	38.7	37.8	76.3	38.2
1956	41.7	38.5	77.3	38.7
1957	41.1	38.8		
1958	33.8			

الطريقة الثانية : أنظر الجدول ١٦ - ٥

نحسب أولاً 4 سنوات مجموع متحرك كما في الجزء (ب) . هذه القيم تتمركز بين السنوات المتتالية كما هو موضح .

فإذا حسبنا الآن 2 سنة مجموع متحرك لهذه الـ 4 سنوات مجموع متحرك ، فإن النتائج سوف تتمركز عند السنة المطلوبة .

بقسمة النتائج في العمود 4 على 8 (4 × 2) ينتج المتوسط المتحرك المطلوب

جدول ١٦ - ٥

السنة	البيانات	4 سنوات مجموع متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعמוד الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (العمود الرابع مقسوماً على 8)
1948	50.0			
1949	36.5			
1950	43.0	174.0	336.9	42.1
1951	44.5	162.9	327.4	40.9
1952	38.9	164.5	318.6	39.8
1953	38.1	154.1	302.4	37.8
1954	32.6	148.3	299.4	37.4
1955	38.7	151.1	305.2	38.2
1956	41.7	154.1	309.4	38.7
1957	41.1	155.3		
1958	33.8			

١٦-٣ وضع أن الـ 4 سنوات متوسط متحرك مركزي بالمسألة ١٦-٢ (ج) يكافئ 5 سنوات متوسط متحرك مرجح باستخدام الأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب

الحل :

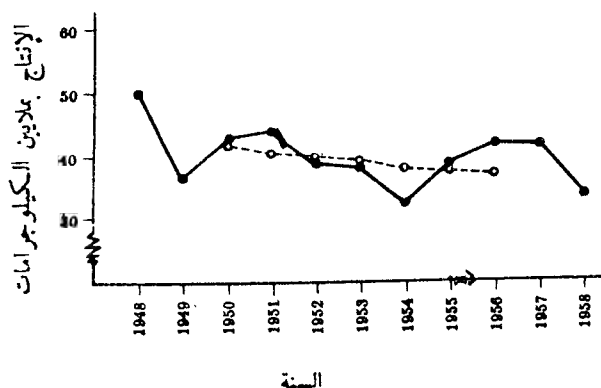
اعتبر أن Y_1, Y_2, \dots, Y_{11} تعبر عن القيم المقابلة للسنوات 1948, 1949, . . . , 1958 على الترتيب . وباتباع خطوات الطريقة الثانية للمسألة ١٦-٢ (ج) ، نحصل على الجدول ١٦-٦

جدول ١٦-٦

السنة	Y	مجموع 4 سنوات متحرك	2 سنة مجموع متحرك للعمود الثالث	4 سنوات متوسط متحرك مركزي (العمود الرابع مقسوماً على 8)
1948	Y_1			
1949	Y_2			
1950	Y_3	$Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$	$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5$	$\frac{1}{8}(Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5)$
1951	Y_4	$Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5$	$Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + Y_6$	$\frac{1}{8}(Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + Y_6)$
1952	Y_5	$Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6$	$Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7$	$\frac{1}{8}(Y_3 + 2Y_4 + 2Y_5 + 2Y_6 + Y_7)$
1953	Y_6	$Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7$		
.
.
.
1958	Y_{11}			

من العمود الأخير ينتج عن ذلك أن 4 سنوات متوسط متحرك مركزي هي 5 سنوات متوسط متحرك مرجح بأوزان 1, 2, 2, 2, 1 على الترتيب . لاحظ أن 8 هو مجموع هذه الأوزان ، أي ، $1 + 2 + 2 + 2 + 1 = 8$ ، هذه الطريقة يمكن استخدامها للحصول على نتائج المسألة ١٦-٢ (ج) . على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى (المقابلة لسنة 1950) هي :

$$\frac{(1)(50.0) + (2)(36.5) + (2)(43.0) + (2)(44.5) + (1)(38.9)}{8} = 42.1$$



شكل ١٦-٣

١٦-٤ ارسم المتوسط المتحرك للمسألة ١٦-٢ (أ) مع توضيح البيانات الأصلية .

الحل :

الرسم البياني للبيانات الأصلية
موضح بالشكل ١٦-٣ بالخط المتصل . الرسم البياني للمتوسط المتحرك موضح بخطوط متقطعة .

لاحظ كيف أن المتوسط المتحرك قد مهد الخط البياني للبيانات الأصلية ، مبيناً بشكل واضح خط الاتجاه العام .

أحد عيوب المتوسط المتحرك هو أننا نفقد البيانات عند بداية ونهاية السلسلة الزمنية . وقد يكون ذلك خطيراً إذا كانت كمية البيانات ليست كبيرة .

تقدير الاتجاه العام :

١٦ - ٥ أوجد القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦ - ٢

باستخدام طريقة أشباه المتوسطات ، حيث نأخذ كتوسط (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط

الحل :

(أ) تقسم البيانات إلى جزئين متساويين

(مع حذف السنة المتوسطة 1953)

كما هو موضح . احسب متوسط

البيانات في كل جزء . من النتائج التي

حصلنا عليها ينتج أنه في 6 سنوات

(من 1950 إلى 1956) حدث

انخفاض يساوي $42.6 - 37.6 = 5.0$

مليون كيلوجرام ، أو انخفاض

$5.0/6 = 0.83$ مليون كيلوجرام في

السنة .

بمعرفة ذلك ، فإنه يمكن حساب القيم الاتجاهية فالقيم الاتجاهية لسنة 1951 تساوي $42.6 - 0.83 = 41.77$

والقيم الاتجاهية لسنة 1952 هي $40.9 = 42.6 - 2(0.83)$ وهكذا ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٨

جدول ١٦ - ٨

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	44.3	43.4	42.6	41.8	40.9	40.1	39.3	38.5	37.6	36.8	36.0

ويمكن الحصول على النتيجة أيضاً برسم خط يصل بين النقط (42.6 و 1950) و (37.6 ، 1956) ثم يقرأه القيم الاتجاهية من الرسم .

(ب) الوسيطان لكل من الجزئين في (أ) هما 43.0 و 38.7 على الترتيب . أن هناك نقصاً يساوى $0.72 = (43.0 - 38.7) / 6$ في السنة ، ويوضح الجدول ١٦ - ٩ القيم الاتجاهية في هذه الحالة .

جدول ١٦ - ٩

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	44.4	43.7	43.0	42.3	41.6	40.8	40.1	39.4	38.7	38.0	37.2

وعندما نستخدم الوسيطان فإن الطريقة تسمى بأشباه الوسيطات . وإذا لم يذكر نوع الوسط المستخدم فإن هذا يتضمن استخدام الوسط الحسابي .

١٦ - ٩ صف كيف يمكن استخدام (أ) طريقة التوفيق باليد (ب) طريقة المتوسطات المتحرر كة لحساب القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦ - ٢ .

الحل :

(أ) في هذه الطريقة فإننا ببساطة نرسم خطاً أو منحنى يكون أفضل تقريب للبيانات المعطاة بالرسم في المسألة ١٦ - ٤ . من هذا الخط يمكن أن نقرأ القيم الاتجاهية .

(ب) باستخدام 5 سنوات متوسطاً متحرراً ، فإننا نجد (المسألة ١٦ - ٤) أن بيانات السلسلة الزمنية قد مهدت بصورة كبيرة . ومن الممكن استخدام المتوسطات التي حصلنا عليها كقيم اتجاهية للسنوات 1950 - 1956 . بهذه فإنه من المسألة ١٦ - ٢ نجد أن القيم الاتجاهية المقابلة للسنوات 1950 ، 1951 ، 1952 ، ... ، 42.6 ، 40.2 ، 39.4 ، ... هي هذه الطريقة فإن القيم الاتجاهية للسنوات 1957 ، 1958 ، 1949 ، 1948 ليست متاحة . وإذا أردنا الحصول عليها فيمكن ذلك باستخدام الاستكمال في الرسم الموضح بالمسألة ١٦ - ٤ .

١٦ - ٧ (أ) استخدام طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ١٦ - ٢

(ب) من النتيجة في (أ) أوجد القيم الاتجاهية .

الحل :

(أ) نستخدم الطريقة الثانية بالمسألة ١٣ - ١٩ (أ) بالفصل الثالث عشر ، نظراً لوجود عدد زوجي من السنوات .

الجدول ١٦ - ١٠

السنة	X	Y	X ²	XY
1948	-5	50.0	25	-250.0
1949	-4	36.5	16	-146.0
1950	-3	43.0	9	-129.0
1951	-2	44.5	4	-89.0
1952	-1	38.9	1	-38.9
1953	0	38.1	0	0
1954	1	32.6	1	32.6
1955	2	38.7	4	77.4
1956	3	41.7	9	125.1
1957	4	41.1	16	164.4
1958	5	33.8	25	169.0
		$\Sigma Y = 438.9$	$\Sigma X^2 = 110$	$\Sigma XY = -84.4$

هذا فإن خط المربعات الصغرى المطلوب هو :

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} \right) X = \frac{438.9}{11} + \left(\frac{-84.4}{110} \right) X \text{ or } Y = 39.9 - 0.767X$$

حيث نقطة الأصل $X = 0$ هي السنة 1953 ووحدة X هي السنة

(ب) بوضع 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5 في X في معادلة المربعات الصغرى التي حصلنا عليها في الجزء (أ) ، فإننا نحصل على القيم الاتجاهية كما هي معطاة في الجدول ١٦ - ١١ .

جدول ١٦ - ١١

السنة	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القيم الاتجاهية	43.7	43.0	42.2	41.4	40.7	39.9	39.1	38.4	37.6	36.8	36.1

وهذه النتائج تتفق بصورة جيدة مع نتائج المسألة ١٦ - ٥ .

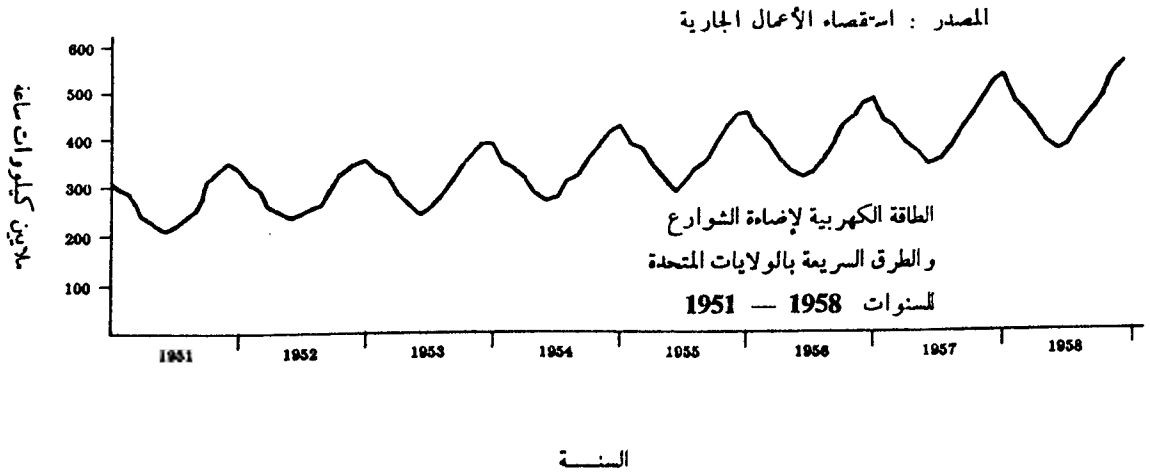
تقدير التغيرات الموسمية والدليل الموسمي :

١٦ - ٨ الجدول ١٦ - ١٢ يوضح الطاقة الكهربائية الشهرية مبرأ عنها بملايين الكيلووات ساعة والمستخدمة في إضاءة الشوارع والطرق السريعة بالولايات المتحدة الأمريكية في السنوات 1952 — 1958 .

(أ) كون الشكل البياني لهذه البيانات (ب) أحصل على الدليل الموسمي مستخدماً طريقة متوسط النسب المثوية .

جنول ١٦ - ١٢

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر	
318	281	278	250	231	216	223	245	269	302	325	347	1951
342	309	299	268	249	236	242	262	288	321	342	364	1952
367	328	320	287	269	251	259	284	309	345	367	394	1953
392	349	342	311	290	273	282	305	328	364	389	417	1954
420	378	370	334	314	296	305	330	356	396	422	452	1955
453	412	398	362	341	322	335	359	392	427	454	483	1956
487	440	429	393	370	347	357	388	415	457	491	516	1957
529	477	463	423	398	380	389	419	448	493	526	560	1958



(المصدر : استقصاء الأعمال الجارية)

(ب) المجاميع والمتوسطات الشهرية (الأوساط الحسابية) للسنوات 1951 — 1958 هي كما يلي

شكل ١٦ - ١٣

	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المجاميع	3285	3522	3780	4042	4373	4738	5090	5505
المتوسطات الشهرية	273.7	293.5	315.0	336.8	364.4	394.8	424.2	458.7

بقسمة البيانات الشهرية المعطاة بالمتوسطات الشهرية المقابلة لكل سنة مع التعبير عن النتيجة كنسبة مئوية تنتج

القيم الموضحة بالجدول ١٦ - ١٤ . على سبيل المثال ، القيمة الأولى في الجدول تحسب كما يلي :

$$318/273.7 = 116.2\%$$

جدول ١٦ - ١٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
116.2	102.7	101.6	91.3	84.4	78.9	81.5	89.5	98.3	110.3	118.7	126.8	1951
116.5	105.3	101.9	91.3	84.8	80.4	82.5	89.3	98.1	109.4	116.5	124.0	1952
116.5	104.1	101.6	91.1	85.4	79.7	82.2	90.2	98.1	109.5	116.5	125.1	1953
116.4	103.6	101.5	92.3	86.1	81.1	83.7	90.6	97.4	108.1	115.5	123.8	1954
115.3	103.7	101.5	91.7	86.2	81.2	83.7	90.6	97.7	108.7	115.8	124.0	1955
114.7	104.4	100.8	91.7	86.4	81.6	84.9	90.9	99.3	108.2	115.0	122.3	1956
114.8	103.7	101.1	92.6	87.2	81.8	84.2	91.5	97.8	107.7	115.7	121.6	1957
115.3	104.0	100.9	92.2	86.8	82.8	84.8	91.3	97.7	107.5	114.7	122.1	1958
المجموع	925.7	831.5	810.9	734.2	687.3	647.5	667.5	723.9	784.4	869.4	928.4	989.7
المتوسط	115.7	103.9	101.4	91.8	85.9	80.9	83.4	90.5	98.1	108.7	116.1	123.7

متوسط النسبة المئوية لكل شهر معطى بالسطر الأخير بالجدول ١٦-١٤ . مجموع هذه النسب المئوية هي %1200.1 وهي قريبة من المجموع المطلوب %1200 بحيث لا يكون هناك ضرورة للتعديل . هذا فإن الأرقام بالسطر الأخير تعبر عن الدليل الموسمي المطلوب .

١٦ - ٩ حصل على الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة النسبة المئوية للاتجاه العام أو نسبة الاتجاه العام . وفي تطبيق هذه الطريقة استخدم طريقة المربعات الصغرى للحصول على القيم الاتجاهية الشهرية .

الحل :

من الرسم البياني للبيانات الفعلية ، بالمسألة ١٦-٨ (أ) يتضح أن الاتجاه العام طويل المدى يمكن تقريبه بصورة مناسبة بخط مستقيم . وبدلاً من الحصول على هذا الخط من البيانات الشهرية المعطاة فإننا نحصل عليها من المتوسطات الشهرية للسنوات 1951 — 1958 المعطاة بالجدول ١٦ - ١٥ ، المستخرج من الجدول ١٦ - ١٣ للمسألة ١٦ - ٨ (أ) .

جدول ١٦ - ١٥

السنة	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
المتوسط الشهري	273.7	293.5	315.0	336.8	364.4	394.8	424.2	458.7

بافتراض أن الأرقام الشهرية المعطاة تقابل منتصف الشهر ، فإن المتوسطات في هذا الجدول تقابل 30 يونيو أو 1 يوليو للسنة المقابلة لكل متوسط .

نستخدم الطريقة الثانية للمسألة ١٣ - ٢٠ (ب) ، الفصل الثالث عشر

الجدول ١٦ - ١٦

السنة	X	Y	X ²	XY
1951	7	273.7	49	-1915.9
1952	5	293.5	25	-1467.5
1953	3	315.0	9	-945.0
1954	1	336.8	1	-336.8
1955	1	364.4	1	364.4
1956	3	394.8	9	1184.4
1957	5	424.2	25	2121.0
1958	7	458.7	49	3210.9
		$\Sigma Y = 2861.1$	$\Sigma X^2 = 168$	$\Sigma XY = 2215.5$

حيث نجد خط المربعات الصغرى وهو

$$Y = \bar{Y} + \left(\frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} \right) X = \frac{2861.1}{8} + \left(\frac{2215.5}{168} \right) X = 357.6 + 13.188X$$

حيث تقاس X بنصف السنة ونقطة الأصل هي 31 ديسمبر 1954 أو 1 يناير 1955 .

من هذه المعادلة نستنتج أن قيم Y تزيد 13.188 كل نصف سنة أو $2.20 = 13.188/6$ كل شهر .
 بهذا فعند $X = 0$ (1 يناير 1955) فإن $Y = 357.6$. وبعد نصف شهر (15 يناير 1955) فإن قيمة Y تصبح $357.6 + \frac{1}{2}(2.20) = 358.7$ وهي القيمة الاتجاهية المقابلة لشهر يناير 1955 . وبالإضافة المتتالية لـ 2.20 إلى 358.7 نحصل على القيمة الاتجاهية لشهر فبراير 1955 ، وهي $358.7 + 2.20 = 360.9$ ولشهر مارس 1955 وهي $360.9 + 2.20 = 363.1$. وهكذا . وبصورة مشابهة فإنه بالطرح المتتالي لـ 2.20 من 358.7 نحصل على القيم الاتجاهية لشهر ديسمبر 1954 ونوفمبر 1954 وهي على الترتيب $358.7 - 2.20 = 356.5$ لشهر ديسمبر و $354.3 = 356.5 - 2.20$ لشهر نوفمبر وهذه الطريقة نحصل على القيم الاتجاهية الشهرية الموضحة بالجدول ١٦ - ١٧

الجدول ١٦ - ١٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
253.1	255.3	257.5	259.7	261.9	264.1	266.3	268.5	270.7	272.9	275.1	277.3	1951
279.5	281.7	283.9	286.1	288.3	290.5	292.7	294.9	297.1	299.3	301.5	303.7	1952
305.9	308.1	310.3	312.5	314.7	316.9	319.1	321.3	323.5	325.7	327.9	330.1	1953
332.3	334.7	336.7	338.9	341.1	343.3	345.5	347.7	349.9	352.1	354.3	356.5	1954
358.7	360.9	363.1	365.3	367.5	369.7	371.9	374.1	376.3	378.5	380.7	382.9	1955
385.1	387.3	389.5	391.7	393.9	396.1	398.3	400.5	402.7	404.9	407.1	409.3	1956
411.5	413.7	415.9	418.1	420.3	422.5	424.7	426.9	429.1	431.3	433.5	435.7	1957
437.9	440.1	442.3	444.5	446.7	448.9	451.1	453.3	455.5	457.5	459.9	462.1	1958

ثم نقسم كل قيمة من القيم الشهرية المعطاة بالجدول ١٦ - ١٢ بالمسألة ١٦ - ٨ بالقيم الاتجاهية المقابلة بالجدول ١٦ - ١٧ . ويوضح الجدول ١٦ - ١٨ النتيجة كنسبة مئوية ، على سبيل المثال ، فإن القيمة الأولى بالجدول تحسب كالآتي $318 / 253.1 = 125.6\%$

جدول ١٦ - ١٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
125.6	110.1	108.0	96.3	88.2	81.8	83.7	91.2	99.4	110.7	118.1	125.1	1951
122.4	110.0	105.3	93.7	86.4	81.2	82.7	88.8	96.9	107.3	113.4	119.9	1952
120.0	106.5	103.1	91.8	85.5	79.2	81.2	88.4	95.5	105.9	111.9	119.4	1953
118.0	104.3	101.6	91.8	85.0	79.5	81.6	87.7	93.7	103.4	109.8	117.0	1954
117.1	104.7	101.9	91.4	85.4	80.1	82.0	88.2	94.6	104.6	110.8	118.0	1955
117.6	106.4	102.2	92.4	86.6	81.3	84.1	89.6	97.3	105.5	111.5	118.0	1956
118.3	106.4	103.1	94.0	88.0	82.1	84.1	90.9	96.7	106.0	113.3	118.4	1957
120.8	108.4	104.7	95.2	89.1	84.7	86.2	92.4	98.4	107.7	114.4	121.2	1958
119.2	106.4	103.1	93.0	86.5	81.2	83.2	89.2	96.8	106.0	112.6	118.9	الوسيط

للحصول على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدم الوسيط ، كما هو موضح بالصف الأخير بالجدول ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة . ونظراً لأن مجموع هذه الوسيطات هو 1196.1 ، فإننا نعدل هذه الأرقام بضربها في 1200/1196.1 بحيث يكون مجموعها 1200 . وهذه الطريقة نحصل على الدليل الموسمي المطلوب كما هو موضح بالجدول ١٦ - ١٩ .

جدول ١٦ - ١٩

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
119.6	106.7	103.4	93.3	86.8	81.5	83.5	89.5	97.1	106.3	113.0	119.3	الدليل الموسمي

وما يستحق الانتباه ملاحظة أنه في الأشهر السبعة الأولى فإن أرقام الدليل الموسمي أعلاه أكبر من تلك التي حصلنا عليها بالمسألة ١٦ - ٨ ، بينما في الأشهر الخمسة الأخيرة فإنها تكون أقل .

ويمكن الحصول على الدليل الموسمي باستخدام الوسيط الحسابي بدلا من الوسيط المذكور بالصف الأخير من الجدول ١٦ - ١٨ . في هذه الحالة فإنه يجب استبعاد القيم المتطرفة من أي عمود قبل الحساب الوسيط .

١٦-١٥ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة النسب المئوية للمنوسط المتحرك أو النسبة للمتوسط المتحرك .

الحصل :

نبدأ أولاً الحصول على 12 شهر متوسط متحرك مركزي باستخدام الطريقة الثانية للمسألة ١٦ - ٢ (ج) كما هو

موضح بالجدول ١٦ - ٢٠

جدول ١٦ - ٢٠

12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوماً على 24)	2 شهر مجموع متحرك للمود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر	12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوماً على 24)	2 شهر مجموع متحرك للمود 3	12 شهر مجموع متحرك	البيانات	السنة و الشهر
1951					1953				
يناير			318		يناير		3641		304.1
فبراير			281		فبراير		3658		305.7
مارس			278		مارس		3680		307.5
أبريل			250		أبريل		3701		309.4
مايو			231		مايو		3725		311.5
يونيه			216		يونيه		3750		313.7
يوليه		3285	223		يوليه		3780		316.0
أغسطس		6594	245		أغسطس		3780		318.0
سبتمبر		6646	269		سبتمبر		3805		319.7
أكتوبر		6695	302		أكتوبر		3826		321.7
نوفمبر		6734	325		نوفمبر		3848		323.5
ديسمبر		6770	347		ديسمبر		3872		325.3
		6808					3893		
							3915		
1952					1954				
يناير			342		يناير		3938		327.2
فبراير			309		فبراير		3959		329.0
مارس			299		مارس		3978		330.7
أبريل			268		أبريل		3997		332.3
مايو			249		مايو		4019		334.0
يونيه			236		يونيه		4042		335.9
يوليه			242		يوليه		4070		338.0
أغسطس			262		أغسطس		4099		340.4
سبتمبر			288		سبتمبر		4127		342.7
أكتوبر			321		أكتوبر		4150		344.9
نوفمبر			342		نوفمبر		4174		346.8
ديسمبر			364		ديسمبر		417		348.8

تابع جدول ٢٠١٦

السنة و الشهر	البيانات	12 شهر مجموع متحرك	2 شهر مجموع متحرك	12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوما على 24)	السنة و الشهر	البيانات	12 شهر مجموع متحرك	2 شهر مجموع متحرك	12 شهر متوسط متحرك مركزي (العمود 4 مقسوما على 24)
1955					1957				
يناير	420	4197	8417	350.7	يناير	487	4916	9854	410.6
فبراير	378	4220	8465	352.7	فبراير	440	4938	9905	412.7
مارس	370	4273	8518	354.9	مارس	429	4967	9957	414.9
أبريل	334	4305	8578	375.4	أبريل	393	4990	10010	417.1
مايو	314	4338	8643	360.1	مايو	370	5020	10077	419.9
يونيه	296	4373	8711	363.0	يونيه	347	5057	10147	422.8
يوليه	305	4406	8779	365.8	يوليه	347	5090	10222	425.9
أغسطس	330	4440	8846	368.6	أغسطس	357	5132	10301	429.2
سبتمبر	356	4468	8908	371.2	سبتمبر	388	5169	10372	432.2
أكتوبر	396	4496	8964	373.5	أكتوبر	415	5203	10436	434.8
نوفمبر	422	4523	9019	375.8	نوفمبر	457	5233	10494	437.2
ديسمبر	452	4549	9072	378.0	ديسمبر	491	5261	10555	439.8
						516	5294		
1956					1958				
يناير	453	4579	9128	380.3	يناير	529	5326	10620	442.5
فبراير	412	4608	9187	382.8	فبراير	477	5357	10683	445.1
مارس	398	4644	9252	385.5	مارس	463	5390	10747	447.8
أبريل	362	4675	9319	388.3	أبريل	423	5426	10816	450.7
مايو	341	4707	9382	390.9	مايو	398	5461	10887	453.6
يونيه	322	4738	9445	393.5	يونيه	380	5505	10966	456.9
يوليه	335	4772	9510	396.2	يوليه	389			
أغسطس	359	4800	9572	398.8	أغسطس	419			
سبتمبر	392	4831	9631	401.3	سبتمبر	448			
أكتوبر	427	4862	9693	403.9	أكتوبر	493			
نوفمبر	454	4891	9753	406.4	نوفمبر	526			
ديسمبر	483		9807	408.6	ديسمبر	560			

نقوم الآن بقسمة كل من القيم الفعلية الشهرية على 12 شهراً متوسطاً متحركاً مركزياً المقابل والتعبير عن كل نتيجة كنسبة مئوية ، على سبيل المثال ، مقابل شهر يوليو 1951 نحصل على $81.2\% = 223/274.7$. ويوضح الجدول ١٦ - ٢١ هذه النتائج . لاحظ أن القيم للأشهر الستة من 1951 وكذلك للأشهر الستة الأخيرة من 1958 غير متاحة باستخدام هذه الطريقة .

جداول ١٦ - ٢١

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
119.9	107.7	103.7	92.4	85.4	80.6	81.2	88.5	96.4	107.6	115.2	122.3	1951
120.7	107.3	104.1	92.8	86.4	80.0	82.2	88.4	96.6	107.1	113.5	120.2	1952
119.8	106.1	103.4	93.6	86.8	81.3	82.0	89.3	96.7	107.2	113.4	121.1	1953
119.8	107.2	104.3	93.5	87.2	81.5	83.4	89.6	95.7	105.5	112.2	119.6	1954
119.1	107.6	103.2	93.2	87.2	81.8	83.4	89.5	95.9	106.0	112.3	119.6	1955
118.6	106.6	103.4	94.2	88.1	82.1	84.6	90.0	97.7	105.7	111.7	118.2	1956
119.5	107.2	103.4	93.9	87.7	83.2	83.8	90.4	96.0	105.1	112.3	117.3	1957
119.8	107.2	103.4	93.5	87.2	81.5	83.4	89.5	96.4	106.0	112.3	119.6	الوسيط

لمحصل على متوسط النسب المئوية لكل شهر للسنوات المختلفة ، فقد استخدمنا الوسيط ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢١ ، وذلك نظراً لوجود قيم متطرفة في بعض الحالات ، (مثل نوفمبر ، ديسمبر) . ومن الممكن أن تستخدم أيضاً الوسيط الحسابي مع استبعاد القيم المتطرفة في كل عمود .

مجموع الوسيطات هو 1199.8 ، وهو قريب من 1200 وهذا هو المطلوب وهذا لا توجد حاجة إلى التعديل . ويوضح الصف الأخير بالجدول ١٦ - ٢١ الدليل الموسمي المطلوب .

وتتفق النتائج بشكل جيد مع نتائج المسألة ١٦ - ٩

١١-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦ - ٨ باستخدام طريقة الوصلة النسبية .

الحل :

نمبر أولاً عن بيان كل شهر كنسبة مئوية من بيانات الشهر السابق ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢٢ . كل من هذه النسب تسمى وصلة نسبية . على سبيل المثال . لمحصل على قيم شهرى فبراير ومارس 1951 ، فإنه من بيانات المسألة ١٦ - ٦ ،

$$\text{الوصلة النسبية لشهر فبراير 1951} = \frac{\text{قيمة فبراير 1951}}{\text{قيمة يناير 1951}} = \frac{281}{318} = 88.4 \%$$

$$\text{الوصلة النسبية لشهر مارس 1951} = \frac{\text{قيمة مارس 1951}}{\text{قيمة فبراير 1951}} = \frac{278}{281} = 98.9 \%$$

جدول ١٦ - ٢٢

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
88.4	98.9	89.9	92.4	93.5	103.2	109.9	109.8	112.3	107.6	106.8		1951
90.4	96.8	89.6	92.9	94.8	102.5	108.3	109.9	111.5	106.5	106.4		1952
89.4	97.6	89.7	93.7	93.3	103.2	109.7	108.8	111.7	106.4	107.4		1953
89.0	98.0	90.9	93.2	94.1	103.3	108.2	107.5	111.0	106.9	107.2		1954
90.0	97.9	90.3	94.0	94.3	103.0	108.2	107.9	111.2	106.6	107.1		1955
90.9	96.6	91.0	94.2	94.4	104.0	107.2	109.2	108.9	106.3	106.4		1956
90.3	97.5	91.6	94.1	93.8	102.9	108.7	107.0	110.1	107.4	105.1		1957
90.2	97.1	91.4	94.1	95.5	102.4	107.7	106.9	110.0	106.7	106.5		1958
100.7	90.1	97.6	90.6	93.8	94.2	103.1	108.2	108.4	111.1	106.6	106.6	الوسيط

متوسط الوصلات النسبية للأشهر المختلفة (في هذه الحالة الوسيط) موضح بالصف الأخير للجدول ١٦ - ٢٢ .
ويمكن أيضاً استخدام الوسيط الحسابي (أنظر المسألة ١٦ - ١٢) .

اعتبر أن يناير له القيمة 100% (أنظر الجدول ١٦ - ٢٣) . وبما أن متوسط الوصلة النسبية لشهر فبراير هو 90.1 (من الجدول ١٦ - ٢٢) فإن بيانات شهر فبراير هي في المتوسط 90.1% من بيانات شهر يناير ، أي 90.1% من 100 = 90.1 وبصورة مشابهة فإن متوسط الوصلة النسبية لشهر مارس هو 97.6% من شهر فبراير أي 97.6% من 90.1 = 87.9 ، وهكذا نحصل على الجدول ١٦ - ٢٣ والذي تسمى قيمه أحياناً بالمناشير المسلسلة .

الجدول ١٦ - ٢٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير
100.0	90.1	87.9	79.6	74.7	70.4	72.6	78.6	85.7	94.7	101.0	107.7	108.5

في الجدول ١٦ - ٢٣ قيمة يناير التالي (العمود الأخير) هي 108.5 ، بزيادة قدرها 8.5 عن يناير الأول . وهذه الزيادة ترجع إلى الزيادة طويلة المدى في البيانات . للتعديل لاستبعاد هذا الاتجاه العام يجب طرح $(8.5)(12/12) = 8.5$ من قيمة العمود الأخير (وهذا يجعل قيمة يناير التالي 100) ، $(8.5)(11/12) = 7.8$ ، من قيمة ديسمبر ، $(8.5)(10/12) = 7.1$ من قيمة نوفمبر ، وهكذا . والقيم المعدلة لاستبعاد الاتجاه العام موضحة بالجدول ١٦ - ٢٤ ، (بصورة أكثر دقة يجب ضرب القيم الموجودة بالجدول من اليمين إلى اليسار في

$$100.0 / 108.5)^{12/12}, (100.0 / 108.5)^{11/12}, (100.0 / 108.5)^{10/12}, \dots$$

وهذه من الناحية العملية تنتج نفس النتيجة الموضحة بالجدول (١٦ - ٢٤)

الجدول ١٦ - ٢٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.4	86.5	77.5	71.9	66.9	68.4	73.6	79.5	88.3	93.9	99.9

ونظراً لأن مجموع هذه النسب المئوية هي 995.8 ، فإننا نعد لها بالضرب في 1200/995.8 للحصول على الدليل الموسمي ، وهو موضح بالجدول ١٦ - ٢٥ .

الجدول ١٦ - ٢٥

	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
الدليل الموسمي	120.5	107.7	104.2	93.4	86.6	80.6	82.4	88.7	95.8	106.4	113.2	120.4

١٦-١٢ حل المسألة ١٦ - ١١ إذا استخدمنا الوسط الحسابي للوصلات النسبية بدلا من الوسيط .

الحل :

متوسط الوصلات النسبية موضح بالجدول ١٦ - ٢٦

جدول ١٦ - ٢٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.4	89.8	97.6	90.5	93.6	94.2	103.1	108.5	108.4	110.8	106.8	106.6

إذا اعتبرنا أن يناير له القيمة 100(%) فإن قيمة فبراير هي 89.8% من 100=89.8 ، وقيمة مارس هي

97.6% من 89.8 تساوي 87.6 ، كما هو موضح بالجدول ١٦ - ٢٧

الجدول ١٦ - ٢٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.8	87.6	79.3	74.2	69.9	72.1	78.2	84.8	94.0	100.4	107.0

هنا القيمة في يناير التالى هى 107.4 ، بزيادة مقدارها 7.4 عن يناير الأول وذلك راجع إلى الاتجاه العام .
لاستبعاد أثر الاتجاه العام نقوم بطرح $(12/12)(7.4) = 7.4$ من العمود الأخير ، $(11/12)(7.4) = 6.8$ ،
من قيمة شهر ديسمبر ، $(10/12)(7.4) = 6.2$ من قيمة شهر نوفمبر وهكذا ، وينتج عن ذلك القيم الموجودة بالجدول

٢٨ - ١٦

جدول ١٦ - ٢٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
100.0	89.2	86.4	77.5	71.7	66.8	68.4	73.9	79.9	88.4	94.2	100.0

وبما أن مجموع القيم في الصف الأخير بالجدول ١٦ - ٢٨ هى 996.6 فإننا نعدل هذه القيمة بالضرب في
1200/996.6 ومن ثم نحصل على الدليل الموسمي المعطى بالجدول ١٦ - ٢٩

جدول ١٦ - ٢٩

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
120.4	107.4	104.0	93.3	86.3	80.4	82.4	89.0	96.2	106.4	113.4	120.7
الدليل الموسمي											

تخليص البيانات من أثر الموسم :

١٦-١٣ عدل بيانات المسألة ١٦ - ٨ للتغيرات الموسمية ، أى خلع البيانات من أثر الموسم .

الحل :

لتعديل البيانات للتخلص من أثر التغيرات الموسمية ، يجب قسمة كل عنصر في البيانات الأصلية للمسألة ١٦-٨
بالدليل الموسمي للشهر المقابل كما حصلنا عليه في الطريقة السابقة .

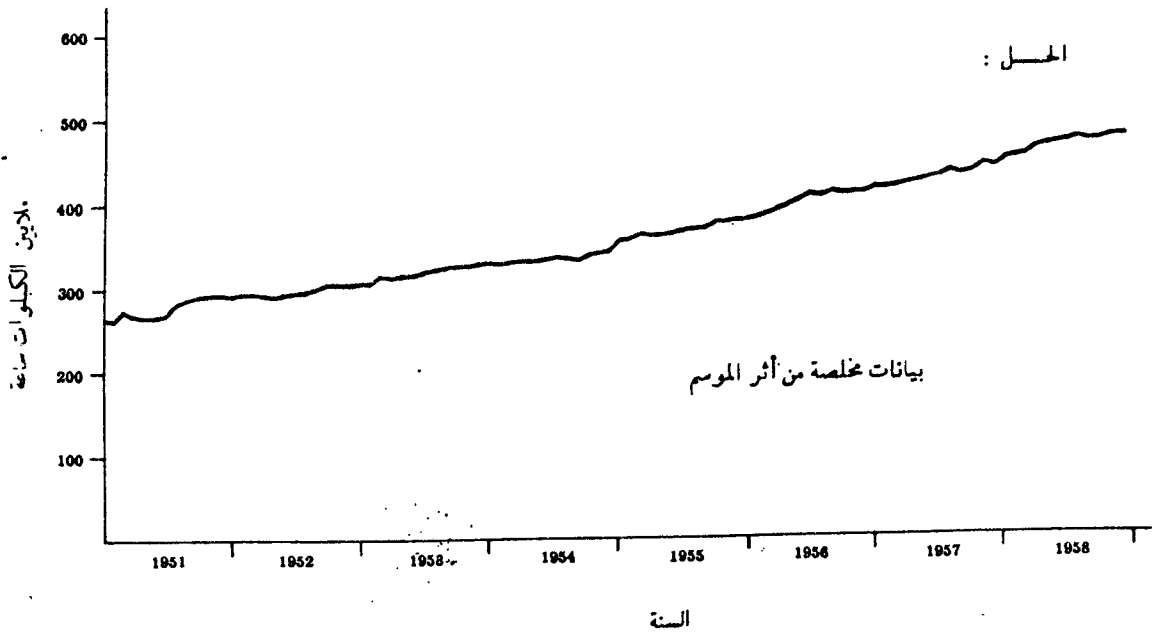
فإذا استخدمنا ، على سبيل المثال ، الدليل الموسمي للمسألة ١٦ - ١٠ فإننا نقسم كل قيم يناير على 119.8% (أى
1.198) ، وكل قيم فبراير على 107.2% (أى 1.072) وهكذا . وبهذا فإن البيانات المخلصة من أثر الموسم
هى كما يلي بالجدول ١٦ - ٣٠

المسألة ١٦ - ٢٠

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
265	262	269	267	265	265	267	274	279	285	289	290	1951
285	288	289	287	286	290	290	293	299	303	305	304	1952
306	306	309	307	308	308	311	317	321	325	327	329	1953
327	326	331	333	333	335	338	341	340	343	346	349	1954
351	353	358	357	360	363	366	369	369	374	376	378	1955
378	384	385	387	391	395	402	401	407	403	404	404	1956
407	410	415	420	424	426	428	434	430	431	437	431	1957
442	445	448	452	456	466	466	468	465	465	468	468	1958

(أ) ارسم البيانات المخلصة من الموسم بالمسألة السابقة

(ب) قارن الرسم برسم المسألة ١٦ - ٨ (أ)



شكل ١٦ - ٥

(ب) الشكل البياني للبيانات المعدلة للتخلص من أثر الموسم تظهر بوضوح الاتجاه العام طويل المدى والذي ، باستثناء بعض التقلبات الطفيفة ، يعد تقريباً جيداً لخط مستقيم على الرغم من وجود اتجاه طفيف إلى أعلى .

إذا رمزنا لبيانات المسألة ١٦ - ٨ بالرمز $Y_t = TCSI$ ، فإن الرسم في (أ) يعبر عن المتغير $Y_t/S = TCI$ مرسوماً في مقابل الزمن t وهذا يحتوي على الاتجاه العام طويل المدى ، التغيرات الدورية وغير المنتظمة . وبما أن الرسم يوضح الاتجاه طويل المدى بصورة جيدة فإنه يظهر أن حاصل الضرب CI للعناصر الدورية وغير المنتظمة يجب أن يكون من الناحية العملية 100% . وهذه الحقيقة ستأكد منها في المسألة ١٦ - ١٦ .

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

١٥-١٦ عدل بيانات المسألة ١٦ - ١٣ للتخلص من أثر الموسم .

الحل :

لاستبعاد أثر الاتجاه العام من بيانات المسألة ١٦-١٣ نقسم كل قيمة على القيمة الاتجاهية المقابلة لكل شهر ،
محموعة بأى من الطرق الموضحة . فى هذه المسألة سوف نستخدم القيم الاتجاهية الشهرية ، التى حصلنا عليها فى المسألة
١٦ - ١٠ مستخدمين طريقة المتوسطات المتحركة . ويوضح الجدول ١٦ - ٣١ النتائج . للحصول على قيمة يوليو 1951
على سبيل المثال ، نقسم القيمة المقابلة 267 الموضحة بالجدول ١٦ - ٣ بالمسألة ١٦ - ١٣ على القيمة 274.7 (أنظر
المسألة ١٦ - ١٠ ، القيمة الأولى فى العمود 5 من الجدول ١٦ - ٢٠) ، والتى تعطى $267/274.7 = 97.2\%$ ،
ونحصل على القيم الأخرى بطريقة مماثلة . أحد عيوب هذه الطريقة ، كما فى جميع الطرق المتضمنة استخدام المتوسطات
المتحركة ، أننا نفقد البيانات عند طرفى السلسلة الزمنية .

الجدول ١٦ - ٣١

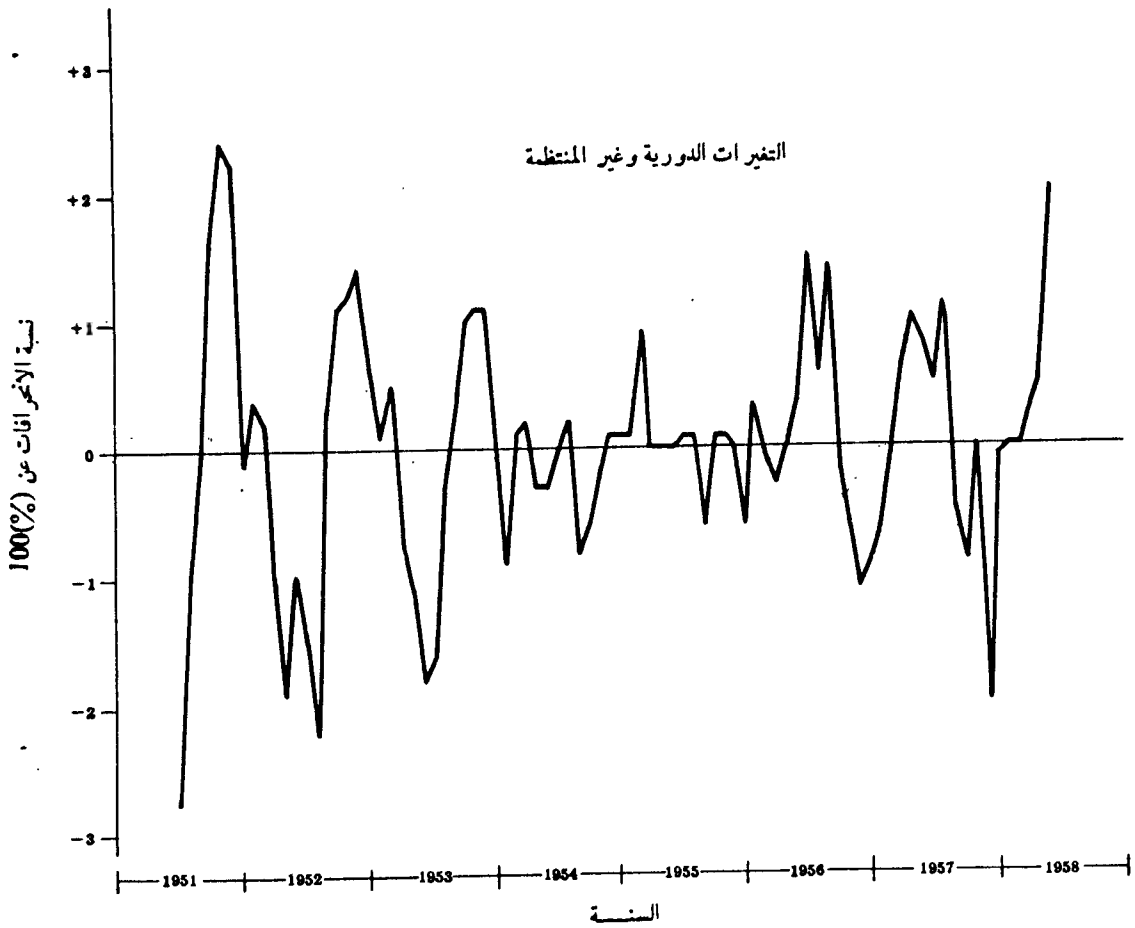
	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
1951							97.2	99.0	100.0	101.6	102.4	102.2
1952	99.9	100.4	100.2	99.0	98.1	99.0	98.5	97.8	100.3	101.1	101.2	100.4
1953	100.6	100.1	100.5	99.2	98.9	98.2	98.4	99.7	100.4	101.0	101.1	101.1
1954	99.9	99.1	100.1	100.2	99.7	99.7	100.0	100.2	99.2	99.4	99.8	100.1
1955	100.1	100.1	100.9	100.0	100.0	100.0	100.1	100.2	99.4	100.1	100.1	100.0
1956	99.4	100.3	99.9	99.7	100.0	100.4	101.5	100.6	101.4	99.8	99.4	98.9
1957	99.1	99.3	100.0	100.7	101.0	100.8	100.5	101.1	99.5	99.1	100.0	98.0
1958	99.9	100.0	100.0	100.3	100.5	102.0						

١٦-١٩ (أ) ارسم البيانات التى حصلت عليها بالمسألة ١٦ - ١٥

(ب) فسر دلالة الرسم .

الحل :

(أ) من الملائم طرح 100% من بيانات المسألة السابقة ورسم الانحرافات الناتجة . الرسم الناتج ، باستخدام
محور رأسى مكبر موضح بالشكل ١٦ - ٦ .



شكل ١٦ - ٦

(ب) يعبر عن البيانات الأصلية بالمعادلة $Y = TCSI$. إجراء التعديل لاستبعاد التغيرات الموسمية كما في المسألة ١٦ - ١٣ يعتبر بمثابة قسمة الطرفين على الدليل الموسمي S للحصول على $Y/S = TCI$. والتعديل التالى لاستبعاد الاتجاه العام يعد بمثابة القسمة على T لنحصل على $Y/ST = CI$. بطرح 100% نحصل على $T/ST - 100 = CI - 100$. أى أن المتغير التابع فى الشكل أعلاه هو $Y/ST - 100$ ، والمتغير المستقل هو الزمن t .

ويتكون الشكل من الناحية النظرية من التحركات الدورية وغير المنتظمة فقط ، ممثلة بالعناصر C و T على الترتيب . لاحظ أن حاصل الضرب CI يتغير بين 97% و 103% وهذا يؤكد العبارة التى وردت فى نهاية المسألة ١٦ - ١٤ .

١٧-١٦ (أ) أوجد 3 أشهر متوسط و 7 أشهر متوسط لبيانات المسألة ١٦ - ١٥

(ب) كون الرسم البياني للمتوسطات المتحركة للجزء (أ)

(ت) فسر الرسوم البيانية .

الحل :

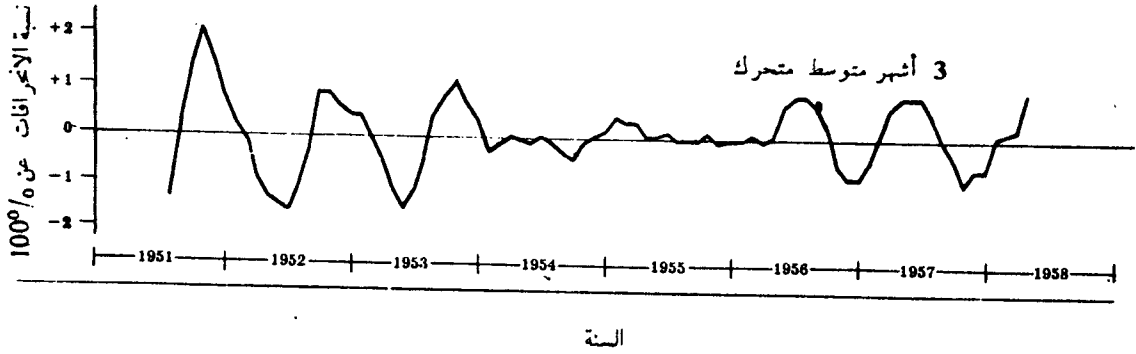
(أ) المتوسطات المتحركة المطلوبة موضحة بالجدول ١٦ - ٣٢ .

جدول ١٦ - ٣٢

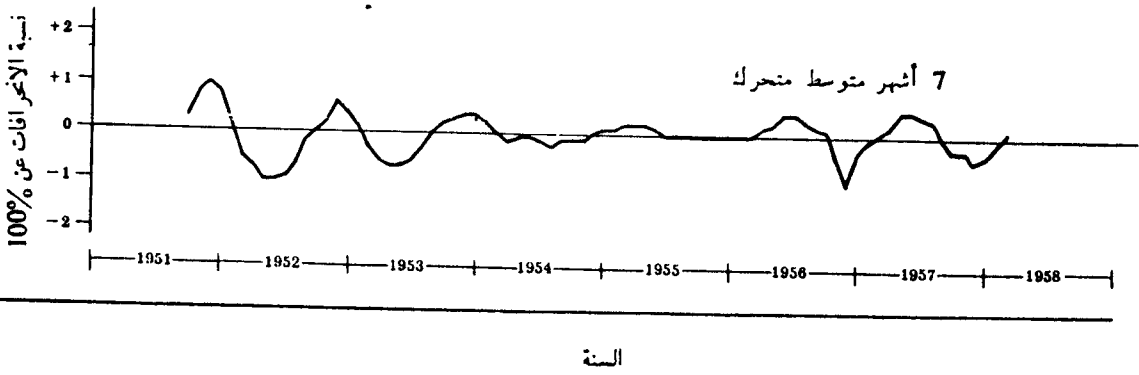
السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر مجموع متحرك	3 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر متوسط متحرك	7 أشهر مجموع متحرك
1951					
يوليه	97.2				
أغسطس	99.0	296.2	98.7		
سبتمبر	100.0	300.6	100.2		
أكتوبر	101.6	304.0	101.3	702.3	100.3
نوفمبر	102.4	306.2	102.1	705.5	100.8
ديسمبر	102.2	304.5	101.5	706.7	101.0
1952					
يناير	99.9	302.5	100.8	705.7	100.8
فبراير	100.4	300.5	100.2	702.2	100.3
مارس	100.2	299.6	99.9	698.8	99.5
أبريل	99.0	297.3	99.1	695.1	99.3
مايو	98.1	296.1	98.7	693.0	99.0
يونيه	99.0	295.6	98.5	692.9	99.0
يوليه	98.5	295.3	98.4	693.8	99.1
أغسطس	97.8	296.6	98.9	696.0	99.4
سبتمبر	100.3	299.2	99.7	698.3	99.8
أكتوبر	101.1	302.6	100.9	699.9	100.0
نوفمبر	101.2	302.7	100.9	701.5	100.2
ديسمبر	100.4	302.2	100.7	704.2	100.6
1953					
يناير	100.6	301.1	100.4	703.1	100.4
فبراير	100.1	301.2	100.4	700.9	100.1
مارس	100.5	299.8	99.9	697.9	99.7
أبريل	99.2	298.6	99.5	695.9	99.4
مايو	98.9	296.3	98.8	695.0	99.3
يونيه	98.2	295.5	98.5	695.3	99.3
يوليه	98.4	296.3	98.8	695.8	99.4
أغسطس	99.7	298.5	99.5	697.7	99.7
سبتمبر	100.4	301.1	100.4	699.9	100.0
أكتوبر	101.0	302.5	100.8	701.6	100.2
نوفمبر	101.1	303.2	101.1	702.3	100.3
ديسمبر	101.1	302.1	100.7	702.7	100.4
1954					
يناير	99.9	300.9	100.3	702.5	100.4
فبراير	99.1	299.1	99.7	701.2	100.2
مارس	100.1	299.4	99.8	699.8	100.0
أبريل	100.2	300.0	100.0	698.7	99.8
مايو	99.7	299.6	99.9	699.0	99.9
يونيه	99.7	299.4	99.8	699.1	99.9
يوليه	100.0	299.9	100.0	698.4	99.8
أغسطس	100.2	299.4	99.8	698.0	99.7
سبتمبر	99.2	298.8	99.6	698.4	99.8
أكتوبر	99.4	298.4	99.5	698.8	99.8
نوفمبر	99.8	299.3	99.8	698.9	99.8
ديسمبر	100.1	300.0	100.0	699.6	100.0

السنة و الشهر	البيانات	3 أشهر مجموع متحرك	3 أشهر متوسط مجموع	7 أشهر مجموع متحرك	7 أشهر متوسط متحرك
1955					
يناير	100-1	300-3	100-1	700-4	100-1
فبراير	100-1	301-1	100-4	701-0	100-1
مارس	100-9	301-0	100-3	701-2	100-2
أبريل	100-0	300-9	100-3	701-2	100-2
مايو	100-0	300-0	100-0	701-2	100-2
يونيه	100-0	300-1	100-0	700-5	100-1
يوليه	100-1	300-2	100-1	699-7	100-0
أغسطس	100-1	299-6	99-9	699-8	100-0
سبتمبر	99-4	299-6	99-9	699-8	100-0
أكتوبر	100-1	299-6	99-9	699-2	100-0
نوفمبر	100-1	300-2	100-1	699-4	100-0
ديسمبر	100-0	299-5	99-8	699-2	100-0
1956					
يناير	99-4	299-7	99-9	699-5	100-0
فبراير	100-3	299-6	99-9	699-4	100-0
مارس	99-9	299-9	100-0	699-7	100-0
أبريل	99-7	299-6	99-9	701-2	100-2
مايو	100-0	300-1	100-0	702-4	100-3
يونيه	100-4	301-9	100-6	703-5	100-5
يوليه	101-5	302-5	100-8	703-4	100-5
أغسطس	100-6	302-5	100-8	703-1	100-4
سبتمبر	101-4	301-8	100-6	702-0	100-3
أكتوبر	99-8	300-6	100-2	700-7	100-1
نوفمبر	99-4	298-1	99-4	698-5	99-5
ديسمبر	98-9	297-4	99-1	697-9	99-0
1957					
يناير	99-1	297-3	99-1	697-2	99-6
فبراير	99-3	298-4	99-5	698-4	99-8
مارس	100-0	300-0	100-0	699-8	100-0
أبريل	100-7	301-7	100-6	701-4	100-2
مايو	101-0	302-5	100-8	703-4	100-5
يونيه	100-8	302-3	100-8	703-6	100-5
يوليه	100-5	302-4	100-8	702-7	100-4
أغسطس	101-1	301-1	100-4	702-0	100-3
سبتمبر	99-5	299-7	99-9	699-0	99-9
أكتوبر	99-1	298-6	99-5	698-1	99-7
نوفمبر	100-0	297-1	99-9	697-6	99-7
ديسمبر	98-0	297-9	99-3	696-5	99-5
1958					
يناير	99-9	297-9	99-3	697-3	99-6
فبراير	100-0	299-8	100-0	698-7	99-8
مارس	100-0	300-3	100-1	700-7	100-1
أبريل	100-3	300-8	100-2		
مايو	100-5	302-8	100-9		
يونيه	102-0				
يوليه					
أغسطس					
سبتمبر					
أكتوبر					
نوفمبر					
ديسمبر					

(ب) كما في المسألة ١٦ - ١٦ في الملائم طرح (100%) من المتوسطات المتحركة ورسم الانحرافات الناتجة كما هو موضح أدناه .



الشكل ١٦ - ٧



الشكل ١٦ - ٧

(ج) وكما هو متوقع ، فإن المتوسطات المتحركة تعمل في تمهيد عدم الانتظام في بيانات المسألة ١٦ - ١٥ ، كما هو واضح من مقارنة الأشكال في (ب) بشكل المسألة ١٦ - ١٦ . ويتضح أيضا من الشكل أن الـ 7 أشهر متوسط متحرك يعطي تمهيدا أكبر للبيانات عن الـ 3 أشهر متوسط متحرك في هذه المسألة . وما يثير الاهتمام أن النهايات الثلاث إلى اليسار والنهايتين الصغيرتين إلى اليمين في أشكال (ب) تحدث كلها بالقرب من ديسمبر . كذلك ، فإن النهايتين الصغيرتين إلى اليسار والنهايتين العظيمين إلى اليمين تحدث بالقرب من يونيو . هذه الملاحظات يظهر أنها تشير إلى بقايا ضئيلة لمتغيرات موسمية عند بداية ونهاية فترة السنوات الثماني والتي تعمل في اتجاهات مضادة ، وهذه تشير إلى تغير محتمل في نمط الموسمية . والتي من الطبيعي خلال فترة ثمانية سنوات كاملة أن تحدث . وتظهر البقايا الضئيلة للموسمية بصورة أوضح إذا استخدمنا 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا .

من المعتاد استخدام طريقة هذه المسألة لاستقصاء نمط الدورية .

ويجب أن نتوقع ذلك حيث أنه لو كانت البيانات الأصلية ، معطاة بالصورة $Y = TCSI$ ، فإن تعديلها لاستبعاد أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية فإننا نحصل على بيانات جديدة $Y/ST = CI$ ، والتي (نظريا) تحتوى فقط على التحركات الدورية وغير المنتظمة . وهذا فإن متوسطا متحركا مناسباً يفيد في حذف عدم الانتظام وإيضاح نمط الدورية ، في حالة وجودها . لهذا الغرض فإن 12 شهرا لمتوسطا متحركا مركزيا قد يكون أفضل لحذف بقايا التغيرات الموسمية وكذلك عدم الانتظام .

في المسألة الحالية لا يوجد أثر ظاهر للدورية ، أو إذا كانت موجودة فإنه يمكن إهمالها . في النظرية الاقتصادية فإننا غالبا ما نطلب بيانات لعدد قد يصل إلى فترة 20 سنة قبل أن تبدأ الدورات في الظهور .

قابلية البيانات لمقارنة :

١٨-١٦ كيف يمكن تعديل بيانات المسألة ٨-١٦ بحيث نمنح مسموحات السنوات الكبيسة 1952 و 1956 ؟

الحل :

في السنة الكبيسة ، فبراير 29 يوما بدلا من 28 يوما كالمعتاد . لتحقيق قابلية البيانات للمقارنة فإننا نقوم بضرب بيانات شهر فبراير في السنة الكبيسة في 28/29 . هذا فإنه في الجدول ١٢،١٦ للمسألة ٨-١٦ .

قيمة شهر فبراير 1952 يوضع بدلا منها $298 = (309) (28/29)$

قيمة شهر فبراير 1956 يوضع بدلا منها $398 = (412) (28/29)$

هذه التعديلات لم تستخدم عند حساب الدليل الموسمي (أنظر المسائل ٨-١٦، ١٢-١٦) . وعلى أية حال ، فإن تأثيرها على النتائج يمكن إهماله (أنظر المسألة ١٦-٥٢) .

التنبؤ :

١٩-١٦ (أ) باستخدام البيانات في الجدول ١٢-١٦ بالمسألة ٨-١٦ ، تنبؤ بالطاقة الكهربائية الشهرية المستخدمة في إضاءة الشوارع والطرق السريعة في الولايات المتحدة خلال سنة 1959

(ب) قارن القيم المتنبؤ بها بالقيم الفعلية .

الحل :

(أ) القيم الشهرية المستقبلية تعطى بالمعادلة $Y = TCSI$ ، حيث يجب أن نقدر T, C, S, I

لتقدير الاتجاه العام T ، هناك عدد من الطرق يمكن أن تستخدم . من الرسم البياني للمسألة ١٦-١٤ (أنظر الشكل ١٦-٥) يتضح أنه في إمكاننا الحصول على تقدير دقيق للقيم الاتجاهية في المستقبل بتوفيق خط القيم الاتجاهية في السنتين الأخيرتين ، على سبيل المثال ، وهذا يمكن عمله باستخدام طريقة المربعات الصغرى أو من الطرق الأخرى التي سبق مناقشتها .

سوف نحصل على القيم بطريقة سهلة نسبياً وهي طريقة شبكات المتوسطات مطبقة على النتائج التي

جدول ١٦ - ٣٣

يولية	1956	396.2	يولية	1957	425.9
اغسطس	1956	398.8	اغسطس	1957	429.2
سبتمبر	1956	401.3	سبتمبر	1957	432.2
اكتوبر	1956	403.9	اكتوبر	1957	434.8
نوفمبر	1956	406.4	نوفمبر	1957	437.2
ديسمبر	1956	408.6	ديسمبر	1957	439.8
يناير	1957	410.6	يناير	1958	442.5
فبراير	1957	412.7	فبراير	1958	445.1
مارس	1957	414.9	مارس	1958	447.8
ابريل	1957	417.1	ابريل	1958	450.7
مايو	1957	419.9	مايو	1958	453.6
يونية	1957	422.8	يونية	1958	456.9
المجموع		4913.2	المجموع		5295.7
المتوسط		409.4	المتوسط		441.3

حصلنا عليها في المسألة ١٦-١٠ . في الجدول المرفق قسمنا الـ 12 شهر متوسطات متحركة مركزية إلى مجموعتين متساويتين للأشهر من يوليو 1956 إلى يونية 1958 .

من متوسطات البيانات في كل جزء يتضح أن هناك زيادة مقدارها $441.3 - 409.4 = 31.9$ في 12 شهر أو $31.9 / 12 = 2.66$ في الشهر . بالإضافة المتتالية 2.66

إلى 456.9 ، وهو آخر رقم متاح ويقابل شهر يونيو 1958 ، فإنه يمكن أن نحصل على القيم الاتجاهية عن سنة 1959 كما هو موضح بالمود الثالث بالجدول ١٦-٣٤ (١) أدناه .

لتقدير عنصر الموسمية S ، فإننا نستخدم الدليل الموسمي الذي حصلنا عليه في المسألة ١٦-١٠ ، حل الرغم من أنه يمكن أن نستخدم الدليل الموسمي الذي حصلنا عليه باستخدام طرق أخرى . هذا الدليل الموسمي قد كرر في الصف الرابع بالجدول ١٦ - ٣٤ (١) .

من الشكل ١٦-٦ بالمسألة ١٦-١٦ يتضح أن تقدير العناصر الدورية وغير المنتظمة CI يختلف عن 100%

بمقدار أقل من 2.5% بهذا فلو افترضنا أن $CI=100\%=1$ أى $CI = T \times S$ أو $Y = T \times C \times S \times I = (T \times S)(C \times I) = T \times S$ فإننا يجب ألا نكون أعمل بأكثر من 2.5% في Y .

ديسمبر	نوفبر	أكتوبر	سبتمبر	أغسطس	يوليو	يونيه	مايو	أبريل	مارس	فبراير	يناير	جنول ١٦-٣٤ (١)
472.9	470.2	467.5	464.9	462.2	459.6	456.9						القيم الاجمالية T لسنة 1958
504.8	502.1	499.5	496.8	494.1	491.5	488.8	486.2	483.5	480.8	478.2	475.5	القيم الاجمالية T لسنة 1959
119.6	112.3	106.0	96.4	89.5	83.4	81.5	87.2	93.5	103.4	107.2	119.8	الدليل الموسمي ($S\%$)
604	564	529	479	442	410	398	424	452	497	513	570	الطاقة المتنبؤ بها لسنة 1959 ($T \times S$) (بالمليون kWh)

بضرب قيم T لسنة 1959 بقيم S المقابلة (تذكر أن S هي نسبة مئوية) فإننا نحصل على القيم الشهرية المتوقعة أو المسقطة لسنة 1959 المعطاة في الصف الأخير بالجدول ١٦-٣٤ (١) أعلاه . على سبيل المثال ، القيمة المتوقعة ليناير 1959 هي $570 = (1.198)(475.5)$ وهكذا .

(ب) القيم الشهرية الفعلية لسنة 1959 ، موضحة بالجدول التالي ١٦-٣٤ (ب) وهي تظهر اتفاقا جيدا مع القيم المتنبؤ بها .

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر	جنول ١٦-٣٤ (ب)
563	509	497	454	424	404	415	446	478	524	561	594	(الطاقة الفعلية لسنة 1959 بالمليون kWh)

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

مسائل اضافية

التحركات المميزة في السلاسل الزمنية :

١٦-٢٠ إلى أي من التحركات المميزة في السلاسل الزمنية ترتبط بصورة أساسية مايلي :

- كساد مؤقت
 - زيادة العمالة في خلال أشهر الصيف
 - انخفاض معدل الوفيات الراجع إلى التقدم في العلم .
 - اضراب في صناعة الصلب .
 - الزيادة المستمرة في الطلب على سيارات الركوب الصغيرة .
- ج : (١) دورية (ب) موسمية (ج) اتجاه عام طويل المدى .
(د) غير منتظمة (هـ) اتجاه عام طويل المدى .

المتوسطات المتحركة :

٢١-١٦ إذا أعطينا الأرقام $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0$ حدد متوسطا متحركا من الرتبة

(١) الثانية (ب) الثالثة (ج) الرابعة (د) الخامسة

ج : (١) $0.5, -0.5, -0.5, 0.5, 0.5, -0.5, -0.5, 0.5$

(ب) $0, -1/3, 0, 1/3, 0, -1/3, 0$ (ج) $0, 0, 0, 0, 0, 0, 0$ (د) $1/5, 0, -1/5, 0, 1/5$

٢٢-١٦ أثبت أنه إذا كانت متتالية من الأرقام لها دورة مقدارها N (أى أن المتتالية تعيد نفسها بعد N حد) فإن كل متوسط متحرك رتبته أقل من N له دورة N . فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ٢١-١٦.

٢٣-١٦ (١) في المسألة ٢٢-١٦ ماذا يحدث في حالة المتوسط المتحرك من الدرجة N ؟ (ب) ماذا يحدث إذا كانت الرتبة أكبر من N ؟ فسر إجابتك بالرجوع إلى المسألة ٢١-١٦.

٢٤-١٦ أثبت أنه إذا كان كل رقم في متتالية يزيد (أو ينقص) بمقدار ثابت، فإن المتوسط يزيد أيضا (أو ينقص) بمقدار ثابت.

٢٥-١٦ أثبت أنه إذا كان كل رقم في متتالية يضرب في (أو يقسم على) ثابت يختلف عن الصفر، فإن المتوسط المتحرك يضرب أيضا في (أو يقسم على) هذا الثابت.

٢٦-١٦ أوجد المتوسط المتحرك المرجح للأرقام في المسألة ٢١-١٦ (ب)، (ج)، (د) إذا كانت الأوزان هي على الترتيب : (ب) $1, 2, 1$ (ج) $1, 2, 2, 1$ (د) $1, 2, 2, 2, 1$ قارن بنتائج المسألة ٢١-١٦.

ج : (ب) $0, -0.5, 0, 0.5, 0, -0.5, 0$ (ج) $0, -0.5, -0.5, 0.5, 0.5, -0.5, -0.5, 0.5$ (د) $0, 0, 0, 0, 0$

٢٧-١٦ (١) أثبت الخصائص في المسائل ٢٤-١٦ و ٢٥-١٦ للمتوسطات المتحركة المرجحة (ب) هل نتائج المسألة ٢٢-١٦ تنطبق في حالة المتوسطات المتحركة المرجحة؟

٢٨-١٦ متتالية بها (١) 24 (ب) 25 (ج) 200 رقم. ما هو عدد الأرقام الموجودة إذا استخدم متوسط متحرك من الرتبة 5؟

ج : (١) 20 ، (ب) 21 ، (ج) 196

٢٩-١٦ متتالية بها M . عدد (١) أثبت أن متوسط متحرك من الدرجة N سيكون به $M - N + 1$ رقم. فسر إجابتك باستخدام قيم مختلفة لـ N و M (ب) ناقش الحالة عند $M = N$

٣٠-١٦ الجدول ٣٥-١٦ يوضح متوسط الاستهلاك الشهري ، بآلاف البالات من القطن المحلى والأجنبي بالولايات المتحدة الأمريكية للسنوات 1958 — 1949 . أوجد (ا) 2 سنة متوسط متحرك ، (ب) 2 سنة متوسط متحرك مركزي ، (ج) 3 سنوات متوسط متحرك ، (د) 4 سنوات متوسط متحرك مركزي (هـ) 6 سنوات متوسط متحرك مركزي .

جدول ٣٥ - ١٦

السنة	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
استهلاك القطن بالولايات المتحدة (بآلاف البالات)	656	804	836	765	777	711	755	747	696	677

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (ا) 730, 820, 800, 771, 744, 733, 751, 722, 686

(ب) 775, 810, 786, 758, 738, 742, 736, 704

(ج) 765, 802, 793, 751, 748, 738, 733, 707

(د) 780, 784, 762, 750, 737, 723

(هـ) 766, 770, 753, 734

٣١-١٦ ارسم المتوسطات المتحركة في المسألة ٣٠-١٦ مع البيانات الأصلية وناقش النتائج التي حصلت عليها .

٣٢-١٦ (ا) وضع أن 2 سنة متوسط متحرك بالمسألة ٣٠-١٦ (ب) يكافئ 3 سنوات متوسط متحرك مرجح بأوزان 1, 2, 1 على الترتيب . مثل بحسابات رقمية مباشرة . (ب) وضع أن 6 سنوات متوسط متحرك مركزي بالمسألة ٣٠-١٦ (ج) يكافئ متوسطا متحركا مرجحا بأوزان مناسبة .

٣٣-١٦ (ا) لبيانات المسألة ٣٠-١٦ حدد متوسطا متحركا مرجحا من الرتبة 3 إذا كانت الأوزان المستخدمة 1, 4, 1 .

(ب) ارسم هذا المتوسط المتحرك وقارن بالمسألة ٣٠-١٦ (ج)

٣٤-١٦ الجدول ١٦-٣٦ يوضح اجمالي المبيعات الشهرية بالآلاف لصنع عربات ركوب بالولايات المتحدة خلال السنوات 1953 - 1958 .

كون (١) 12 شهرا متوسطا متحركا (ب) 12 شهرا متوسطا متحركا مركزيا (ج) 6 أشهر متوسط متحرك مركزي .
في الأجزاء (ب) و (ج) ارسم المتوسط المتحرك مع البيانات الأصلية وقارن بين النتائج .

جدول ١٦-٣٦

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
452.6	485.3	566.1	595.8	548.3	585.7	596.9	512.7	476.2	528.8	378.9	389.6
454.6	446.7	531.5	534.7	497.1	507.1	451.7	445.3	301.0	221.2	498.2	669.9
635.5	677.7	791.3	753.4	721.1	647.7	658.7	620.6	467.8	505.2	746.0	695.1
591.0	560.9	583.2	552.9	474.0	445.8	441.0	417.0	203.9	352.1	576.7	617.6
628.0	570.0	585.7	541.7	537.1	496.3	484.7	521.3	318.3	291.1	583.8	555.2
478.4	396.2	359.5	322.5	352.1	342.2	316.4	195.0	102.7	272.2	511.9	608.7
1953											
1954											
1955											
1956											
1957											
1958											

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

تقدير الاتجاه العام :

٣٥-١٦ احصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦-٣٠ باستخدام طريقة أشباه المتوسطات حيث يأخذ كنسب :
(١) الوسط الحسابي (ب) الوسيط . كون رسما يوضح النتائج التي حصلت عليها .

ج : (١) 788, 778, 768, 758, 747, 737, 727, 717, 707, 697

(ب) 803, 790, 777, 764, 751, 737, 724, 711, 698, 685

٣٦-١٦ حل المسألة ١٦-٣٠ باستخدام (١) طريقة التمهيد باليد (ب) متوسط متحرك من رتبة مناسبة . قارن بنتائج المسألة ١٦-٣٥ .

٣٧-١٦ (١) استخدم طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خط لبيانات المسألة ١٦-٣٠ .

(ب) من النتائج في (١) أوجد القيم الاتجاهية . قارن بنتائج المسائل ١٦-٣٥ و ١٦-٣٦

ج : (١) $Y = 742.4 - 3.358 X$ ، حيث X نصف سنة ونقطة الأصل هي ١ يناير 1954 .

(ب) 758.0, 754.7, 751.3, 747.9, 744.6, 741.2, 737.9, 734.5, 731.1, 727.8

٣٨-١٦ (١) وفق القطع $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ لبيانات المسألة ١٦-٨ باستخدام المتوسطات بالجدول

١٣-١٦ بالمسألة ١٦-٩ (ب) قارن النتائج في (١) بخط المربعات الصغرى بالمسألة ١٦-٩ وقارن بالقيم الاتجاهية .

ج : (١) $Y = 351.1 + 13.188X + 0.3110X^2$ حيث X مقاسة بوحدات نصف سنوية ونقطة الأصل

عند 1 يناير 1955 .

٣٩-١٦ حصل على القيم الاتجاهية لبيانات المسألة ١٦-٣٤ باستخدام (١) طريقة أشباه المتوسطات ، (ب) طريقة التمهيد باليد ، (ج) 12 شهر متوسط متحرك مركزي ، (د) منحني مربعات صغرى ملائم .
(لتحديد ذلك استخدم رسم البيانات الأصلية المستخدم في المسألة ١٦-٣٤) ناقش مزايا وعيوب كل طريقة .

تقدير التغيرات الموسمية • الدليل الموسمي :

٤٠-١٦ الجدول ١٦-٣٧ يوضح ، لبلد معينة ، الانتاج الشهري من الزبدة بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1951 — 1958 .

(١) ارسم البيانات (ب) كون الدليل الموسمي مستخدما طريقة متوسط النسب المثوية .
عدل البيانات لتأخذ في الاعتبار السنوات الكبيسة قبل الحصول على الدليل .

جدول ١٦-٣٧

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يولية	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
85.6	80.9	92.2	101.8	132.6	141.2	130.5	119.0	93.6	86.6	68.4	70.4
78.7	78.8	91.5	102.5	135.0	128.0	117.7	105.7	92.1	87.7	75.9	94.6
103.9	101.9	121.4	133.5	156.0	154.0	135.6	118.7	95.0	91.6	91.3	109.0
118.7	116.6	143.3	142.0	164.5	160.9	129.7	109.4	92.6	87.8	86.8	97.0
108.1	104.3	121.1	129.4	157.9	151.9	123.0	102.1	91.9	94.7	92.7	105.8
114.6	114.1	129.6	135.4	151.9	149.0	127.6	109.8	92.4	93.1	92.3	103.4
115.3	110.3	124.6	132.3	159.3	148.1	125.8	106.9	90.1	100.3	94.1	105.7
118.6	113.4	129.5	130.3	150.6	144.7	126.9	97.7	86.7	91.9	90.9	107.2
1951											
1952											
1953											
1954											
1955											
1956											
1957											
1958											

٤١-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة الاتجاه العام للنسب المثوية أو الاتجاه العام للنسب . للحصول على القيم الاتجاهية ، وفق منحني مربعات صغرى ملائم للمتوسطات الشهرية للسنوات المعطاة .

٤٢-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة النسب المثوية للمتوسط المتحرك أو نسبة المتوسط المتحرك .

٤٣-١٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٠ باستخدام طريقة الوصلة النسبية .

٤٤-١٦ الجدول ١٦-٣٨ يوضح القيم المقدرة لمبيعات محلات البيع بالتجزئة بملايين الدولارات وذلك بالولايات المتحدة خلال السنوات 1951 — 1958

(١) ارسم البيانات

(ب) أوجد الدليل الموسمي باستخدام طريقة متوسط النسب المثوية .

جدول ١٦-٣٨

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
12-63	11-72	13-43	12-53	13-29	13-27	12-36	13-27	13-10	13-86	13-39	15-38	1951
11-84	11-74	12-74	13-40	14-85	13-81	13-40	13-45	13-62	14-82	14-01	16-91	1952
13-05	12-33	13-96	14-17	14-66	14-58	14-38	14-18	14-08	14-95	13-96	16-44	1953
12-34	12-06	13-54	14-32	14-25	14-66	14-39	13-90	14-14	14-66	14-53	17-87	1954
13-15	12-64	14-57	15-49	15-33	15-60	15-26	15-48	15-76	15-68	15-75	19-12	1955
13-73	13-55	15-72	14-89	16-11	16-58	15-38	16-19	15-58	16-13	16-49	19-38	1956
14-74	14-06	15-79	16-44	17-20	17-11	16-86	17-49	16-37	16-95	17-13	19-84	1957
15-29	13-78	15-55	16-27	17-36	16-60	16-60	17-00	16-33	17-36	17-04	21-17	1958

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٦-٤٥ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة النسب المثوية للاتجاه العام أو النسبة للاتجاه العام .

١٦-٤٦ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة النسبة للمتوسط المتحرك .

١٦-٤٧ أوجد الدليل الموسمي لبيانات المسألة ١٦-٤٤ باستخدام طريقة الوصلات النسبية .

١٦-٤٨ الجدول ١٦-٣٩ يوضح أجور الشحن بعربات السكك الحديدية بالولايات المتحدة بآلاف عربات السكك الحديدية خلال السنوات 1951 — 1958 . (أ) ارسم هذه البيانات .

(ب) أوجد الدليل الموسمي باستخدام طريقة متوسط النسب المثوية .

جدول ١٦-٣٩

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	
3661	2834	2999	3152	3977	3295	3807	3307	3312	4317	3139	2700	1951
3562	2911	2868	2912	3678	2606	2969	3149	3364	4156	3139	2672	1952
3351	2730	2801	2957	3883	3204	3758	3229	3153	4024	2797	2413	1953
2967	2462	2412	2445	3345	2730	3251	2708	2711	3629	2685	2518	1954
2505	2556	3256	2757	3754	3052	3015	3883	3148	3282	3758	2669	1955
2713	2751	3517	2971	3835	3143	2397	3700	3155	3284	3740	2641	1956
2565	2616	3446	2696	3558	2959	2708	3737	2849	2920	3223	2221	1957
2164	2108	2702	2105	2729	2489	2138	3146	2570	2733	2462	2188	1948

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٦-٤٩ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة النسبة إلى الاتجاه العام .

١٦-٥٠ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك .

١٦-٥١ حل المسألة ١٦-٤٨ بطريقة الوصلات النسبية .

٥٢-١٦ أعد حل (١) المسألة ١٦-٨ ، (ب) المسألة ١٦-٩ ، (ج) المسألة ١٦-١٠ (د) المسألة ١٦-١١ ، باستخدام البيانات بعد تعديلها لمراعاة الأشهر الكبيسة وحدد ما إذا كان التعديل يؤدي إلى تغيير معنوي في الدليل الموسمي النهائي الذي حصلت عليه .

٥٣-١٦ (١) احسب الدليل الموسمي للسنوات الأربع الأخيرة وللنوبات الأربع الأولى لبيانات المسألة ١٦-٨ باستخدام أى طريقة .

(ب) قارن الدليلين الذين حصلت عليهما واطرح الاختلاف إذا وجد .

تخليص البيانات من أثر الموسم :

٥٤-١٦ (١) خُصص بيانات المسألة ١٦-٤٠ من أثر الموسم ، مستخدماً أى دليل موسمي من الذي حصلت عليه في المسائل ١٦-٤٠ إلى ١٦-٤١ .

(ب) ارسم البيانات المخلصة من أثر الموسم وفسر النتائج .

٥٥-١٦ (١) عدل بيانات المسألة ١٦-٤٤ لاستبعاد التغيرات الموسمية باستخدام أى من نتائج المسائل ١٦-٤٤ إلى ١٦-٤٧ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسمياً وفسر النتائج التي حصلت عليها .

٥٦-١٦ (١) خُصص بيانات المسألة ١٦-٤٨ من أثر الموسم باستخدام الأدلة الموسمية للمسائل ١٦-٤٨ إلى ١٦-٥١ .

(ب) ارسم البيانات المعدلة موسمياً وفسر النتائج التي حصلت عليها .

تقدير التغيرات الدورية وغير المنتظمة :

٥٧-١٦ (١) عدل بيانات المسألة ١٦-٤٤ لاستبعاد أثر الاتجاه العام باستخدام أى طريقة .

(ب) ارسم البيانات التي حصلت عليها .

(ج) احسب 3 أشهر متوسط متحرك أو 5 أشهر متوسط متحرك لبيانات في (١) .

(د) فسر أى تذبذبات مشاهدة وعلى وجه الخصوص حدد ما إذا كان هناك أى وجود لتحركات دورية .

٥٨-١٦ الجدول ١٦-٤٠ يوضح ، للبلد المشار إليه بالمسألة ١٦-٤٠ ، متوسط الانتاج الشهري من الزبد بملايين الكيلوجرامات خلال السنوات 1958 — 1930

(١) ارسم البيانات وناقش امكانية وجود دورات بها .

(ب) قارن النتائج التي توصلت إليها في (١) مع النتائج التي توصلت إليها في المسألة ١٦ - ٥٧ (ج) وفسر أى تعارض .

جدول ١٦-٤٠

السنة	1944	1943	1942	1941	1940	1939	1938	1937	1936	1935	1934	1933	1932	1931	1930
المتوسط الشهري	124.0	139.5	147.0	156.0	153.1	148.5	148.8	135.3	135.8	136.0	141.2	146.9	141.1	139.0	133.1

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948	1947	1946	1945
المتوسط الشهري	115.5	117.7	117.8	115.2	120.7	117.7	99.0	100.2	115.5	117.7	100.9	110.8	97.6	113.6

١٦-٥٩ حل المسائل ١٦-٥٧ و ١٦-٥٨ للبيانات المخلصة من أثر الموسم بالمسألة ١٦-٥٦ . المتوسط الشهري للتأمين على حمولات عربات السكك الحديدية ميرا عنه بآلاف عربات السكك الحديدية موضح للسنوات 1930 - 1958 بالجدول التالي

جدول ١٦-٤١

السنة	1944	1943	1942	1941	1940	1939	1938	1937	1936	1935	1934	1933	1932	1931	1930
المتوسط الشهري	3617	3537	3564	3529	3030	2826	2538	3139	3009	2625	2570	2435	2348	3096	3823

السنة	1958	1957	1956	1955	1954	1953	1952	1951	1950	1949	1948	1947	1946	1945
المتوسط الشهري	2517	2958	3154	3136	2826	3185	3165	3375	3242	2993	3560	3709	3445	3493

١٦-٩٠ في تعديل البيانات للتخلص من أثر الاتجاه العام والتغيرات الموسمية ، هل يحدث اختلاف في النتائج حسب أى منهم الذى نبدأ به أولا ؟ مثل إجابتك (١) نظريا (ب) باستخدام أحد السلاسل الزمنية بالمسائل ١٦-٤٠ ، ١٦-٤٤ أو ١٦-٤٨

١٦-٩١ (١) حل المسألة ١٦-١٧ باستخدام 12 شهرا متوسلا متحركا مركزيا وارسم البيانات (ب) ما هى الاستنتاجات التى تحصل عليها من النتائج فى (١) ؟

١٦-٩٢ (١) أوجد التوزيع التكرارى لحجم التغيرات غير المنتظمة الموجود بالمسألة ١٦-١٥ و ١٦-١٦ .
(ب) هل التوزيع التكرارى الذى حصلت عليه فى (١) يمكن تقريبه بالتوزيع الطبيعي ؟ إذا كان هذا صحيحا أذكر مبررات ذلك .

التنبؤ :

١٦-٩٣ (أ) استخدم أى نتائج بالمسائل ١٦-٤٠ إلى ١٦-٤٣ ، ١٦-٥٧ و ١٦-٥٨ للتنبؤ بإنتاج الزيت خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٣ .

جدول ١٦-٤٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
116.3	108.2	121.4	126.8	143.4	135.6	112.5	90.9	82.6	91.2	92.1	108.0

١٦-٩٤ (أ) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦-٤٤ إلى ١٦-٤٧ للتنبؤ بمبيعات جميع متاجر التجزئة بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٣ .

جدول ١٦-٤٣

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
16.23	14.96	17.19	17.59	18.60	18.71	18.33	18.05	17.57	19.10	17.64	21.45

المصدر : استقصاء الأعمال التجارية

١٦-٩٥ (أ) استخدم أى نتائج فى المسائل ١٦-٤٨ إلى ١٦-٥١ و ١٦-٥٩ للتنبؤ بالشحن على عربات السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال سنة 1959 .

(ب) ناقش المصادر الممكنة للخطأ .

(ج) قارن تنبؤاتك بالقيم الفعلية لسنة 1959 للمطاة بالجدول ١٦-٤٤ .

جدول ١٦-٤٤

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفبر	ديسمبر
2742	2291	2398	2489	3419	2813	2249	2712	2190	2908	2403	2376

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

مسائل متنوعة

١٦-٦٦ حلل كلا من السلاسل الزمنية المعطاة بالجدول ١٦-٥ ، واتى تشير إلى بيانات أحد الدول . يمكن استخدام بيانات السنوات حتى 1958 . إذا كان هذا مرغوباً فيه . وتنبؤ بالنتائج لسنة 1959 ، مقارناً بالبيانات الفعلية لهذه السنة . لاحظ أن البيانات للسنوات 1958 — 1929 فى الجزء الأول من الجدول معطاة على أساس متوسطات شهرية لكل سنة ، بينما البيانات فى نهاية الجدول معطاة على أساس قيم شهرية لكل سنة .

جدول ١٦-٥

السنة	وحدات البناء المستخدمة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات فى الصحف فى 52 مدينة (ملايين السطور)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	انتاج الألومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الأبنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)
1929	42.4	158.1	3074	9.50	207
1930	27.5	137.9	2171	9.54	238
1931	21.2	122.2	1377	7.40	222
1932	11.2	97.1	902	4.37	155
1933	7.8	88.8	1225	3.55	137
1934	10.5	98.2	1291	3.09	184
1935	18.4	103.9	1628	4.97	186
1936	26.6	115.0	2030	9.37	293
1937	28.0	117.5	2166	12.20	258
1938	33.8	102.1	1804	11.95	285
1939	42.9	103.6	2096	13.63	317
1940	50.2	105.7	2411	17.19	302
1941	58.8	109.4	2801	25.76	479
1942	29.7	103.5	3028	43.43	888
1943	15.9	116.4	2857	76.68	527
1944	11.8	113.4	2745	64.70	256
1945	17.4	116.0	2344	41.26	200
1946	55.9	144.1	2843	34.14	186
1947	70.8	167.4	2950	47.65	277
1948	77.6	188.6	3064	51.96	392
1949	85.4	191.8	2742	50.29	522
1950	116.3	203.3	3242	59.89	572
1951	90.9	206.5	3126	69.74	771
1952	93.9	208.8	3122	78.11	898
1953	92.0	217.6	3062	104.33	936
1954	101.7	215.1	3030	121.71	973
1955	110.7	237.0	3154	130.48	977
1956	93.2	242.6	3219	139.91	1059
1957	86.8	235.8	2851	137.31	1168
1958	100.8	223.8	2798	130.46	1284

البيانات أعلاه تشير إلى متوسطات شهرية

جول ١٦-٤٥ (تابع)

السنة و الشهر	وحدات البناء المستديمة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (مدين السطور	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	إنتاج الألومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الأنشطة العامة الجديدة ملايين الدولارات)
1952					
يناير	64.9	178.1	2694	76.93	671
فبراير	77.7	184.6	2766	72.37	636
مارس	103.9	213.2	2872	77.07	722
أبريل	106.2	218.4	3123	76.88	829
مايو	109.6	225.6	3049	80.80	924
يونية	103.5	209.3	3214	77.48	1002
يولية	102.6	175.4	3213	78.37	1037
أغسطس	99.1	186.6	3489	85.18	1089
سبتمبر	100.8	214.5	3569	76.88	1109
أكتوبر	101.1	245.0	3596	77.31	1071
نوفمبر	86.1	234.9	3052	74.64	922
ديسمبر	71.5	219.8	2825	83.42	769
1953					
يناير	72.1	182.7	2769	89.90	732
فبراير	79.2	186.1	2754	92.65	719
مارس	105.8	231.7	3091	104.46	798
أبريل	111.4	232.6	3280	102.07	880
مايو	108.3	244.4	3071	105.46	953
يونية	104.6	216.0	3219	104.15	1034
يولية	96.7	188.0	3141	109.29	1089
أغسطس	93.2	198.6	3237	110.55	1097
سبتمبر	95.1	219.6	3266	109.33	1143
أكتوبر	90.1	244.4	3326	108.22	1084
نوفمبر	81.5	241.3	2893	105.64	933
ديسمبر	65.8	224.3	2695	110.29	774
1954					
يناير	66.4	182.9	2746	116.25	745
فبراير	75.2	180.7	2906	110.48	730
مارس	95.2	216.2	3361	122.34	792
أبريل	107.7	233.3	3307	120.43	888
مايو	108.5	234.6	3324	125.14	998
يونية	116.5	216.6	3124	120.76	1088
يولية	116.0	185.8	2724	126.16	1159
أغسطس	114.3	199.4	2956	125.30	1202
سبتمبر	115.7	218.9	3279	120.33	1205
أكتوبر	110.7	244.9	3363	125.09	1103
نوفمبر	103.6	238.5	3154	121.25	964
ديسمبر	90.6	229.5	3085	127.04	804
1955					
يناير	87.6	196.2	2707	128.20	742
فبراير	89.9	194.4	2845	116.24	697
مارس	113.8	242.5	3268	130.27	776
أبريل	132.0	243.8	3147	126.39	898
مايو	137.6	260.4	3327	131.13	1030
يونية	134.5	243.7	3491	127.63	1107
يولية	122.7	212.3	2946	132.67	1165
أغسطس	124.7	219.8	3554	133.55	1216
سبتمبر	114.9	246.2	3442	130.61	1208
أكتوبر	105.8	273.1	3334	134.66	1131
نوفمبر	89.2	268.5	3009	133.69	971
ديسمبر	76.2	242.5	2788	140.75	783

جدول ١٦-٤٥ : (تابع)

السنة و الشهر	وحدات البناء المستديرة غير الريفية تحت التأسيس (بالآلاف)	مجموع الاعلانات في الصحف في مدينة (ملايين السطور)	الانتاج من ألواح الخشب (آلاف الأمتار المكعبة)	الانتاج الألومنيوم الخام (آلاف الأطنان)	قيمة نشاط الابنية العامة الجديدة (ملايين الدولارات)
1955					
يناير	75.1	212.2	2991	140.39	741
فبراير	78.4	218.3	2993	132.76	700
مارس	98.6	251.3	3182	145.90	774
أبريل	111.4	261.0	3245	144.73	932
مايو	113.7	268.5	3545	150.80	1099
يونية	107.4	239.3	3437	145.73	1223
يولية	101.1	214.0	3175	151.62	1290
أغسطس	103.9	227.3	3669	92.41	1349
سبتمبر	93.9	244.1	3263	132.32	1341
أكتوبر	93.6	269.9	3496	149.13	1296
نوفمبر	77.4	262.0	3036	145.08	1066
ديسمبر	63.6	243.1	2597	148.39	901
1956					
يناير	64.2	210.5	2693	147.03	896
فبراير	65.8	207.1	2687	119.06	793
مارس	87.0	249.5	2914	135.71	885
أبريل	93.7	245.4	3003	139.15	1055
مايو	103.0	265.6	3113	145.17	1204
يونية	99.9	240.6	2952	138.01	1326
يولية	97.8	204.0	2793	142.04	1303
أغسطس	100.0	216.4	3194	143.45	1436
سبتمبر	91.9	241.3	2970	129.28	1473
أكتوبر	97.0	259.0	3097	133.76	1453
نوفمبر	78.2	250.0	2559	135.02	1170
ديسمبر	63.4	239.5	2239	140.04	1023
1957					
يناير	67.9	197.1	2526	139.91	951
فبراير	66.1	188.3	2388	121.98	861
مارس	81.4	227.8	2548	134.02	938
أبريل	99.1	228.0	2676	125.00	1109
مايو	108.5	240.9	2824	126.33	1274
يونية	113.0	226.2	2889	115.33	1422
يولية	112.8	198.0	2810	118.54	1486
أغسطس	124.0	211.6	3056	125.42	1555
سبتمبر	121.0	224.6	3143	125.94	1604
أكتوبر	115.0	259.2	3272	139.84	1600
نوفمبر	109.4	252.9	2731	140.96	1403
ديسمبر	91.2	231.0	2716	152.30	1209
1958					
يناير	87.0	193.5	2650	156.7	1130
فبراير	94.5	196.1	2642	142.1	1032
مارس	121.0	236.5	2964	157.2	1126
أبريل	142.2	255.0	3121	155.2	1285
مايو	137.0	263.8	3163	163.9	1468
يونية	136.7	237.0	3216	167.3	1637
يولية	128.8	220.4	3136	179.2	1611
أغسطس	129.3	234.4	3171	172.8	1608
سبتمبر	120.3	246.9	3324	168.2	1528
أكتوبر	105.5	271.3	3304	173.7	1420
نوفمبر	92.5	259.5	2892	153.7	1119
ديسمبر	83.7	250.9	2947	163.0	1013

الفصل السابع عشر -

الأرقام القياسية

الرقم القياسي :

الرقم القياسي هو مقياس إحصائي مصمم لظهور التغيرات في متغير أو مجموعة مرتبطة من المتغيرات بالنسبة للزمن ، المكان الجغرافي ، أو أى خاصية أخرى مثل الدخل ، الوظيفة ، وغير ذلك . وتسمى أحيانا المجموعة من الأرقام القياسية لسنوات أو أماكن مختلفة ، وما إلى ذلك ، بالسلسلة القياسية .

تطبيقات الأرقام القياسية :

باستخدام الأرقام القياسية يمكننا ، على سبيل المثال ، مقارنة الغذاء أو تكاليف المعيشة الأخرى في أحد المدن خلال سنة معينة بذلك خلال سنوات سابقة أو يمكن مقارنة إنتاج الصلب خلال سنة معينة في أحد مناطق البلدة بالإنتاج في منطقة أخرى . وعلى الرغم من أن الأرقام القياسية تستخدم أساسا في الأعمال والاقتصاد ، فإنه يمكن تطبيقها في مجالات كثيرة مختلفة . ففي مجال التعليم ، على سبيل المثال ، نستخدم الأرقام القياسية لمقارنة ذكاء الطلبة في مناطق مختلفة أو سنوات مختلفة .

كثير من الوكالات الحكومية والخاصة تقوم بحساب أرقام قياسية أو أدلة كما تسمى في أغلب الأحيان ، وذلك بهدف التنبؤ بأحوال الأعمال والاقتصاد ، وكذلك الحصول على معلومات عامة ، وما إلى ذلك . فثلا هناك الأرقام القياسية للأجور ، الأرقام القياسية للإنتاج ، الأرقام القياسية للبطالة وغير ذلك . ومن أكثر الأرقام المعروفة الرقم القياسي لتكاليف المعيشة أو الرقم القياسي للمستهلك والذي يعده مكتب إحصاءات العمل . وفي كثير من عقود العمل يظهر شرط معين للتدرج والذي بمقتضاه تعطى زيادة تلقائية في الأجور مقابلة للزيادة في الرقم القياسي لتكاليف المعيشة .

في هذا الفصل سنهتم أساسا بالأرقام القياسية التي تظهر التغيرات بالنسبة للزمن ، على الرغم من أن الطرق التي ستشرح يمكن تطبيقها على الحالات الأخرى .

مناسيب الأسعار :

من أبسط الأمثلة للرقم القياسي هو منسوب السعر ، وهو نسبة السعر لسليقة واحدة في فترة المقارنة إلى سعرها في فترة أخرى تسمى بفترة الأساس أو فترة الاسناد . وللتسهيل سوف نفترض أن الأسعار ثابتة لأى فترة . فإذا لم يكن هذا صحيحا فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم للفترة حتى نجعل هذا الفرض صحيحا .

إذا كانت p_0 تمثل سعر السلعة خلال فترة الأساس و p_n سعرها خلال فترة المقارنة ، فإنه بالتعريف .

$$(1) \quad \text{منسوب السعر} = \frac{p_n}{p_0}$$

ويعبر عنه بشكل عام في صورة نسبة مئوية بضربه في 100

وبشكل أكثر عمومية إذا كانت p_a ، p_b هي أسعار سلعة خلال الفترات a ، b على الترتيب ، فإن منسوب السعر في الفترة b بالنسبة للفترة a يعرف بأنه p_b/p_a ويرمز له بالرمز $p_{a/b}$ ، وسنجد أن هذا الرمز مفيد فيما بعد . بهذا الرمز فإن منسوب السعر بالمعادلة (1) يمكن أن يرمز له بالرمز $p_{0/n}$.

مثال ١ : افترض أن أسعار المستهلكين لعنصر معين في السنوات 1960 ، 1955 هي 30 ، 52 بنسأ جديدا على الترتيب . فإذا أخذنا 1955 كسنة أساس و 1960 سنة المقارنة ، فإن

$$120\% \cdot 1.2 = \frac{30 p}{25 p} = \frac{\text{السعر في 1960}}{\text{السعر في 1955}} = p_{1955|1960} = \text{منسوب السعر}$$

أو باختصار 120 ، بحذف علامة % كما هو متبع غالبا في المؤلفات الإحصائية . هذه النتيجة تعني ببساطة أن سعر العنصر سنة 1960 أصبح % 120 من سعره في سنة 1955 أى زاد بنسبة % 20 .

مثال ٢ : بأخذ 1960 كسنة أساس و 1955 هي سنة المقارنة في المثال ١ ، فإن

$$83\frac{1}{3}\% = \frac{5}{6} = \frac{25 p}{30 p} = \frac{\text{السعر في 1955}}{\text{السعر في 1960}} = p_{1960|1955} = \text{منسوب السعر}$$

أو باختصار $83\frac{1}{3}$ وهذا يعنى أنه في 1955 كان سعر العنصر هو $83\frac{1}{3}\%$ من سعره في 1960 ، أى أنه كان ينقص بنسبة $16\frac{2}{3}\%$.

لاحظ أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة سيكون دائما 100% أو 100 . وعلى وجه الخصوص فإن منسوب السعر المقابل لفترة الأساس يصبح دائما 100 . وهذا يوضح الرمز الذى يستخدم غالبا في المؤلفات الإحصائية بكتابة ، على سبيل المثال ، $1955 = 100$ للإشارة إلى أن سنة 1955 أخذت كسنة أساس .

خصائص مناسيب أسعار :

إذا كانت p_a ، p_b ، p_c ، ... تعبر عن أسعار الفترات a ، b و c ... على الترتيب ، فإن الخصائص التالية تتحقق لمناسيب الأسعار المرتبطة بها . الإثباتات تحصل عليها مباشرة من التعاريف .

١ — خاصية التطابق : $p_{a|a} = 1$

وهذه تقرر ببساطة أن منسوب السعر لفترة معينة بالنسبة لنفس الفترة تساوى 1 أو 100% .

٢ — خاصية الانعكاس في الزمن : $p_{a|b} p_{b|a} = 1$ or $p_{a|b} = \frac{1}{p_{b|a}}$

وهذه تقرر أنه إذا أحلنا فترتين كلا محل الأخرى ، فإن مناسيب الأسعار المقابلة تكون كل منها معكوس الأخرى .

٣ — خاصية الدورية أو الدائرية : $p_{a|b} p_{b|c} p_{c|a} = 1$ و $p_{a|b} p_{b|c} p_{c|d} p_{d|a} = 1$.

٤ — خاصية الدورية أو الدائرية المعجلة : $p_{a|b} p_{b|c} = p_{a|c}$ و $p_{a|b} p_{b|c} p_{c|d} = p_{a|d}$

وهذه نحصل عليها مباشرة من الخاصيتين ٢ ، ٣ .

مناسيب الكمية أو الحجم :

بدلا من مقارنة أسعار السلعة ، قد نهم بمقارنة كميات أو أحجوم السلعة ، مثل كمية أو حجم الانتاج ، الاستهلاك ، التصدير ، وغيرها . في مثل هذه الحالات نتكلم عن مناسيب الكمية أو مناسيب الحجم للتسهيل ، كما في حالة الأسعار ، نفترض أن الكميات ثابتة في أى فترة . إذا لم يكن هذا صحيح ، فإنه يمكن استخدام متوسط ملائم لجعل هذا الفرض ممكنا .

إذا كانت q_0 تعبر عن كمية أو حجم السلعة المنتجة ، المستهلكة ، المصدرة وغير ذلك خلال فترة الأساس ، بينما q_n تعبر عن كمية الانتاج ، الاستهلاك وغير ذلك المقابلة ، خلال فترة المقارنة ، فإننا نعرف .

$$(٢) \quad \text{منسوب الكمية أو الحجم} = \frac{q_n}{q_0}$$

ويمبر عنها بصفة عامة في شكل نسب مئوية .

كما في حالة مناسيب السعر ، فإننا نستخدم الرمز $q_{a|b} = q_b/q_a$ للتعبير عن منسوب السعر في الفترة b بالنسبة للفترة a نفس الملاحظات التي تتعلق بمناسيب السعر تنطبق على مناسيب الكمية .

مناسيب القيمة :

إذا كان p هو سعر السلعة خلال فترة ما و q هي الكمية أو الحجم المنتج ، المباع ، وغير ذلك ، خلال الفترة ، إذن pq تسمى القيمة الاجمالية . بهذا فإذا بيعت 1000 وحدة بسعر 30 بنما جديدا لكل وحدة فإن القيمة الاجمالية هي $\text{£}300 = (1000) (0.30)$.

إذا كانت p_0 تعبر عن السعر و q_0 عن الكمية لسلعة خلال فترة الأساس بينما p_n تعبر عن السعر المقابل و q_n الكمية المقابلة خلال الفترة المعطاة ، كذلك فإن القيمة الاجمالية خلال هذه الفترات هي v_0 لفترة الأساس و v_n لفترة المعطاة ، فإننا نعرف .

$$(٣) \quad \text{منسوب القيمة} = \frac{p_n q_n}{p_0 q_0} = \left(\frac{p_n}{p_0}\right) \left(\frac{q_n}{q_0}\right)$$

نفس التعليقات ، الرموز والخصائص التي تتعلق بمناسيب السعر والقيمة يمكن أن تنطبق على مناسيب القيمة .

وعلى وجه الخصوص إذا كانت $p_{a|b}$ تعبر عن منسوب السعر و $q_{a|b}$ عن منسوب الكمية و $v_{a|b}$ عن منسوب القيمة لفترة b بالمقارنة بالفترة a ، بهذا ، كما في المعادلة (٣)

$$v_{a|b} = p_{a|b} q_{a|b}$$

والذي يسمى خاصية الانعكاس في المعامل .

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

إذا كانت p_1, p_2, p_3, \dots تمثل الأسعار خلال الفترات المتتالية 1, 2, 3, ... إذن $p_1/p_2, p_2/p_3, \dots$ تمثل مناسيب الأسعار لكل فترة زمنية بالمقارنة بالفترة الزمنية السابقة لها وتسمى بمناسيب الوصلات .

مثال ١ : إذا كانت أسعار سلعة خلال السنوات 1953 ، 1954 ، 1955 ، 1956 هي 8 ، 12 ، 15 ، 18 سنت على الترتيب ، فإن الوصلات النسبية هي

$$p_{1953|1954} = 12/8 = 150(\%), p_{1954|1955} = 15/12 = 125(\%), p_{1955|1956} = 18/15 = 120(\%)$$

يمكن التعبير دائما عن مناسيب الأسعار لفترة معينة بالمقارنة بفترة الأساس بدلالة وصلة المناسيب . هذا فعل سبيل

$$p_{512} = p_{514} p_{413} p_{312}$$

المثال

مثال ٢ : من المثال ١ ، منسوب السعر لسنة 1956 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 هو

$$P_{1953|1956} = P_{1953|1954} \cdot P_{1954|1955} \cdot P_{1955|1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = \frac{18}{8} = 225(\%)$$

مناسيب السعر بالنسبة لفترة أساس ثانية ، والتي كما سبق أن أوضحنا يمكن أن نحصل عليها باستخدام وصلة المناسيب ، تسمى أحيانا بسلسلة المناسيب بالنسبة لهذا الأساس ، أو المناسيب مسلسلة إلى أساس ثابت .

مثال ٣ : في الأمثلة ١ ، ٢ مجموعة سلسلة المناسيب للسنوات 1956 ، 1955 ، 1954 بالمقارنة بسنة الأساس 1953 تعطى كما يلي :

$$P_{1953|1954} = \frac{12}{8} = 150(\%)$$

$$P_{1953|1955} = P_{1953|1954} \cdot P_{1954|1955} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} = 187.5(\%)$$

$$P_{1953|1956} = P_{1953|1955} \cdot P_{1955|1956} = \frac{12}{8} \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{18}{15} = 225(\%)$$

الأفكار السابقة قابلة للتطبيق أيضا في حالة مناسيب الكميات ومناسيب القيمة .

المشاكل المتعلقة بحساب الأرقام القياسية :

في نواحي التطبيق الفعلي لانهم بدرجة كبيرة بالمقارنة بين أسعار ، كميات أو قيم سلع بمفردها بقدر اهتمامنا بالمقارنة بين مجموعات كبيرة من هذه السلع . على سبيل المثال ، عند حساب الرقم القياسي لنفقات المعيشة لانهم فقط بأسعار اللبن في فترة واحدة بالمقارنة بفترة أخرى ولكن نرغب أيضا في مقارنة أسعار البيض ، اللحم ، الخبز الإيجار والملابس وغيرها . بحيث يمكن أن نحصل على صورة عامة . وبالطبع يمكن وضع قائمة بمناسيب أسعار كل السلع . ولكن هذا لا يعد مرضيا . فأنرغب فيه هو رقم قياسي واحد والذي يمكن أن يقارن الأسعار في الفترتين في المتوسط .

وليس من الصعب التنبؤ بأن حسابات الأرقام القياسية المتضمنة مجاميع من السلع تتضمن كثيرا من المشاكل التي يجب حلها . فثلا عند حساب ، الرقم القياسي لتكاليف المعيشة ، على سبيل المثال ، فيجب أن نقرر ما هي السلع التي يجب أن تدخل ضمن الرقم وكذلك كيفية ترجيحها بما تتناسب مع أهميتها النسبية . فيجب أن نجمع بيانات تتعلق بأسعار وكميات هذه السلع . كذلك فإننا نواجه بمشكلة التعرف في حالة وجود درجات مختلفة لنفس النوع من السلع ، أو ماذا نفعل في حالة ما إذا كانت بعض أنواع من المواد أو الآلات متاحة في أحد السنوات ولكنها لم تكن موجودة في سنة الأساس . وفي النهاية يجب أن نقرر كيف نضع هذه المعلومات معا بحيث ننهي بالحصول على رقم قياسي واحد لتكلفة المعيشة له دلالة عملية .

استخدام المتوسطات :

بما أننا يجب أن نصل إلى رقم قياسي واحد يلمخص كمية كبيرة من المعلومات ، فإنه من السهل التحقق من أن المتوسطات ، مثل تلك التي درست في الفصل الثالث ، تلعب دورا مهما في حساب الأرقام القياسية .

وكما أن هناك طرقا عديدة موجودة لحساب المتوسطات ، فإن هناك طرقا كثيرة لحساب الأرقام القياسية ، لكل منها مزاياه وعيوبه .

فيما يلي سوف نقوم باختيار عدد قليل من الطرق الشائعة الاستخدام في النواحي العملية مستخدمين أنماطا عديدة من طرق المتوسطات . وعلى الرغم من أننا سنتنصر على الأرقام القياسية للأسعار أولا ، فإننا سوف نوضح كيف يمكن بسهولة تعديلها لتطبيق في حالة الكمية أو القيمة .

الاختبارات النظرية للأرقام القياسية :

من المستحب من الناحية النظرية أن تحقق الأرقام القياسية لمجموعات من السلع الخواص التي تحققها المناسب (أى الأرقام القياسية لسلمة واحدة) . وأى رقم قياسى له خاصية معينة يذكر عنه أنه يحقق الاختبار المرتبط بهذه الخاصية . بهذا ، فعل سبيل المثال ، الأرقام القياسية التي لها خاصية الانعكاس في الزمن يقال عنها أنها تحقق اختبار الانعكاس في الزمن ، وهكذا .

ولم يكتشف رقم قياسى للأن يمتق كل الاختبارات ، على الرغم من أنه في كثير من الحالات تتحقق هذه الاختبارات تقريبا . يحقق رقم فيشر المثال (صفحة ٥٠٢) على وجه الخصوص اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الانعكاس في المعامل ، وهذا يقترب من أى رقم قياسى نافع آخر من تحقيق الخصائص التي تعتبر مهمة ، ومنها جاءت تسمية «المثال» . ومن وجهة النظر العملية ، يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى كذلك وسوف نقوم باختبار بعضها .

رموز :

من المعتاد استخدام الرموز $p_n^{(1)}, p_n^{(2)}, p_n^{(3)}, \dots$ للتعبير عن أسعار السلعة الأولى ، الثانية والثالثة ، خلال الفترة المعنية n . الأسعار المقابلة خلال فترة الأساس يرمز لها بالرموز $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, p_0^{(3)}$. ولهم جرا . الأرقام $1, 2, 3, \dots$ هي أدلة ويجب ألا تثير اللبس مع الأسس . بهذه الرموز فإن سعر السلعة في خلال الفترة n يمكن الإشارة إليها بالصورة $p_n^{(i)}$

وكما في الفصول السابقة ، نستخدم رمز التجميع على الدليل i . على سبيل المثال ، بافتراض أن هناك مجموعة N من السلع ،

فإن مجموع أسعارها خلال الفترة n يمكن كتابته على الشكل $\sum p_n^{(i)}$ أو $\sum_{i=1}^N p_n^{(i)}$ ومن الأسهل حذف الأدلة معا

وكتابة $\sum p_n$ ، وهو ما سوف نتبعه إذا لم يؤد هذا إلى أى التباس . ويجب أن نحتفظ نصب أعيننا بحقيقة أننا نستخدم مجموعة متكاملة من الرموز ، فهذه الرموز ، فإن $\sum p_0$ تعبر عن الأسعار لجميع السلع خلال فترة الأساس . ونستخدم رموزا مماثلة للكميات والقيم .

الطريقة التجميعية البسيطة :

في هذه الطريقة لحساب الرقم القياسى للأسعار ، فإننا نعب عن مجموع أسعار السلع في سنة المقارنة كنسبة مئوية من مجموع أسعارها في سنة الأساس .

$$(4) \quad \text{الرقم القياسى التجميعى البسيط} = \frac{\sum p_n}{\sum p_0}$$

حيث $\sum p_0$ = مجموع أسعار السلع في سنة الأساس

$\sum p_n$ = المجموع المقابل لأسعار السلع في سنة المقارنة .

حيث يعبر عن النتيجة كنسبة مئوية كما هو بالنسبة للأرقام القياسية بشكل عام .

وعلى الرغم من أن هذه الطريقة لها الميزة بأنها سهلة التطبيق ، إلا أن لها عيبين كبيرين يجعل استخدامها غير مستحب .

١ - لا تؤخذ في الحسبان الأهمية النسبية للسلع المختلفة . فمثلا طبقا لهذه الطريقة ، فإن أوزانا متساوية تمنى أن نفس الأهمية سوف تعطى للألبان وللمعجون الخلاقة عند حساب الرقم القياسى لتكلفة المعيشة .

٢ - الوحدات المستخدمة في تمييز السعر ، مثل ، الجرام ، وغيرها . تؤثر على قيمة الرقم القياسى . أنظر المسألة ١٧-١٢ .

الوسط البسيط لمناسيب :

في الطريقة هناك عديد من الصيغ تعتمد على الطريقة المستخدمة في الحصول على أوساط مناسيب الأسعار ، مثل الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي ، الوسط التوافقي ، الوسيط ، وما إلى ذلك . فإذا استخدمنا الوسط الحسابي ، على سبيل المثال فإننا نحصل على .

$$(٥) \quad \frac{\sum p_n/p_o}{N} = \text{الوسط الحسابي البسيط للرقم القياسي لمناسيب الأسعار}$$

حيث $\sum p_n/p_o$ = مجموع مناسيب أسعار جميع السلع .

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخدمة

للأرقام القياسية باستخدام أنواع أخرى من الأوساط ، أنظر المسائل ١٧-١٤ ؛ ١٧-١٥ .
وعلى الرغم من أن هذه الطريقة تتخلص من العيب الثاني الموجود في الطريقة التجميعية البسيطة ولكن يظل العيب الأول موجوداً بها .

الطريقة التجميعية المرجحة :

للتغلب على عيوب الطريقة التجميعية البسيطة ، فإننا ترجح أسعار كل سلعة باستخدام معامل ملائم ويستخدم غالباً كمية أو حجم السلعة المباعة خلال فترة الأساس ، أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية (والتي قد تتضمن متوسط عدد من السنوات) هذه الأوزان تشير إلى أهمية السلعة المعنية . وهناك ثلاث صيغ ممكنة تعتمد على ما إذا كنا سنستخدم كميات سنة الأساس أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية ونعبر عنها بالرموز q_o و p_n و q_t على الترتيب .

١ - رقم لاسبيرز القياسي أو طريقة سنة الأساس :

$$(٦) \quad = \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات سنة الأساس}$$

٢ - رقم باش القياسي أو طريقة سنة المقارنة :

$$(٧) \quad = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات سنة المقارنة}$$

٣ - طريقة السنة النموذجية :

إذا اعتبرنا أن q_t تعبر عن وزن الكمية خلال فترة نموذجية ، فإننا نعرف .

$$(٨) \quad = \frac{\sum p_n q_t}{\sum p_o q_t} \quad \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام كميات السنة النموذجية}$$

عندما تكون $t = n$ و $t = 0$ فإن هذه الصيغة تتحول إلى الصيغة (٦) والصيغة (٧) على الترتيب .

رقم فيشر المثالي :

نعرف

$$(٩) \quad \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n}\right)} \quad \text{الرقم القياسي المثالي لفيشر}$$

وهذا الرقم القياسي هو الوسط الهندسي للرقمين القياسيين لكل من لاسبيرز وباش الموضحين بالمعادلتين (٦) و (٧) وكما سبق أن أوضحنا فإن رقم فيشر المثالي يحقق كلا من اختباري الانعكاس في الزمن والانعكاس في المعامل ، وهذا مما يعطيه بعض المزايا النظرية عن الأرقام القياسية الأخرى .

رقم مارشال - أدجورث القياسي :

يستخدم رقم مارشال - أدجورث القياسي الصيغة التجميعية المرجحة باستخدام طريقة السنة النموذجية حيث الأوزان هي الوسط الحسابي لكميات سنة الأساس وكميات سنة المقارنة . أى $q_t = \frac{1}{2} (q_0 + q_n)$. وبالتعميم بهذه القيمة q_t في المعادلة (٨) ، نحصل على .

$$(١٠) \quad \text{رقم مارشال - أدجورث القياسي للأسعار} = \frac{\sum p_n(q_0 + q_n)}{\sum p_0(q_0 + q_n)}$$

الوسط البسيط للمناسيب :

التغلب على العيوب في طريقة الوسط البسيط للمناسيب فيمكن أن نستخدم متوسطاً مرجحاً للمناسيب . والوسط المرجح الأكثر شيوعاً في هذا المجال هو الوسط الحسابي المرجح ، على الرغم من أنه يمكن استخدام أوساط مرجحة أخرى مثل الوسط الهندسي المرجح (الفصل الثالث) .

في هذه الطريقة نرجح كل منسوب سعر بالقيمة الإجمالية للسلعة وذلك بدلالة بعض الوحدات النقدية مثل الدولار . وبما أن قيمة السلعة نحصل عليها بضرب السعر p للسلعة في الكمية q ، فإن الأوزان تعطى بالصيغة pq .

وهناك ثلاث صيغ يمكن استخدامها وهذه تعتمد على ما إذا كنا نستخدم قيم سنة الأساس ، أو سنة المقارنة أو سنة نموذجية ، ويعبر عن ذلك بالرموز $p_0 q_0$ و $p_n q_n$ و $p_t q_t$ على الترتيب .

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان .

$$(١١) \quad = \frac{\sum (p_n/p_0)(p_0 q_0)}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0}$$

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$(١٢) \quad = \frac{\sum (p_n/p_0)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n}$$

الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة نموذجية كأوزان

$$= \frac{\sum (p_n/p_0)(p_t q_t)}{\sum p_t q_t}$$

لاحظ أن المعادلة (١١) تعطى نفس نتيجة صيغة لاسبيرز المعروفة بالمعادلة (٦) .

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

الصيغة الموضحة أعلاه التي تعرف الأرقام القياسية للأسعار يمكن بسهولة تعديلها للحصول على الأرقام القياسية للكمية أو الحجم وذلك ببساطة بإبدال p و q . على سبيل المثال ، إبدال p بدلا من q في (٥) ينتج

$$(١٤) \quad \frac{\sum q_n/q_0}{N} = \text{الوسط الحسابي البسيط للرقم القياسي لمناسيب الكميات}$$

حيث $\sum q_n/q_0$ = مجموع مناسيب كميات جميع السلع

N = عدد مناسيب أسعار السلع المستخدمة

وبالمثل ، الصيغ (٦) و (٧) تصبح

$$(١٥) \quad \frac{\sum q_n p_o}{\sum q_o p_o} = \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان}$$

وهذا يسمى أحياناً برقم لاسيرز القياسي للكميات

$$(١٦) \quad \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_o p_n} = \text{الرقم القياسي التجميعي المرجح باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان}$$

وهذا يسمى أحياناً برقم باش القياسي للكميات .

في هذه الصيغ الأوزان المستخدمة هي الأسعار . وعلى أية حال ، فإنه يمكن استخدام أى أوزان أخرى ملائمة بدلا من الأسعار .
الصيغ من (٨) إلى (١٣) يمكن كذلك تعديلها بنفس الأسلوب .

الأرقام القياسية للقيم :

كما حصلنا بالضبط على صيغ الأرقام القياسية للأسعار وللقيم ، فإنه يمكن أن نحصل على صيغ للأرقام القياسية للقيم . وأبسط هذه الأرقام هو

$$(١٧) \quad \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

حيث $\sum p_o q_o$ = القيمة الإجمالية لجميع السلع في فترة الأساس

$\sum p_n q_n$ = القيمة الإجمالية لجميع السلع في فترة المقارنة .

وهذا رقم قياسي تجميعي بسيط ، حيث أن القيم لم ترجح . ويمكن صياغة صيغ أخرى حيث نستخدم الأوزان للدلالة على الأهمية النسبية للعناصر .

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

من الناحية العملية من المستحب أن تكون فترة الأساس المستخدمة للمقارنة هي فترة ثبات اقتصادي وليست على مسافة زمنية بعيدة في الماضي . بهذا قد يكون ضرورياً من فترة إلى أخرى تغيير فترة الأساس .

أحد الحلول هو إعادة حساب جميع الأرقام القياسية باستخدام فترة الأساس الجديدة . كطريقة تقريبية مبسطة نقوم بقسمة جميع الأرقام القياسية للسنوات المختلفة المقابلة لفترة الأساس القديمة على الرقم القياسي .

المقابل لفترة الأساس الجديدة ، والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . هذه النتائج تمثل الأرقام القياسية الجديدة . والرقم القياسي لفترة الأساس الجديدة يصبح 100 % كما يجب أن يكون .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة قابلة للتطبيق فقط في حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية (أنظر المسألة ١٧ - ٣٧) . وعلى أية حال ، فإنه من حسن الحظ أن كثيراً من أنواع الأرقام القياسية تعطى أساليبها نتائج تمد من الناحية العملية قريبة بدرجة كافية مما يجب أن نحصل عليه من الناحية النظرية .

الانكماش في السلاسل الزمنية :

على الرغم من أن دخول الأفراد قد ترتفع من الناحية النظرية خلال فترة من السنوات ، إلا أن دخولهم الحقيقية قد تنخفض من الناحية الفعلية وذلك نظراً لارتفاع تكلفة المعيشة وبالتالي انخفاض القوة الشرائية . ونحصل على الدخول الحقيقية وذلك بقسمة الدخول المادية أو الظاهرة للسنوات المختلفة على الرقم القياسي لتكلفة المعيشة أو الأرقام القياسية للمستهلك للسنوات ، باستخدام فترة أساس ملائمة .

على سبيل ، إذا كان دخول الفرد 1960 هو 150% من دخله 1950 (أى زاد بنسبة 50%) بينا الرقم القياسى لتكلفة المعيشة تضاعف فى خلال نفس الفترة ، فإن دخل الفرد الحقيقى سنة 1960 هو $75\% = 150 / 2$ ، ما كان عليه 1950 .

شرحنا سالفاً عملية « إنقاص » السلسلة الزمنية المتضمنة دخولا . ويمكن استخدام عمليات ماثلة لإنقاص السلاسل الزمنية الأخرى . فى الفصل السادس عشر ، على سبيل المثال ، استخدمنا أسلوباً مشابهاً فى تخلص البيانات من أثر الموسم باستخدام الدليل الموسمى .

ومن الناحية الرياضية ، فإن هذه الطريقة المستخدمة فى تخلص السلسلة الزمنية من أثر الانكماش تكون قابلة للتطبيق بالضبط فقط إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس فى المعامل ، ولهذا السبب فإن رقم فيشر المثلث يعد مناسباً ، وعلى أية حال فإنه يمكن استخدام أرقام قياسية أخرى بما أنها تعطى نتائج تعد صحيحة لأغلب الأغراض العملية .

مسائل محلولة

مناسيب الأسعار :

١٧ - ١ متوسط أسعار التجزئة بالدولار للطن من القمح البتيومونى المباع فى بلد معين خلال السنوات 1958 — 1953 موضح بالجدول ١٧ - ١ (أ) باستخدام 1953 كأساس ، أوجد مناسيب الأسعار المقابلة للسنوات 1956 و 1958 .
(ب) باستخدام 1956 كأساس ، أوجد منسوب السعر المقابل لجميع السنوات المعطاة (ت) باستخدام 1955 — 1953 كأساس ، أوجه منسوب السعر لجميع السنوات المعطاة .

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط سعر التجزئة للقمح البتيومونى (بالدولارات للطن)	14.95	14.94	15.10	15.65	16.28	16.53

الحل :

(أ) منسوب السعر لسنة 1956 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$104.7\% \quad 1.047 = \frac{15.65}{14.95} = \frac{\text{السعر فى 1956}}{\text{السعر فى 1953}} = P_{1953|1956}$$

منسوب السعر لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس

$$110.6\% \quad 1.106 = \frac{16.53}{14.95} = \frac{\text{السعر فى 1958}}{\text{السعر فى 1953}} = P_{1953|1958}$$

فى الدراسات الإحصائية من المعتاد حذف علامة % عند ذكر الأرقام القياسية ، على أساس أن هذه العلامات مفهومة . بهذا التسهيل فإن المناسيب السابقة تكتب 104.7 و 110.6 على الترتيب .

(ب) بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ - ١ على 15.65 (دولار) ، السعر لسنة 1956 . فإن مناسيب الأسعار مبرأ عنها بنسب مئوية هى كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٢ .

جدول ١٧ - ٢

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر (1956 = 100)	95.5	95.5	96.5	100.0	104.0	105.6

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتوموني في السنوات 1953 — 1958 وتسمى المجموعة كلها بسلسلة الأرقام القياسية . لاحظ أن منسوب السعر (أو الرقم القياسي للسعر) المقابل لسنة 1956 في صيغة نسبة مئوية يساوي 100.0 كما هو دائماً صحيح لفترة الأساس . وهذه يعبر عنها في الدراسات الإحصائية بالرمز 1956 = 100 .

$$(ج) \text{ الوسط الحسابي لأسعار السنوات } 1956 = 1000 = \frac{\$14.95 + \$14.94 + \$15.10}{3} = \$15.00$$

بقسمة كل من أسعار التجزئة بالجدول ١٧ - ١ على متوسط سعر فترة الأساس وهو \$ 15.00 . فإن مناسيب الأسعار المطلوبة معبراً عنها كنسبة مئوية موضحة بالجدول ١٧ - ٣ .

جدول ١٧ - ٣

السنة	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب السعر (1953 = 100)	99.7	99.6	100.7	104.3	108.5	110.2

وهذه تمثل الأرقام القياسية لأسعار التجزئة للفحم البتوموني للدراسات 1953 — 1955 باستخدام 1953 — 1955 كفترة أساس . لاحظ أن الوسط الحسابي للأرقام القياسية المقابل لفترة الأساس 1953 — 1955 هو $(99.7 + 99.6 + 100.7)/3 = 100.0$ ، كما هو صحيح دائماً بالنسبة لفترة الأساس . وهذه يرمز لها في الدراسات الإحصائية بالصيغة 1953 — 1955 = 100 .

$$١٧ - ٢ \text{ أثبت أن (أ) } p_{a|b} p_{b|c} = p_{a|c} \quad (ب) \quad p_{a|b} p_{b|a} = 1$$

الحل :

$$(أ) \text{ بالتعريف } p_{a|b} p_{b|c} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_c}{p_b} = \frac{p_c}{p_a} = p_{a|c}$$

$$(ب) \text{ بالتعريف } p_{a|b} p_{b|a} = \frac{p_b}{p_a} \cdot \frac{p_a}{p_b} = 1$$

١٧ - ٣ باستخدام الجدول ١٧ - ٣ بالمسألة ١٧ - ١ (ج) حيث 1953 — 1955 أساس ، أوجد مناسيب الأسعار بأخذ 1956 كأساس .

الحل :

اقسم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٣ على منسوب السعر 104.3 المقابل لسنة 1956 . الأرقام الناتجة معبراً عنها كنسب مئوية هي مناسيب السعر المطلوبة وهي مطواة ، بها بعض من أخطاء التقريب ، بالجدول ١٧ - ٢ بالمسألة ١٧ - ٢ (ب) .

هذا المثال يوضح أنه إذا كان لدينا سلسلة من الأرقام القياسية مقابلة لفترة أساس معينة ، فإنه يمكن أن نحصل على سلسلة من الأرقام القياسية المقابلة لفترة أساس أخرى بدون استخدام بيانات الأسعار الأصلية . وهذه العملية تسمى بتغيير فترة الأساس . لإثبات الطريقة المستخدمة هنا (أنظر المسألة ١٧ - ٣٦)

١٧ - ٤ في 1956 كان متوسط سعر سلعة أكبر بنسبة 20% منه عن 1955 وأقل بنسبة 20% عن 1954 وأكبر بنسبة 50% عن 1957 اختصر البيانات إلى مناسيب أسعار مستخدماً كسنة أساس (أ) 1955 ، (ب) 1956 ، (ج) 1954 — 1955

الحل :

(أ) بأخذ 1955 أساس ، فإن منسوب السعر (أو الرقم القياسي) المقابل لها هو 100 (بالرموز $100 = 1955$ أو 100%) .

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أكبر من 1955 فإن منسوب السعر المقابل لسنة 1956 هو $100 + 20 = 120$ أى ، السعر سنة 1956 هو 120% من السعر سنة 1955 .

بما أن السعر سنة 1956 هو 20% أقل من 1954 ، فيجب أن يكون $100 - 20 = 80\%$ من سعر 1954 بهذا فإن سعر 1954 هو $125\% = \frac{5}{4} = \frac{1}{0.80}$ من السعر 1956 ، أى ، منسوب سعر 1954 يساوى 125% من منسوب سعر 1956 أى 125% من 120 يساوى 150 .

بما أن السعر سنة 1956 هو 50% أكبر من 1957 ، فيجب أن يكون $100 + 50 = 150\%$ من سعر 1957 بهذا فإن سعر 1957 هو $\frac{2}{3} = \frac{1}{1.50}$ من سعر 1956 ، أى منسوب سعر 1957 من منسوب سعر 1956 أى $\frac{2}{3}$ من 120 يساوى 80 .

بهذا فإن مناسيب الأسعار المطلوبة هي كما في الجدول ١٧ - ٤ .

جدول ١٧ - ٤

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1955 = 100)	150	100	120	80

(ب) باستخدام طريقة تغير فترة الأساس المعطاة بالمسألة ١٧ - ٣ . نقوم كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 120 (منسوب السعر المقابل لسنة الأساس الجديدة 1956) ونعبر عن النتيجة كنسبة مئوية . بهذا فإن مناسيب السعر المطلوبة باستخدام سنة الأساس 1956 هي كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٥ .

جدول ١٧ - ٥

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1956 = 100)	125	83.3	100	66.7

ويمكن الحل مباشرة باستخدام الأسلوب المستخدم بالجزء (أ) ، باختيار $100 = 1956$.

(ج) الطريقة الأولى : ، باستخدام الجزء (أ) .

من الجدول ١٧ - ٤ ، الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار لسنة 1954 وسنة 1955 وهو $125 = \frac{150 + 100}{2}$ إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٤ على 125 ، نحصل على مناسيب الأسعار المطلوبة كما هي موضحة بالجدول ١٧ - ٦ .

جدول ١٧ - ٦

السنة	1954	1955	1956	1957
منسوب السعر (1954-1955=100)	120	80	96	64

الطريقة الثانية : ، باستخدام الجزء (ب)

من الجدول ١٧-٤ ، الوسط الحسابي لمناسيب الأسعار لسنة 1954 وسنة 1955 هو $\frac{1}{2}(125+83.3)=104.2$ ، إذن بقسمة كل منسوب سعر بالجدول ١٧ - ٥ على 104.2 ، نحصل على نفس نتائج الطريقة الأولى .

مناسيب الكمية أو الحجم :

١٧ - ٥ الجدول ١٧ - ٧ يوضح بيانات إنتاج القمح ، في أحد البلاد ، بملايين الترات للسنوات 1950 - 1958 . اختصر البيانات إلى مناسيب كيات مستخدماً كأساس (أ) 1955 (ب) 1953 - 1950

جدول ١٧ - ٧

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
إنتاج القمح (بملايين الترات)	1019	988	1306	1173	984	935	1004	951	1462

الحل :

(أ) بقسمة أرقام الإنتاج في كل سنة على 935 (رقم الإنتاج في سنة الأساس) ، فإن مناسيب الكمية المطلوبة (أو الأرقام القياسية للكميات) للسنوات المختلفة معبراً عنها كنسب مئوية موضحة بالجدول ١٧ - ٨ .

جدول ١٧ - ٨

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1955=100)	109.0	105.7	139.7	125.5	105.2	100.0	107.4	101.7	156.4

(ب) الوسط الحسابي للإنتاج للسنوات 1950 - 1953 هو (٤٠)

بقسمة رقم الإنتاج في كل سنة على 1122 ، فإن مناسيب الكمية المطلوبة معبراً عنها كنسب مئوية هي كما هو موضح بالجدول ١٧ - ٩ .

جدول ١٧ - ٩

السنة	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
منسوب الكمية (1950 - 1953 = 100)	90.8	88.1	116.4	104.5	87.7	83.3	89.5	84.8	130.3

١٧ - ٦ إذا كان منسوب الكمية لسنة 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس هو 105 ، بينما منسوب الكمية لسنة 1958 باستخدام 1953 كأساس هو 140 . أوجد منسوب الكمية لسنة 1953 مستخدماً 1949 كأساس .

الحل :

الطريقة الأولى :

من خصائص مناسيب الكية فإن

$$q_{aib} q_{bic} = q_{aie}$$

إذن $a = 1949, b = 1953, c = 1958$ اعتبر

$$q_{1949/1953} = q_{1949/1958} q_{1958/1953} = (1.05)(1/1.40) = 0.75 = 75\%$$

ومنسوب الكية المطلوب هو 75 .

الطريقة الثانية :

اعتبر q_{1949} تعبر عن الكيات الفعلية لسنة 1949 ، q_{1953} لسنة 1953 و q_{1958} لسنة 1958 إذن

$$= \frac{q_{1958}}{q_{1949}} = 105\% = 1.05 \quad \text{منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس}$$

$$= \frac{q_{1958}}{q_{1953}} = 140\% = 1.40 \quad \text{منسوب الكية لسنة 1958 باستخدام سنة 1953 كأساس}$$

بهذا فإن منسوب الكية لسنة 1953 حيث 1949 هي سنة الأساس يكون

$$\frac{q_{1953}}{q_{1949}} = \frac{q_{1953}/q_{1958}}{q_{1949}/q_{1958}} = \frac{1/1.40}{1/1.05} = \frac{1.05}{1.40} = 75\%$$

الطريقة الثالثة :

بما أن $i_{1958} = 1.05q_{1949} = 1.40q_{1953}$ فإن $\frac{q_{1953}}{q_{1949}} = \frac{1.05}{1.40} = 75\%$. هذا فإن منسوب الكية هو 75 .

مناسيب القيمة :

١٧ - ٧ في يناير 1960 كان مجموع قائمة الأجور بمصنع به 120 عاملا هو \$ 40 000 . في يوليو من نفس العام أضيف 30 عاملا إلى قائمة الأجور ودفع المصنع \$ 6000 أكثر مما دفع في يناير . باستخدام يناير 1960 كأساس . أوجد (أ) الرقم القياسي للعمالة (منسوب الكية) لشهر يوليو ، (ب) الرقم القياسي لتكلفة العمالة (منسوب قيمة) لشهر يوليو (ج) باستخدام النتيجة منسوب السعر \times منسوب الكية = منسوب القيمة ، ماهو التفسير الممكن إعطاءه لمنسوب السعر في هذه المسألة ؟

الحل :

$$(أ) \text{ منسوب الكية = الرقم القياسي للعمالة } \quad \frac{120 + 30}{120} = 1.25 \quad 125\% \text{ or } 125$$

$$(ب) \text{ منسوب القيمة = الرقم القياسي لتكلفة العمالة } \quad \frac{\$40\,000 + \$6\,000}{\$40\,000} = 1.15 = 115\% \text{ or } 115$$

$$(ج) \text{ منسوب السعر = } \frac{\text{منسوب القيمة}}{\text{منسوب الكية}} = \frac{115}{125} = 0.92 = 92\% \text{ or } 92$$

يمكن تفسير هذا كرقم قياسي لتكلفة العامل . هذا يوضح أنه في يوليو 1960 كانت التكلفة للعامل 92% في فترة الأساس يناير 1960 . ويسمى هذا أحياناً بالرقم القياسي لتكلفة العمل .

١٧ - ٨ شركة تتوقع أن تزيد مبيعاتها من سلعة بنسبة 50% في السنة القادمة . ماهي النسبة المثوية التي يجب أن يزداد بها سعر البيع حتى يضاعف الدخل الإجمالي ؟
الحل :

$$\text{منسوب السعر} \times \text{منسوب الكمية} = \text{منسوب القيمة}$$

$$\text{منسوب السعر} \times 150\% = 200\%$$

$$\text{إذن منسوب السعر} = 133\frac{1}{3} \% = \frac{4}{3} \cdot \frac{200}{150} \text{ بحيث يجب أن تزيد سعر البيع بنسبة } 33\frac{1}{3} \% = 100 - 133\frac{1}{3}$$

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧ - ٩ وصلة المناسيب لأسعار السنوات 1960 - 1956 هي 175 ، 120 ، 135 ، 150 ، 125 على الترتيب .
(أ) أوجد منسوب السعر لسنة 1957 حيث سنة الأساس (ب) سلسل وصلة المناسيب إلى 1956 كأساس .

الحل :

$$P_{1955 \parallel 1956} = 1.25, \quad P_{1956 \parallel 1957} = 1.20, \quad P_{1957 \parallel 1958} = 1.35, \quad P_{1958 \parallel 1959} = 1.50, \quad P_{1959 \parallel 1960} = 1.75$$

$$P_{1955 \parallel 1957} = P_{1955 \parallel 1956} P_{1956 \parallel 1957} = (1.25)(1.20) = 1.50 = 150\% \quad (أ)$$

$$P_{1956 \parallel 1955} = \frac{1}{P_{1955 \parallel 1956}} = \frac{1}{1.25} = 80\% \quad (ب)$$

$$P_{1956 \parallel 1956} = 100\% \quad P_{1956 \parallel 1957} = 120\%$$

$$P_{1956 \parallel 1958} = P_{1956 \parallel 1957} P_{1957 \parallel 1958} = (1.20)(1.35) = 1.62 = 162\%$$

$$P_{1956 \parallel 1959} = P_{1956 \parallel 1957} P_{1957 \parallel 1958} P_{1958 \parallel 1959} = (1.20)(1.35)(1.50) = 2.43 = 243\%$$

$$P_{1956 \parallel 1960} = P_{1956 \parallel 1957} P_{1957 \parallel 1958} P_{1958 \parallel 1959} P_{1959 \parallel 1960} = (1.20)(1.35)(1.50)(1.75) = 4.25 = 425\%$$

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧ - ١٠ الجدول ١٧ - ١٠ يوضح متوسط أسعار الجملة في بلد والانتاج من الألبان ، والزبد والجبن للسنوات 1958 ، 1950 ، 1949 . احسب رقم قياسي تجميعي بسيط للأسعار الجملة لمنتجات هذه الألبان لسنة 1958 مستخدماً كأساس (أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 .

جدول ١٧ - ١٠

الكميات المنتجة

(ملايين الكيلوجرامات)

1949	1950	1958
9675	9717	10436
117.7	115.5	115.5
77.93	74.39	82.70

الأسعار (لكل كيلوجرام)

1949	1950	1958	
3.95	3.89	4.13	لبن
61.5	62.2	59.7	زبد
34.8	35.4	38.9	جبن

الحل :

$$(أ) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = \frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة (1958)}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس (1949)}} \\ = \frac{4.13 + 59.7 + 38.9}{3.95 + 61.5 + 34.8} = 102.5(\%)$$

أي أن متوسط أسعار الجملة في 1958 هي 102.5% من تلك في 1949 أو (2.5% أعلى)

$$\begin{aligned} \text{(ب) متوسط (وسط حسابي) أسعار اللبن في فترة الأساس 1949 - 1950} &= \frac{1}{2}(3.95 + 3.89) = 3.92 \\ \text{متوسط (وسط حسابي) أسعار الزبد في فترة الأساس 1949 - 1950} &= \frac{1}{2}(61.5 + 62.2) = 61.85 \\ \text{متوسط (وسط حسابي) أسعار الجبن في فترة الأساس 1949 - 1950} &= \frac{1}{2}(34.8 + 35.4) = 35.1 \end{aligned}$$

$$\text{الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\sum p_n}{\sum p_o} = \frac{\text{مجموع أسعار سنة المقارنة (1958)}}{\text{مجموع أسعار سنة الأساس (1949 - 1950)}} \\ = \frac{4.13 + 59.7 + 38.9}{3.92 + 61.85 + 35.1} = 101.8(\%)$$

لاحظ أن هذه الطريقة لم تستخدم الكميات المنتجة ولكن استخدمت فقط أسعار السلع .
لهدف الإيضاح ، استخدمنا فقط ثلاث سلع لحساب الرقم القياسي . في التطبيق الفعلي يجب أن ندخل عددا أكبر من السلع .

١١ - ١٧ وضع السبب في أن الأرقام القياسية التي حصلت عليها في المسألة ١٧ - ١٠ قد تكون مقاييس غير ملائمة للتغيير في السعر للسلع المذكورة .

الحل :

الرقم القياسي المحسوب بالمسألة ١٧ - ١٠ لم يؤخذ في الاعتبار الأهمية النسبية للسلع كما يجب تحديدها ، على سبيل المثال ، من مدى استخدامها بواسطة المستهلك أو كمية الإنتاج المخصصة لأهداف الاستهلاك . هذه الاعتبارات سوف تراعى في المسائل التالية .

١٢ - ١٧ الجدول ١١-١٧ يوضح متوسط أسعار التجزئة والانتاج من فحم الانتراسيت والبتروول خلال السنوات 1949 و 1958 . وضع السبب في أن رقفاً قياسيياً تجميعياً بسيطاً للأسعار لسنة 1958 مستخدماً سنة 1949 كأساس يعد مقاييساً غير ملائمة لتغيرات الأسعار في السلع المعطاة .

جدول ١١ - ١٧

	الأسعار		الكميات	
	1949	1958	1949	1958
فحم الأنتراسيت	\$20.13	\$28.20	3.559	1.821
	للطن	للطن	مليون طن	مليون طن
البتروول	20.3c	21.4c	80.2	118.6
	لكل لتر	لكل لتر	مليون برميل	• مليون برميل

• كل برميل يحتوي على 159 لتر

الحل :

إذا استخدمنا الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار فإن النتيجة هي

$$139.7(\%) = \frac{\$28.20 + \$0.214}{\$20.13 + \$0.203} = \frac{\text{مجموع الأسعار في سنة المقارنة 1958}}{\text{مجموع الأسعار في سنة الأساس 1949}} = \frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o}$$

مثيراً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع في 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة % 39.7 عنها في سنة 1949 .

إذا عبرنا عن سعر فحم الانثراسيت بدلالة سنتات لكل kg بدلا من دولارات لكل طن ، فإن السعر في 1949 هو $\$20.13(1000 \text{ kg}) = \$2.013c/kg$ بينما السعر في 1958 هو $\$28.20(1000 \text{ kg}) = 2.820c/kg$ في هذه الحالة فإن الرقم القياسي التجميعي البسيط هو

$$\frac{\Sigma p_n}{\Sigma p_o} = \frac{2.820c + 21.4c}{2.013c + 20.3c} = 108.5(\%)$$

موضحاً إلى أن متوسط أسعار التجزئة لهذه السلع في 1958 أكثر ارتفاعاً بنسبة % 8.5 عنها في سنة 1949 .

وبما أن الرقم القياسي التجميعي البسيط شديد التأثر بالوحدات المستخدمة في تمييز الأسعار . فن الواضح أنه مقياس غير ملائم في مثل هذه الحالات . هذا مع إضافة العيب الموضح بالمسألة ١٧ - ١١ يعطى أسباباً جيدة في عدم استخدام هذا الرقم في التطبيق .

الملاحظة التي أبديت في نهاية المسألة ١٧ - ١٠ تنطبق كذلك على هذه المسألة .

الوسط المرجح للمناسيب :

١٧ - ١٢ استخدم طريقة الوسط البسيط للمناسيب (الوسط الحسابي) لحساب الرقم القياسي لأسعار الجملة لمنتجات الألبان بالمسألة ١٧ - ١٠ لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 كأساس .

الحل :

(أ) مناسيب السعر لكل من اللبن ، الزبد والجبن في 1958 باستخدام سنة 1949 كأساس هي مايلي

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن في 1958}}{\text{سعر اللبن في 1949}} = \frac{4.13}{3.95} = 104.6(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الزبد} = \frac{\text{سعر الزبد في 1958}}{\text{سعر الزبد في 1949}} = \frac{59.7}{61.5} = 97.1(\%)$$

$$\text{منسوب سعر الجبن} = \frac{\text{سعر الجبن في 1958}}{\text{سعر الجبن في 1949}} = \frac{38.9}{34.8} = 111.8(\%)$$

$$\frac{\Sigma p_n/p_o}{N} = \frac{104.6 + 97.1 + 111.8}{3} = 104.5(\%) \text{ متوسط (الوسط الحسابي) لمناسيب الأسعار}$$

(ب) بالرجوع إلى المسألة ١٧ - ١٠ (ب) ، مناسيب السعر في 1958 باستخدام 1950 - 1949 كأساس هي :

$$\text{منسوب سعر اللبن} = \frac{\text{سعر اللبن في 1958}}{\text{سعر اللبن في 1949 - 50}} = \frac{4.13}{3.92} = 105.4(\%)$$

$$96.5(\%) = \frac{59.7}{61.85} = \frac{\text{سعر الزبد في 1958}}{\text{سعر الزبد في 1949 - 50}} = \text{منسوب سعر الزبد}$$

$$110.8(\%) = \frac{38.9}{35.1} = \frac{\text{سعر الجبن في 1958}}{\text{سعر الجبن في 1949 - 50}} = \text{منسوب سعر الجبن}$$

$$\frac{\sum p_a/p_a}{N} = \frac{105.4 + 96.5 + 110.8}{3} = 104.2(\%) = \text{متوسط (الوسط الحسابي) لمناسب الأسعار}$$

١٧ - ١٤ حل المسألة ١٧ - ١٣ إذا استخدم الوسيط بدلا من الوسط الحسابي .

الحل :

(أ) الرقم القياسي المطلوب = وسيط مناسيب السعر 111.8 ، 97.1 ، 104.6 ويساوى 104.6

(ب) الرقم القياسي المطلوب = وسيط مناسيب السعر 110.8 ، 96.5 ، 105.4 ويساوى 105.4

١٧ - ١٥ حل المسألة ١٧ - ١٣ إذا استخدم الوسط الهندسي بدلا من الوسط الحسابي .

الحل :

(أ) الرقم القياسي المطلوب = الوسط الهندسي لمناسب السعر 111.8 ، 97.1 ، 104.6

$$= \sqrt[3]{(104.6)(97.1)(111.8)} = 104.3 \text{ باستخدام اللوغاريتمات}$$

(ب) الرقم القياسي المطلوب = الوسط الهندسي لمناسب السعر 110.8 ، 96.5 ، 105.4

$$= \sqrt[3]{(105.4)(96.5)(110.8)} = 104.1 \text{ باستخدام اللوغاريتمات}$$

١٧ - ١٦ استخدم الوسط البسيط (الوسط الحسابي) لمناسب الأسعار للحصول على الرقم القياسي لأسعار التجزئة للسلع الموضحة بالمسألة ١٧ - ١٢ باستخدام 1949 كمسكنة أساس و 1958 كمسكنة مقارنة .

الحل :

$$\text{منسوب السعر للفحم} = \frac{\text{سعر الفحم في 1958}}{\text{سعر الفحم في 1949}} = \frac{\$28.20}{\$20.13} = 140.1(\%)$$

$$\text{منسوب السعر للبترول} = \frac{\text{سعر البترول في 1958}}{\text{سعر البترول في 1949}} = \frac{21.4¢}{20.3¢} = 105.4(\%)$$

$$\text{المتوسط البسيط (الوسط الحسابي) لمناسب الأسعار} = \frac{\sum p_a/p_a}{N} = \frac{140.1 + 105.4}{2} = 122.8$$

لاحظ أن النتيجة لا تعتمد على الوحدات المستخدمة في تمييز الأسعار (قارن بالمسألة ١٧ - ١٢) .

١٧ - ١٧ حل المسألة ١٧ - ١٦ إذا استخدم الوسط الهندسي .

الحل :

الرقم القياسي المطلوب = الوسط الهندسي لمناسب السعر 140.1 و 105.4

$$\sqrt{(140.1)(105.4)} = 121.5$$

الطريقة التجميعية • رقمي لاسبيرز وباش :

١٧ - ١٨ باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٠ احسب رقم لاسبيرز القياسي للسنة 1958 باستخدام

(أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس .

الحل :

(أ) رقم لاسبيرز = الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار باستخدام كيات فترة الأساس كأوزان

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1949})(\text{الأسعار في 1959})}{\Sigma(\text{الكميات في 1949})(\text{الأسعار في 1949})}$$

$$= \frac{(4.13)(9675) + (59.7)(117.7) + (38.9)(77.93)}{(3.95)(9675) + (61.5)(117.7) + (34.8)(77.93)} = 103.84, \text{ or } 103.8(\%)$$

(ب) متوسط كيات اللبن والزبد والجبن المنتجة في 1950 - 1949 هي على الترتيب .

$$\frac{1}{2}(9675 + 9717) = 9696, \frac{1}{2}(117.7 + 115.5) = 116.6 \text{ and } \frac{1}{2}(77.93 + 74.39) = 76.16$$

متوسط الأسعار في 1950 - 1949 موضح بالمسألة ١٧ - ١٠ .

$$\text{رقم لاسبيرز} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{متوسط الكيات في 50 - 1949})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{متوسط الكيات في 50 - 1949})(\text{الأسعار في 50 - 1949})}$$

$$= \frac{(4.13)(9696) + (59.7)(116.6) + (38.9)(76.16)}{(3.92)(9696) + (61.85)(116.6) + (35.1)(76.16)} = 104.33, \text{ or } 104.3(\%)$$

١٧ - ١٩ باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٠ احسب رقم باش للأسعار لسنة 1958 باستخدام

(أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كأساس .

الحل :

(أ) رقم باش = الرقم القياسي التجميعي المرجح للأسعار باستخدام كيات سنة المقارنة كأوزان .

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1949})}$$

$$= \frac{(4.13)(10436) + (59.7)(115.5) + (38.9)(82.79)}{(3.95)(10436) + (61.5)(115.5) + (34.8)(82.79)} = 103.93, \text{ or } 103.9(\%).$$

$$\text{رقم باش} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_o} = \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1958})(\text{الأسعار في 50 - 1949})} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{(4.13)(10436) + (59.7)(115.5) + (38.9)(82.79)}{(3.92)(10436) + (61.85)(115.5) + (35.1)(82.79)} = 104.43 \text{ or } 104.4(\%).$$

١٧ - ٢٠ أوجد الأرقام القياسية لكل من (أ) لاسبيرز (ب) باش باستخدام بيانات المسألة ١٧ - ١٢ (ج) أذكر ميزة رقم

لاسبيرز على رقم باش في حالة ما إذا كان الرقم القياسي يراجع من سنة الأخرى

الحل :

$$(أ) \text{ رقم لاسبيرز } = \frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\text{(الكيات في 1949)}}{\text{(الأسعار في 1958)}} \div \frac{\text{(الكيات في 1949)}}{\text{(الأسعار في 1949)}}$$

$$\frac{(\$28.20 \text{ لكل طن}) (3.559 \text{ مليون طن}) + (\$0.214 \text{ لكل لتر}) (80.2 \times 159 \text{ مليون لتر})}{(\$20.13 \text{ لكل طن}) (3.559 \text{ مليون طن}) + (\$0.203 \text{ لكل لتر}) (80.2 \times 159 \text{ مليون لتر})}$$

$$= \frac{2829.25 \text{ مليون دولار}}{2660.26 \text{ مليون دولار}} = 106.4 \% \text{ أو } 106.35$$

لاحظ أنه من المهم جداً أن تكون الوحدات المستخدمة صحيحة ومتسقة .

$$(ب) \text{ رقم باش } = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n} = \frac{\text{(الكيات في 1958)}}{\text{(الكيات في 1958)}} \div \frac{\text{(الأسعار في 1958)}}{\text{(الأسعار في 1949)}}$$

$$\frac{(\$28.20 \text{ لكل طن}) (1.821 \text{ مليون طن}) + (\$0.214 \text{ لكل لتر}) (118.6 \times 159 \text{ مليون لتر})}{(\$20.13 \text{ لكل طن}) (1.821 \text{ مليون طن}) + (\$0.203 \text{ لكل لتر}) (118.6 \times 159 \text{ مليون لتر})}$$

$$= \frac{4086.84 \text{ مليون دولار}}{3864.71 \text{ مليون دولار}} = 105.7 \% \text{ أو } 105.747$$

من الناحية العملية ، عندما يحسب الرقم القياسي ، لعدد كبير من السلع ، فإنه ينصح بترتيب الحسابات في صورة جدول ملائم (أنظر المسألة المسألة ١٧ - ٣١ ، على سبيل المثال) .

(ج) في حساب رقم لاسبيرز ، فإن الأوزان (الكيات المنتجة أو المستهلكة في سنة الأساس ، إذا كنا نحسب الرقم القياسي للسعر) لا تتغير من سنة لأخرى أى أننا نحتاج إلى المعلومات الخاصة بآخر الأسعار .

في حساب رقم باش ، فإن آخر المعلومات عن الأوزان (الكيات) وكذلك الأسعار يجب الحصول عليها . بهذا فإن حساب رقم باش يتضمن مجهود أكبر في تجميع البيانات .

١٧-٢١ أعط تفسيراً لكل من (أ) رقم لاسبيرز للأسعار (ب) رقم باش للأسعار ، بدلالة القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) للسلع .

الحل :

(أ) في حساب رقم لاسبيرز للأسعار ، $\sum p_0 q_0$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) لمجموعة من البضائع والخدمات أو السلع (تمثل أحياناً سلة السوق) في سنة أو فترة الأساس . الكية $\sum p_n q_0$ تمثل القيمة الإجمالية لنفس سلة السوق في سنة أو فترة المقارنة . بهذا فإن رقم لاسبيرز للأسعار يفيد في قياس التكلفة الإجمالية في أن سنة مقارنة لنفس المجموعة السلعية المشتراة في سنة الأساس .

(ب) في حساب رقم باش للأسعار ، $\sum p_0 q_n$ تمثل القيمة الإجمالية (أو التكلفة الإجمالية) للسلع المشتراة في سنة المقارنة مقومة بأسعار سنة الأساس ، بينما $\sum p_n q_n$ تمثل القيمة الإجمالية للسلع المشتراة في سنة المقارنة مقومة بسعر سنة المقارنة . بهذا فإن رقم باش للأسعار يفيد في قياس التكلفة الكلية لمجموعة سلعية في سنة المقارنة بالنسبة إلى ما يمكن أن تتكلفه لو تم الشراء في سنة الأساس .

١٧-٢٢ يذكر أحياناً أن رقم لاسبيرز للأسعار يميل إلى المغالاة في تقدير تغيرات السعر بينما رقم باش للأسعار يميل إلى التقليل في تقدير هذه التغيرات بين سبب ممكن لإثبات صحة هذه العبارة .

الحل :

طبقاً للقانون الاقتصادي للمرض ، فإن الناس تميل إلى التقليل من الشراء إذا ارتفعت الأسعار وإلى زيادة الشراء إذا انخفضت الأسعار . وهذا ما يسمى بمرونة الطلب وهو صحيح إذا كانت الحاجة للسلع ليست ضرورية تماماً .

في حالة رقم لاسيرز ، Σp_{nq_0} سيكون إلى حد ما أكبر مما يجب حيث أنه طبقاً لقانون المرض والطلب فإن الأشخاص تميل إلى شراء أقل من السلع التي يرفع سعرها وأكثر من السلع التي ينخفض سعرها بحيث تكون التكلفة الكلية أقل مما هو متوقع من Σp_{nq_0} بهذا فإن رقم لاسيرز $\frac{\Sigma p_n q_m}{\Sigma p_0 q_0}$ يميل إلى أن يكون أعلى .

في حالة رقم باش ، فإن الدور الذي تلعبه كميات سنة الأساس وكميات سنة المقارنة في رقم لاسيرز يتم تبادلها . هذا التبادل يميل إلى جعل رقم باش أقل مما يجب أن يكون عليه .

والسبب السابق لا يتضمن أن رقم لاسيرز يكون دائماً أعلى من رقم باش ولكن يميل فقط إلى أن يكون أعلى . وفي الناحية العملية فإن رقم لاسيرز يمكن أن يكون أكبر من ، أقل من أو يساوي رقم لاسيرز (أنظر المسائل ١٧-١٨ و ١٧-١٩ حيث رقم لاسيرز ، في حقيقته أقل من رقم باش) .

١٧-٢٣ أثبت أن الرقم القياسي التجمعي المرجح للأسعار حيث الأوزان (الكميات) ثابتة يحقق اختبار الدائرية

الحل :

اعتبر q_0 تمثل أوزاناً ثابتة ، فإنه لأي فترات c و p و a فإن الأرقام القياسية

$$I_{a10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_a q_0} \quad \text{and} \quad I_{b10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_b q_0}$$

إذن

$$I_{a10} I_{b10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_a q_0} \cdot \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_b q_0} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_a q_0} = I_{a10}$$

والذي يوضح تحقق اختبار الدائرية

الرقان القياسيان لكل من لاسيرز وباش لا يحققان اختبار الدائرية .

رقم فيشر المثالي :

١٧-٢٤ أثبت أن رقم فيشر المثالي هو الوسط الهندسي لكل من رقم لاسيرز ورقم باش .

الحل :

اعتبر أن F تعبر عن رقم فيشر و L رقم لاسيرز و P رقم باش ، فإن

$$F = \sqrt{\left(\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_a q_0}\right) \left(\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_b q_0}\right)} = \sqrt{LP}$$

باستخدام تعريف L ، P . وبما أن \sqrt{LP} هو الوسط الهندسي لكل من L ، P ، فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة .

١٧-٢٥ أثبت أن رقم فيشر المثالي يقع بين رقمي لاسيرز وباش .

الحل :

هذا ينتج مباشرة من حقيقة أن $F = \sqrt{LP}$ تقع بين L ، P ، نظراً لأن L ، P أرقام موجبة . لاحظ أنه إذا كانت $L = P$ إذن $L = P = F$.

وبما أنه من المسألة ١٧ - ٢٢ ، L تميل إلى التقليل من تقدير تغيرات السعر بينما P تميل إلى المغالاة في تقديرها ، فإنه ينتج عن ذلك أن F ، والتي تقع بين P و L ، سوف تمثنا بتقدير أحسن من L أو P .

١٧ - ٢٦ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار لمنتجات الألبان بالمسألة ١٧ - ١٠ وذلك لسنة 1958 مستخدماً (أ) 1949 (ب) 1950 - 1949 كسنة أساس .

الحل :

$$(أ) F = \sqrt{LP} = \sqrt{(103.84)(103.93)} = 103.9 \quad \text{من المسائل ١٧ - ١٨ (أ) و ١٧ - ١٩ (ب)} .$$

$$(ب) F = \sqrt{LP} = \sqrt{(104.33)(104.43)} = 104.4 \quad \text{من المسائل ١٧ - ١٨ (ب) و ١٧ - ١٩ (ب)}$$

١٧ - ٢٧ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢

الحل :

$$\text{من المسألة ١٧ - ٢٠} \quad F = \sqrt{LP} = \sqrt{(106.35)(105.75)} = 106.0$$

لاحظ أن تقريباً جيداً \sqrt{LP} عندما تكون P و L متساويين تقريباً تعطى بالصورة $\frac{1}{2}(L + P)$. هذا الوسط الحسابي لكل من P و L يمكن استخدامه كتعريف لرقم قياسي جديد يقع بين P و L .

١٧ - ٢٨ أثبت أن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في الزمن ..

الحل :

اعتبر أن $F_{0|n}$ يرمز إلى رقم فيشر المثالي لسنة المقارنة بالنسبة لسنة أساس ، و $F_{n|0}$ يرمز لرقم فيشر المثالي عندما نضع سنة الأساس بدلاً من سنة المقارنة والعكس. بهذا فإن اختبار الانعكاس في الزمن يتحقق إذا كان $F_{0|n} = 1/F_{n|0}$ أو $F_{0|n} F_{n|0} = 1$.

$$\text{بالتعريف} \quad F_{0|n} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right)} \quad \text{إذن} \quad F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_0}\right)}$$

$$F_{0|n} F_{n|0} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_0}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_n}{\sum p_n q_n}\right) \left(\frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_n q_0}\right)} = 1$$

رقم مارشال - أدجورث القياسي :

١٧ - ٢٩ احسب رقم مارشال - أدجورث القياسي للأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢

الحل :

$$\text{رقم مارشال - أدجورث} = \frac{\sum p_n(q_0 + q_n)}{\sum p_0(q_0 + q_n)}$$

$$\frac{\sum (\text{مجموع الكميات في 1949 و 1958}) (\text{الأسعار في سنة 1958})}{\sum (\text{مجموع الكميات في 1949 و 1958}) (\text{الأسعار في سنة 1949})}$$

$$= \frac{(\$28.20)\{(3.559 + 1.821)(10^6)\} + (\$0.214)\{(80.2 + 118.6)(159 + 10^6)\}}{(\$20.13)\{(3.559 + 1.821)(10^6)\} + (\$0.203)\{(80.2 + 118.6)(159 + 10^6)\}} = \frac{6916.0}{6525.0} = 105.9(\%)$$

لاحظ أن هذا يقع بين رقي لاسبيرز وباش القياسيين (أنظر المسألة ١٧ - ٢٠) لإثبات أن هذا دائماً صحيح ، أنظر

المسألة ١٧ - ٣٠ .

١٧-٣٠ (أ) أثبت أنه إذا كان $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن $\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ حيث X_1, X_2, Y_1, Y_2 أى رقم موجب .

(ب) استخدم النتيجة في (أ) لإثبات أن الرقم القياسى لمارشال - أدجورث يقع بين رقمى لاسيرز وباش .

الحصل :

(أ) إذا كانت $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن (١) $X_1 Y_2 < X_2 Y_1$.

بإضافة $X_1 X_2$ إلى الجانبين في (١) ، نحصل على

$$\frac{X_1}{X_2} < \frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} \quad (٢) \text{ أو } X_1 X_2 + X_1 Y_2 < X_1 X_2 + X_2 Y_1 \text{ or } X_1(X_2 + Y_2) < X_2(X_1 + Y_1)$$

وذلك بقسمة الطرفين على $X_2(X_2 + Y_2)$.

بإضافة $Y_1 Y_2$ إلى الجانبين في (١) ، نحصل على

$$\frac{X_1 + Y_1}{X_2 + Y_2} < \frac{Y_1}{Y_2} \quad (٣) \text{ أو } X_1 Y_2 + Y_1 Y_2 < X_2 Y_1 + Y_1 Y_2 \text{ or } Y_2(X_1 + Y_1) < Y_1(X_2 + Y_2)$$

وذلك بقسمة الطرفين على $Y_1(X_1 + Y_1)$.

من (٢) و (٣) نحصل على النتيجة المطلوبة .

(ب) المسألة ١ : رقم لاسيرز أقل من رقم باش .

اعتبر $X_1 = \sum p_n q_{n0}, X_2 = \sum p_o q_o, Y_1 = \sum p_n q_n, Y_2 = \sum p_o q_n$.
وباستخدام (أ) هذا $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_o + \sum p_n q_n}{\sum p_o q_o + \sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n (q_o + q_n)}{\sum p_o (q_o + q_n)} < \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} \quad \text{أو}$$

رقم باش < رقم مارشال - أدجورث < رقم لاسيرز

المسألة ٢ : رقم باش أقل من رقم لاسيرز

اعتبر $X_1 = \sum p_n q_n, X_2 = \sum p_o q_n, Y_1 = \sum p_n q_o, Y_2 = \sum p_o q_o$.
وباستخدام (أ) هذا $\frac{X_1}{X_2} < \frac{Y_1}{Y_2}$ إذن

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n q_n + \sum p_n q_o}{\sum p_o q_n + \sum p_o q_o} < \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} < \frac{\sum p_n (q_o + q_n)}{\sum p_o (q_o + q_n)} < \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_o q_n} \quad \text{أو}$$

رقم لاسيرز < رقم مارشال - أدجورث < رقم باش

بهذا نستنتج من الحالة (١) ، (٢) أنه بصرف النظر عما إذا كان رقم لاسيرز أكبر من أو أصغر من رقم باش ، فإن رقم مارشال - أدجورث يقع بينهما .

الوسط المرجح لمناسيب :

٣١-١٧ احسب الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار لبيانات المسألة ١٧ - ١٢ باستخدام (أ) قيم سنة المقارنة ، كأوزان (ب) قيم سنة الأساس كأوزان ، حيث سنة الأساس هي ١٩٤٩ وسنة المقارنة هي ١٩٥٨ .
الحصل :

(أ) الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة المقارنة كأوزان

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n} = \frac{\sum (\text{مناسيب السعر})}{\text{قيم سنة المقارنة}} =$$

عمليات الحساب المطلوبة يمكن ترتيبها كما في الجدول ١٧ - ١٢ ، حيث الدليل n يعبر عن سنة المقارنة ١٩٥٨ والدليل o يعبر عن سنة الأساس ١٩٤٩ ، و p تعبر عن السعر و q عن الكمية .

جدول ١٧ - ١٢

	p_o	p_n	q_n	p_n/p_o	$p_n q_n$ ملايين الدولارات	$(p_n/p_o)(p_n q_n)$ ملايين الدولارات
محم الأنتراسيت برول	\$20.13 (لكل طن)	\$28.20 (لكل طن)	1.821 (مليون طن)	1.4009	51.352	71.939
	\$0.203 (لكل لتر)	\$0.214 (لكل لتر)	118.6×159 (مليون لتر)	1.0542	4035.484	4254.207
					$\sum p_n q_n$ = 4086.836	$\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)$ = 4326.146

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_n q_n)}{\sum p_n q_n} = \frac{4326.146}{4086.836} = 107.2(\%) = \text{إذن الرقم القياسي المطلوب}$$

(ب) الوسط الحسابي المرجح لمناسيب الأسعار باستخدام قيم سنة الأساس كأوزان هي

$$\frac{\sum (p_n/p_o)(p_o q_o)}{\sum p_o q_o} = \frac{\sum p_n q_o}{\sum p_o q_o} = \text{رقم لاسيرز بالمسألة ١٧ - ٢٠ (أ) = 106.4(\%) ويمكن كذلك}$$

الحصل باستخدام جدول كما في الجزء (أ)

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

٣٢-١٧ استخدم بيانات المسألة ١٧ - ١٢ لحساب الرقم القياسي للحجم لسنة ١٩٥٨ حيث سنة الأساس ١٩٤٩ هي سنة الأساس باستخدام
(أ) وسطاً حسابياً بسيطاً لمناسيب الحجم (ب) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان
(ج) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان .
الحصل :

(أ) الوسط الحسابي البسيط لمناسيب الحجم

$$\frac{\sum q_n/q_o}{N} = \frac{1.821/3.559 + 118.6/80.2}{2} = \frac{51.17(\%) + 147.88(\%)}{2} = 99.5(\%)$$

(ب) رقم قياسي تجميعي مرجح للحجم باستخدام أسعار سنة الأساس كأوزان

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum p_n p_o}{\sum p_o p_o} = \frac{\sum (\text{الكميات في 1949}) (\text{الكميات في 1958})}{\sum (\text{الكميات في 1949}) (\text{الكميات في 1949})} \\ &= \frac{(1.821 \text{ مليون طن}) (20.13 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 118.6 \text{ مليون لتر}) (0.203 \$ \text{ لكل لتر})}{(3.559 \text{ مليون طن}) (20.13 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 80.2 \text{ مليون لتر}) (0.203 \$ \text{ لكل لتر})} \end{aligned}$$

$$\frac{3853.73 \text{ مليون دولار}}{2660.26 \text{ مليون دولار}} = 144.9 \text{ أو } 144.86\%$$

وهذه تسمى أحياناً رقم لاسبيرز القياسي للكميات أو الحجم .

(ج) رقم قياسي تجميعي مرجح للحجم باستخدام أسعار سنة المقارنة كأوزان

$$\begin{aligned} \frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n} &= \frac{\Sigma(\text{الكميات في 1958})}{\Sigma(\text{الكميات في 1949})} \\ &= \frac{(1.821 \text{ مليون طن}) (28.20 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 118.6 \text{ مليون لتر}) (0.214 \$ \text{ لكل لتر})}{(3.559 \text{ مليون طن}) (28.20 \$ \text{ لكل طن}) + (159 \times 80.2 \text{ مليون لتر}) (0.214 \$ \text{ لكل لتر})} \\ &= \frac{4086.84 \text{ مليون دولار}}{2829.25 \text{ مليون دولار}} = 144.4\% \text{ أو } 144.45\% \end{aligned}$$

وهذه تسمى أحياناً رقم باش القياسي للكميات أو الحجم .

٣٣-١٧ من نتائج المسألة ١٧-٣٢ أوجد الرقم القياسي المثالي للكميات أو الحجم لفيشر .

الحل :

كما في الرقم القياسي للسعر ، فإن رقم فيشر المثالي للكمية يحسب بالوسط الهندسي لرقى لاسبيرز وباش للكميات . بهذا فن المسألة ١٧-٣٢ .

$$\text{الرقم القياسي المثالي للكميات لفيشر} = \sqrt{(144.86)(144.45)} = 144.6$$

الرقم القياسي للقيمة :

٣٤-١٧ أثبت أن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

الحل :

يتحقق اختبار الانعكاس في المعامل للرقم القياسي إذا كان

(الرقم القياسي للسعر) (الرقم القياسي للكمية) = الرقم القياسي للقيمة . اعتبر أن F_p هو رقم فيشر المثالي للسعر و F_Q هو رقم فيشر المثالي للكمية . إذن

$$F_p F_Q = \sqrt{\left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}\right) \left(\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_n}\right)} \sqrt{\left(\frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_0}\right) \left(\frac{\sum q_n p_n}{\sum q_0 p_n}\right)} = \frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0} = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

بهذا فإن رقم فيشر المثالي يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

٣٥-١٧ احسب الرقم القياسي للقيمة بالمسألة ١٧-٣٤ باستخدام بيانات المسألة ١٧-١٢ .

الحل :

بما أن النتيجة :

الرقم القياسي للقيمة = (الرقم القياسي للسعر) (الرقم القياسي للكمية) ، تنطبق تماماً إذا استخدمت أرقام فيشر المثالية فإيه من المسائل ١٧-٢٧ و ١٧-٣٣

$$\text{الرقم القياسي للقيمة} = (106.0\%)(144.6\%) = 153.3\%$$

وهذه النتيجة نحصل عليها بالتعويض المباشر في الصيغة

$$\frac{\sum p_n q_n}{\sum p_0 q_0}$$

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

٣٦-١٧ وضع أسس صلاحية الطريقة المستخدمة في المسائل ١٧ - ٣ للحصول على مناسيب السعر لفترة أساس جديدة .

الحل :

افترض أن الفترات مرققة على التتالي من 1 إلى N كما في الصف الأول من الجدول ١٧ - ١٣ ، وافترض أن p_1, p_2, \dots, p_N تعبر عن الأسعار في هذه الفترات كما في الصف الثاني في هذا الجدول .

جدول ١٧ - ٣

الفترة	1	2	3	...	j	...	k	...	N
الأسعار	p_1	p_2	p_3	...	p_j	...	p_k	...	p_N
مناسيب السعر المقابلة للفترة القديمة j	p_{j11}	p_{j12}	p_{j13}	...	100%	...	p_{jk1}	...	p_{jN}
مناسيب السعر المقابلة للفترة الجديدة k	p_{k11}	p_{k12}	p_{k13}	...	p_{kj1}	...	100%	...	p_{kN}

مناسيب السعر المقابلة للفترات j و k والتي أطلقنا عليها الفترات القديمة والجديدة على الترتيب موضحة بالصف الثالث والرابع من الجدول . هنا $p_{j11} = p_1/p_j, p_{j12} = p_2/p_j$ وهكذا .

من الواضح أن الصف الرابع يمكن الحصول عليه من الصف الثالث بقسمة كل قيمة في الصف الثالث على p_{j1k} أي ، منسوب السعر في الفترة k بالنسبة للفترة كأساس ، على سبيل المثال .

$$\frac{p_{j11}}{p_{j1k}} = \frac{p_1/p_j}{p_k/p_j} = \frac{p_1}{p_k} = p_{k11}$$

ومن الواضح أن النتيجة تنطبق على مناسيب الكمية والقيمة كما تنطبق على مناسيب السعر .

٣٧-١٧ أثبت أن طريقة المسألة ١٧ - ٣٦ في تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية قابلة للتطبيق في حالة وحيدة فقط وهي إذا كان الرقم القياسي يحقق اختبار الدائرية .

الحل :

إذا رمزنا للأرقام القياسية للفترات المختلفة باستخدام الفترة j كأساس بالرمز

(١)

$$I_{j11}, I_{j12}, \dots, I_{j1N}$$

وكانت الأرقام القياسية المناظرة باستخدام الفترة k كأساس هي :

(٢)

$$I_{k11}, I_{k12}, \dots, I_{k1N}$$

فإننا سوف نحصل على المتتابة (٢) بقسمة كل رقم في المتتابة (١) على I_{jk} في حالة وحيدة فقط وهي إذا كان

$$\frac{I_{j1}}{I_{jk}} = I_{k1}, \quad \frac{I_{j2}}{I_{jk}} = I_{k2}, \quad \dots$$

أو

$$I_{j1} = I_{jk} I_{k1}, \quad I_{j2} = I_{jk} I_{k2}, \quad \dots$$

وهذا يتضمن أن الأرقام القياسية تحقق اختبار الدائرية .

بما أن الأرقام القياسية لكل من لاسبيرز ، باش ، فيشر ومارشال - أدجورث لا تحقق اختبار الدائرية ، فإن طريقة تغيير الأساس لا تنطبق بصورة دقيقة . وعلى أية حال فإنها من الناحية العملية تنطبق بصورة تقريبية .

الرقم القياسي التجميعي المرجع حيث الأوزان المستخدمة لسنة ثنائية يحقق اختبار الدائرية (أنظر المسألة ١٧-٢٣) هذا فإنه للأرقام القياسية المحسوبة بهذه الطريقة فإن الطريقة المعطاة لتغيير الأساس تنطبق تماماً .

١٧-٣٨ الجدول ١٧ - ١٤ يوضح الرقم القياسي للإنتاج الصناعي لجميع المصانع للسنوات 1947 - 1958 حيث 1949 - 1947 فترة أساس . أوجد رقماً قياسياً جديداً باستخدام (أ) 1951 (ب) 1956 - 1953 ، كأساس .

جدول ١٧ - ١٤

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1947-49=100)	100	104	97	112	120	124	134	125	139	143	143	134

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الحل :

(أ) اقم كل رقم بالجدول على 120 (الرقم القياسي المقابل لسنة 1951) وعبر عن النتيجة كنسبة مئوية .
الرقم القياسي المطلوب حيث 1951 سنة أساس موضح بالجدول ١٧ - ١٥ .

جدول ١٧ - ١٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1951=100)	83	87	81	93	100	103	112	104	116	119	119	112

(ب) الوسط (الوسط الحسابي) للأرقام القياسية للسنوات 1953 - 1956 كأساس هو 135.25 (134 . 125 . 139 . 143) ؛ إذن بقسمة كل رقم قياسي بالجدول ١٧ - ١٤ على 135.25 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية ، نحصل على الأرقام القياسية المطلوبة الموضحة بالجدول ١٧ - ١٦ .

جدول ١٧ - ١٦

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للإنتاج الصناعي (1953-56=100)	74	77	72	83	89	92	99	92	103	106	106	99

لاحظ أن متوسط الأرقام القياسية لفترة الأساس الجديدة 1953-1956 هو 100 (99 . 92 . 103 . 106) ؛ كما يجب أن يكون .

الانكماش في السلاسل الزمنية :

١٧-٣٩ الجدول ١٧ - ١٧ يوضح متوسط الأجور بالدولار في الساعة لمال السكك الحديدية بالولايات المتحدة خلال السنوات 1947 - 1958 .

كذلك يوضح الرقم القياسي لأسعار المستهلك لهذه السنوات باعتبار 1947 - 1949 فترة أساس . حدد الأجر « الحقيقي » لمال السكك الحديدية خلال السنوات 1947 - 1958 بالمقارنة بأجورهم في 1947 .

جدول ١٧ - ١٧

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أجر عمال السكك الحديدية (دولار في الساعة)	1.19	1.33	1.44	1.57	1.75	1.84	1.89	1.94	1.97	2.13	2.28	2.45
الرقم القياسي لأسعار المستهلك (1947-49=100)	95.5	102.8	101.8	102.8	111.0	113.5	114.4	114.8	114.5	116.2	120.2	123.5

المصدر : مكتب العمل بالولايات المتحدة

الحل :

(أ) نقوم أولاً بتكوين رقم قياسي جديد لأسعار المستهلك حيث 1947 هي سنة أساس بقسمة جميع الأرقام في الصف الثالث بالجدول ١٧ - ١٧ على 95.5 والتعبير عن النتيجة كنسبة مئوية . النتيجة موضحة بالصف الثاني

بالجندول ١٧ - ١٨ . ثم نقوم بقسمة كل متوسط أجر للسنوات المطاة (الصف الثاني بالجندول ١٧ - ١٧) على الرقم القياسى المقابل (الصف الثاني بالجندول ١٧ - ١٨) لنحصل على الأجر « الحقيقى » (الصف الثالث بالجندول ١٧ - ١٨) .

هذا ، على سبيل المثال ، الأجر الحقيقى المقابل لسنة 1958 هو \$1.89 = 129.3 / 2.45\$. وينتج عن ذلك أنه على الرغم من أن الأجر « الظاهر » زاد أكثر من الضعف فى المدة من 1947 إلى 1958 ، فإن الأجر « الحقيقى » زاد بنسبة 59 % فقط . أى أن القوة الشرائية زادت بنسبة 59 % فقط .

جندول ١٧ - ١٨

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسى لأسعار المستهلك (1947=100)	100	107.6	106.6	107.6	116.2	118.8	119.8	120.2	119.9	121.7	125.9	129.3
الأجر « الحقيقى » لعمال السكك الحديدية (دولار فى الساعة)	1.19	1.24	1.35	1.46	1.51	1.55	1.58	1.61	1.64	1.75	1.81	1.89

١٧-٤٠ استخدم الرقم القياسى لأسعار المستهلك بالمسألة ١٧ - ٣٩ لتحديد القوة الشرائية للدولار للسنوات المختلفة مفترضاً أنه فى 1947 كان الدولار يساوى فعلاً دولاراً فى الشرائية .

الحل :

بقسمة \$1.00 على كل رقم قياسى للسعر بالصف الثانى فى الجندول ١٧-١٨ ، نحصل على القيم بالجندول ١٧ - ١٩ التى توضح القوة الشرائية للدولار 1947 فى كل من السنوات المطاة . فى 1958 ، على سبيل المثال ، القيمة 0.77 تعنى أن دولار 1958 يمكن أن يشتري به 77 % مما يمكن أن يشتري بدولار 1947 ، أى أن الدولار يساوى \$0.77 من دولار 1947 .

البيانات المعبر عنها بقيم الدولار عند فترة معينة من الزمن يقال أنه معبر عنها بدولارات ثابتة باستخدام الفترة المعينة كفترة أساس أو فترة أسناد .

جندول ١٧ - ١٩

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
القوة الشرائية للدولار بدولارات 1947	1.00	0.93	0.94	0.93	0.86	0.84	0.83	0.83	0.83	0.82	0.79	0.77

مسائل إضافية

مناشيب الأسعار :

١٧-٤١ الجدول ١٧ - ٢٠ يوضح متوسط أسعار الجملة للقمح في إحدى الدول لعدد من السنوات المختلفة . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) سنة ١٩٥٨ باستخدام ١٩٤٨ كأساس ، (ب) ١٩٤٩ و ١٩٥٦ باستخدام ١٩٥٠ كأساس ، (ج) السنوات ١٩٥٥ - ١٩٥٨ باستخدام $100 = 1949 - 1947$.

جدول ١٧ - ٢٠

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
متوسط أسعار القمح بالبنس الجديد لكل كيلو جرام	2.66	2.50	2.24	2.29	2.41	2.45	2.49	2.56	2.50	2.39	2.35	2.23

ج : (أ) 89.2 ، (ب) 97.8 ، 104.4 (ج) 90.4 ، 95.3 ، 96.9 ، 101.4

١٧-٤٢ أثبت أن (أ) $P_{a1a}P_{b1b}P_{c1c} = 1$ ، (ب) $P_{a1a}P_{b1b}P_{c1c} = P_{a1a}P_{b1b}P_{c1c}$

١٧-٤٣ أثبت أن $P_{01n} = P_{011}P_{112}P_{213} \dots P_{(n-1)n}$

١٧-٤٤ أثبت أن خاصية الدائرية المعدلة تأتي مباشرة من خاصية الدائرية وخاصية الانعكاس في الزمن .

١٧-٤٥ الجدول ١٧ - ٢١ يوضح مناسيب السعر لسبعة حيث $100 = 1949 - 1947$. حدد مناسيب السعر حيث (أ) $100 = 1956$ ، (ب) $100 = 1956 - 1955$

جدول ١٧ - ٢١

السنة	1955	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعر (1947-1949=100)	135	128	120	150	140	162

ج : (أ) 105 ، 100 ، 93.8 ، 117 ، 109 ، 127 . (ب) 103 ، 97.3 ، 91.3 ، 114 ، 106 ، 123

١٧-٤٦ منسوب السعر لسنة ١٩٥٦ حيث ١٩٥٨ سنة الأساس هو $62\frac{1}{2}$ بينما منسوب السعر لسنة ١٩٥٧ حيث ١٩٥٦ سنة الأساس هو $133\frac{1}{2}$. أوجد منسوب السعر لسنة ١٩٥٨ حيث (أ) ١٩٥٧ ، (ب) ١٩٥٦ - ١٩٥٧ كأساس . ج : (أ) 120 ، (ب) 137

١٧-٤٧ في ١٩٦٠ انخفض متوسط سعر سلعة بنسبة 25% من قيمتها سنة ١٩٥٤ ولكنه زاد بنسبة 50% من قيمتها سنة ١٩٤٦ . أوجد منسوب السعر لكل من (أ) ١٩٥٤ ، (ب) ١٩٦٠ مستخدماً كأساس ١٩٤٦ . ج : (أ) 200 ، (ب) 150

مناسيب الكمية أو الحجم :

١٧-٤٨ الجدول ١٧ - ٢٢ يوضح الطاقة الكهربائية بـبليون الكيلووات - ساعة المبيعة للعملاء المحليين والمقيمين بالولايات المتحدة خلال السنوات 1958 - 1947 . اختصر البيانات إلى مناسيب الكمية مستخدماً (أ) 1953 (ب) 1949 - 1947 كأساس .

جدول ١٧ - ٢٢

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الطاقة الكهربائية (بليون kWh)	3.68	4.25	4.84	5.59	6.42	7.23	8.09	9.04	10.04	11.15	12.26	13.25

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

ج : (أ) 45.5, 52.5, 59.8, 69.1, 79.4, 89.4, 100.0, 111.7, 124.1, 137.8, 151.5, 163.8

(ب) 86.5, 99.8, 113.7, 131.3, 150.8, 169.9, 190.1, 212.4, 235.9, 261.9, 288.0, 311.3

١٧-٤٩ في 1956 زاد الإنتاج من معدن خام بنسبة 40% عنه في 1955، وفي 1957 كان الإنتاج أقل بنسبة 20% منه في 1956 ولكن % 16 2/3 أعلى منه في 1958 . أوجد مناسيب السعر للسنوات 1958 - 1955 مستخدماً كأساس (أ) 1955 (ب) 1958 (ج) 1958 - 1955

ج : (أ) 100, 140, 112, 96 (ب) 104, 146, 117, 100 (ج) 89.3, 125, 100, 85.7

١٧-٥٠ في المسألة السابقة إذا كان الإنتاج من المعدن الخام لسنة 1957 هو 3.20 مليون طن ، أوجد الإنتاج للسنوات (أ) 1955 (ب) 1956 (ج) 1958

ج : (أ) 2.86 (ب) 4.00 (ج) 2.74 مليون طن

مناسيب القيمة :

١٧-٥١ في 1960 زاد سعر سلعة ما بنسبة 50% عن سعرها 1952 بينما انخفضت كمية الإنتاج بنسبة 30% . ما هي النسبة المئوية للإرتفاع أو الانخفاض من القيمة الإجمالية للسلعة في 1960 بالنسبة للقيمة في 1952 ؟ ج : 5% زيادة .

١٧-٥٢ الجدول ١٧ - ٢٣ يوضح مناسيب السعر والقيمة لسلعة للسنوات 1960 - 1956 حيث سنة الأساس كما هو موضح . أوجد منسوب الكمية للسلعة حيث الأساس (أ) 1956 و (ب) 1958 - 1956 فسر نتائجك .

جدول ١٧ - ٢٣

السنة	1956	1957	1958	1959	1960
منسوب السعر (1956 = 100)	100	125	150	175	200
منسوب القيمة (1947 - 1949 = 100)	150	180	207	231	252

ج : (أ) 100, 96, 92, 88, 84 (ب) 104, 100, 96, 92, 88

سلسلة المناسيب ووصلة المناسيب :

١٧-٥٣ وصلة المناسيب لاستهلاك سلعة خلال السنوات 1960 - 1957 هي 80 ، 125 ، 120 ، 90 على الترتيب .

(أ) أوجد منسوب السعر لسنة 1958 حيث 1960 كأساس .

(ب) سلسل وصلة المناسيب إلى 1959 كأساس .

(ج) سلسل وصلة المناسيب إلى 58 - 1957 كأساس .

ج : (أ) 100 (ب) 80.0 ، 100 ، ، 80.0 ، 66.7 ، 74.1 ، المقابلة للسنوات 1950 - 1956 على الترتيب .

(ج) 109 ، 136 ، 109 ، 99.9 ، 101 ، المقابلة للسنوات 1960 - 1956 على الترتيب .

١٧-٥٤ في نهاية A من السنوات المتتالية كان إنتاج سلعة ما A وحدة . في كل من السنوات المتتالية كان الإنتاج يتزايد بنسبة $r\%$ عن السنة السابقة لها . (أ) وضح أن الإنتاج خلال السنة n هو $A(1+r/100)^{n-1}$ وحدة (ب) وضح أن الإنتاج الكلي لجميع السنوات n هو $[1 + r/100)^n - 1] (100 A / r)$ وحدة .

الأرقام القياسية . الطريقة التجميعية البسيطة :

١٧-٥٥ الجدول ١٧-٢٤ يوضح لبلد ما أسعار وكميات المستهلك من المعادن المختلفة غير الحديدية للسنوات 1956 و 1957 بأخذ 1949 كسنة أساس أحسب الرقم القياسي للسعر ، باستخدام الطريقة التجميعية البسيطة ، للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 .

ج : (أ) 121.7 (ب) 110.0 .

جدول ١٧-٢٤

الكميات (بملايين kg)

الأسعار (ينس جديد لكل kg)

	1949	1956	1957
المونوم	1357	3707	3698
نحاس	2144	2734	2478
رصاص	1916	2420	2276
صفح	161	202	186
زنك	1872	2018	1424

	1949	1956	1957
	17.00	26.01	27.52
	19.36	41.88	29.99
	15.18	15.81	14.46
	99.32	101.26	96.17
	12.15	13.49	11.40

١٧-٥٦ أثبت أن الرقم القياسي التجميعي البسيط يحقق اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الدائرية ولكنه لا يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

الوسط البسيط لطريقة التناسيب :

١٧ - ٥٧ من البيانات بالجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ ، استخدم وسطاً بسيطاً (الوسط الحسابي) لتناسب الأسعار ، للحصول على رقم قياسي لسعر المعادن غير الحديدية للسنوات (أ) ١٩٥٦ ، (ب) ١٩٥٧ ، باستخدام ١٩٤٤ كأساس . قارن بالمسألة ١٧ - ٥٥ .

ج : (أ) ١٣٧.٣ (ب) ١٢٠.٥

١٧ - ٥٨ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسيط

ج : (أ) ١١١.٠ (ب) ٩٦.٨

١٧ - ٥٩ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسط الهندسي

ج : (أ) ١٣١.٣ (ب) ١١٦.٨

١٧ - ٦٠ حل المسألة ١٧ - ٥٧ باستخدام الوسط التوافقي

ج : (أ) ١٢٦.٣ (ب) ١١٣.٣

الطريقة التجميعية المرجحة . رقمي لاسبيرز وباش :

١٧ - ٦١ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم لاسبيرز للأسعار للسنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧ باستخدام ١٩٤٩ سنة أساس .

ج : (أ) ١٤٨.٧ (ب) ١٢٥.٥

١٧ - ٦٢ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم باش للأسعار للسنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧ باستخدام ١٩٤٩ كسنة أساس .

ج : (أ) ١٥٠.٥ (ب) ١٣٤.٢

١٧ - ٦٣ وضع أن (أ) رقم لاسبيرز (ب) رقم باش ، لإثبات اختبار الانعكاس في الزمن والانعكاس في المعامل .

رقم فيشر المثالي :

١٧ - ٦٤ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم فيشر المثالي للأسعار للسنوات (أ) ١٩٥٦ (ب) ١٩٥٧ باستخدام ١٩٤٩ كسنة أساس .

ج : (أ) ١٤٩.٦ (ب) ١٢٩.٨

١٧ - ٦٥ وضع أن رقم فيشر المثال لا يحقق اختبار الدائرية

رقم مارشال - أدجورث :

١٧ - ٦٦ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد رقم مارشال - أدجورث القياسي للسعر للسنوات (أ) 1956 (ب) 1957 باستخدام سنة 1949 كسنة أساس .

ج : (أ) 149.8 (ب) 130.5

١٧ - ٦٧ وضع أن رقم مارشال - أدجورث يحقق اختبار الانعكاس في الزمن ولكنه لا يحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

طريقة الوسط المرجح لمناسيب :

١٧ - ٦٨ من بيانات الجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ أوجد الوسط المرجح للمناسيب لسنة 1956 و 1957 باستخدام 1949 كسنة أساس مستخدماً (أ) قيم سنة المقارنة (ب) قيم سنة الأساس ، كأوزان

ج : (أ) 141.4 ، 163.8 (ب) 125.5 ، 148.7

الأرقام القياسية للكمية أو الحجم :

١٧ - ٦٩ استخدم البيانات بالجدول ١٧ - ٢٤ بالمسألة ١٧ - ٥٥ لحساب الأرقام القياسية للأحجام للسنوات 1956 و 1957 حيث سنة الأساس هي 1949 مستخدماً (أ) الوسط الحسابي البسيط لمناسيب الحجم

(ب) الوسط الهندسي البسيط لمناسيب الحجم

(ج) رقماً قياسياً تجميعياً مرجحاً للحجم حيث تستخدم أسعار سنة الأساس كأوزان (رقم لاسبيرز للكميات)

(د) رقم قياسي تجميعي مرجح للحجم حيث تستخدم أسعار سنة المقارنة كأوزان (رقم باش للكميات)

(هـ) رقم فيشر المثال للكميات .

(و) رقم مارشال - أدجورث القياسي للكمية .

الرقم القياسي للقيمة :

١٧ - ٧٠ (أ) باستخدام 1949 كسنة أساس في بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ أحسب الرقم القياسي للقيمة للسنوات 1956، 1957 (ب) حقق أن الرقم القياسي للقيمة في (أ) هو مثل ناتج حاصل ضرب رقم فيشر المثال للسعر في رقم فيشر المثال للكمية .

ج : (أ) 183.6 ، 224.4

١٧ - ٧١ باستخدام 1949 كسنة أساس في بيانات المسألة ١٧ - ٥٥ ، احسب الرقم القياسي للسعر \times الرقم القياسي للكمية للسنوات 1956 و 1957 باستخدام (أ) رقم لاسبيرز (ب) رقم باش .

قارن بالرقم القياسي الفعل للقيمة .

(أ) 171.7 ، 221.6 (ب) 196.3 ، 226

القيم الحقيقية هي 183.6 ، 224.2 على الترتيب (المسألة ١٧ - ٧٠) .

١٧ - ٧٢ أثبت أن الرقم القياسي التجيبي البسيط للقيمة يحقق اختبار الانعكاس في الزمن واختبار الدائرية .

تغيير فترة الأساس للأرقام القياسية :

١٧ - ٧٣ الجدول ١٧ - ٢٥ يوضح رقمين قياسيين لتكلفة التشييد للسنوات 1947 - 1958 . الأول ، مبنى على متوسط 30 مدينة ومجمع بواسطة الشركة الأمريكية للتقييم ، ويوضح الرقم القياسي لتكلفة التشييد حيث $100 = 1913$ والثاني مجمع بواسطة مصلحة التجارة ، ويوضح رقم قياسي حيث $100 = 1949 - 1947$.

(أ) باستخدام البيانات حيث $100 = 1913$ ، أوجد رقماً قياسياً $100 = 1949 - 1947$ وذلك باستخدام الطريقة المبسطة في تغيير الأساس المستخدمة في مناسيب السعر .

(ب) قارن النتائج في (أ) بالرقم المجمع بواسطة مصلحة التجارة معدداً الأسباب المختلفة لأى تناقض مشاهد .

جدول ١٧ - ٢٥

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي للتشييد للشركة الأمريكية للتقييم ($100 = 1913$)	430	490	490	500	532	553	577	591	608	635	663	682
الرقم القياسي للتشييد لمصلحة التجارة ($100 = 1949 - 1947$)	93	104	103	107	116	119	122	122	125	132	137	139

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

الانكماش في السلاسل الزمنية :

١٧ - ٧٤ الرقم القياسي لأسعار الجملة بالولايات المتحدة للسنوات 1947 - 1958 حيث $100 = 1949 - 1947$ معطى بالجدول ١٧ - ٢٦ . حدد قوة الدولار الشرائية في سوق الجملة في كل من السنوات المعطاة بدلالة دولارات 1954

ج : 0.93, 0.94, 0.97, 1.00, 1.00, 0.99, 0.96, 1.07, 1.11, 1.06, 1.14

جدول ١٧ - ٢٦

السنة	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
الرقم القياسي لأسعار الجملة (1947-1949=100)	96.4	104.4	99.2	103.1	114.8	111.6	110.1	110.3	110.7	114.3	117.6	119.2

المصدر : استقصاء الأعمال الجارية

١٧ - ٧٥ توضيح سلسلة زمنية معينة القيمة الإجمالية السنوية بالدولار لمجموعة من السلع . (أ) وضع كيف يمكن تعديل السلسلة الزمنية لحذف أثر التغير في قيمة الدولار من سنة لأخرى . (ب) برر نظرياً الطريقة المستخدمة في (أ) . (ج) وضع إجابتك بمثال .

١٧ - ٧٦ (أ) خالص السلسلة الزمنية الموضحة بالعمود الأخير من الجدول ١٦ - ٤٥ بالفصل السادس عشر من أثر الانكماش و (ب) فسر دلالة البيانات المخلصة من أثر الانكماش .

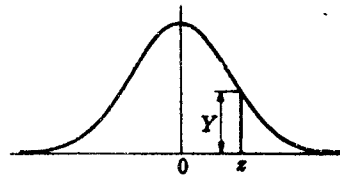
١٧ - ٧٧ أثبت أن طريقة تخلص السلاسل الزمنية من أثر الانكماش ، المستخدمة على سبيل المثال في المسألة ١٧ - ٣٩ ، قابلة للتطبيق تماماً فقط في حالة ما إذا كانت الأرقام القياسية تحقق اختبار الانعكاس في المعامل .

مسائل متنوعة :

١٧ - ٧٨ أثبت أنه إذا كان رقماً لاسيرز وباش القياسيان متساويان فإنهما متساويين مع رقم مارشال - أدمورث ورقم فيشر المثالي

١٧ - ٧٩ كون جدولاً للأثمان المختلفة للأرقام القياسية ، موضحاً في كل حالة ما إذا كانت تحقق أو لا تحقق اختبارات الانعكاس في المعامل واختبار الدائرية .

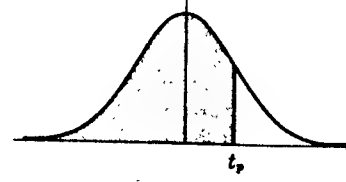
الاحداثيات (Y)
للمنحنى الطبيعي المعياري
عند z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

ملحق III

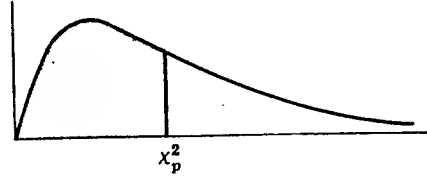
قيم التينيات (t_p)
لتوزيع استودينت t -
لدرجات حرية v
(المساحة المظلة = p)



v	$t_{0.995}$	$t_{0.99}$	$t_{0.975}$	$t_{0.95}$	$t_{0.90}$	$t_{0.80}$	$t_{0.75}$	$t_{0.70}$	$t_{0.60}$	$t_{0.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	0.727	0.325	0.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	0.816	0.617	0.289	0.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	0.978	0.765	0.584	0.277	0.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	0.941	0.741	0.569	0.271	0.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	0.920	0.727	0.559	0.267	0.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	0.906	0.718	0.553	0.265	0.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	0.896	0.711	0.549	0.263	0.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	0.889	0.706	0.546	0.262	0.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	0.883	0.703	0.543	0.261	0.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	0.879	0.700	0.542	0.260	0.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	0.876	0.697	0.540	0.260	0.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	0.873	0.695	0.539	0.259	0.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	0.870	0.694	0.538	0.259	0.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	0.868	0.692	0.537	0.258	0.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	0.866	0.691	0.536	0.258	0.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	0.865	0.690	0.535	0.258	0.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	0.863	0.689	0.534	0.257	0.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	0.862	0.688	0.534	0.257	0.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	0.861	0.688	0.533	0.257	0.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	0.860	0.687	0.533	0.257	0.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	0.859	0.686	0.532	0.257	0.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	0.858	0.686	0.532	0.256	0.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	0.858	0.685	0.532	0.256	0.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	0.857	0.685	0.531	0.256	0.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	0.856	0.684	0.531	0.256	0.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.684	0.531	0.256	0.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	0.855	0.683	0.530	0.256	0.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	0.854	0.683	0.530	0.256	0.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	0.851	0.681	0.529	0.255	0.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	0.848	0.679	0.527	0.254	0.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	0.845	0.677	0.526	0.254	0.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	0.842	0.674	0.524	0.253	0.126

ملحق IV

قيم التينيات (χ_p^2)
لتوزيع كا - تربيع
لدرجة حرية ν
(المساحة المظلة = p)



ν	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.975}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.75}^2$	$\chi_{0.50}^2$	$\chi_{0.25}^2$	$\chi_{0.10}^2$	$\chi_{0.05}^2$	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.01}^2$	$\chi_{0.005}^2$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.455	0.102	0.0158	0.0039	0.0010	0.0002	0.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.575	0.211	0.103	0.0506	0.0201	0.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.584	0.352	0.216	0.115	0.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.711	0.484	0.297	0.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.831	0.554	0.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.872	0.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

ملحق V

اللوغاريتمات المعتادة لاربعة ارقام عشرية

N	0 1 2 3 4					5 6 7 8 9					الفروق									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37	
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34	
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31	
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29	
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25	
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24	
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22	
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21	
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20	
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19	
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17	
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17	
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16	
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15	
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15	
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14	
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14	
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13	
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13	
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12	
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12	
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12	
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11	
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11	
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11	
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10	
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10	
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10	
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10	
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8	
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8	
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8	
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8	
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7	
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7	
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7	
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

اللوغاريتمات المعتادة لأربعة أرقام عشرية

N											الفروق								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ملحق VI

قيم $e^{-\lambda}$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
0.1	0.9048	0.8958	0.8869	0.8781	0.8694	0.8607	0.8521	0.8437	0.8353	0.8270
0.2	0.8187	0.8106	0.8025	0.7945	0.7866	0.7788	0.7711	0.7634	0.7558	0.7483
0.3	0.7408	0.7334	0.7261	0.7189	0.7118	0.7047	0.6977	0.6907	0.6839	0.6771
0.4	0.6703	0.6636	0.6570	0.6505	0.6440	0.6376	0.6313	0.6250	0.6188	0.6126
0.5	0.6065	0.6005	0.5945	0.5886	0.5827	0.5770	0.5712	0.5655	0.5599	0.5543
0.6	0.5488	0.5434	0.5379	0.5326	0.5273	0.5220	0.5169	0.5117	0.5066	0.5016
0.7	0.4966	0.4916	0.4868	0.4819	0.4771	0.4724	0.4677	0.4630	0.4584	0.4538
0.8	0.4493	0.4449	0.4404	0.4360	0.4317	0.4274	0.4232	0.4190	0.4148	0.4107
0.9	0.4066	0.4025	0.3985	0.3946	0.3906	0.3867	0.3829	0.3791	0.3753	0.3716

($\lambda = 1, 2, 3, \dots, 10$)

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123	0.000045

ملحوظة : للحصول على قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ الأخرى ، استخدم قوانين الأسس .

مثال : $e^{-3.48} = (e^{-3.00})(e^{-0.48}) = (0.04979)(0.6188) = 0.03081$

ملحق VII

الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90 35	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

ملحق VIII

خطوات الحصول على المعادلات الاعتدالية
لخط المربعات الصغرى

اعتبر أن المعادلة المطلوبة لخط المربعات الصغرى هي $Y = a_0 + a_1 X$ فإن قيم Y على هذا الخط المقابلة لقيم $X = X_1, X_2, \dots, X_N$ هي $a_0 + a_1 X_1, a_0 + a_1 X_2, \dots, a_0 + a_1 X_N$ بينما القيم الفعلية هي Y_1, Y_2, \dots, Y_N على الترتيب . بهذا فإن خط المربعات الصغرى يحقق (أنظر صفحة ٢٥٢)

$$S = (a_0 + a_1 X_1 - Y_1)^2 + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2)^2 + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N)^2$$

من قواعد التفاضل ، S نهاية صغرى عندما تكون التفاضلات الجزئية لـ S بالنسبة لـ a_0, a_1 تساوى صفرا ، إذن :

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \{ (a_0 + a_1 X_1 - Y_1) + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2) + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N) \} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \{ (a_0 + a_1 X_1 - Y_1) X_1 + (a_0 + a_1 X_2 - Y_2) X_2 + \dots + (a_0 + a_1 X_N - Y_N) X_N \} = 0$$

وهذه المعادلة تعطى المعادلات الاعتدالية المطلوبة :

$$N a_0 + a_1 \Sigma X - \Sigma Y = 0$$

$$a_0 \Sigma X + a_1 \Sigma X^2 - \Sigma XY = 0$$

قائمة المصطلحات Glossary

Chapter 1

الفصل الأول

Population	المجتمع الإحصائي
Universe	المجموعة الكلية
Sample	عينة
Finite	محدود
Infinite	غير محدود (لا نهائي)
Inductive statistics	الإحصاء الاستقرائي
Statistical inference	الاستدلال الإحصائي
Probability	إحتمال
Descriptive statistics	الإحصاء الوصفي
Deductive statistics	الإحصاء الاستنتاجي
Variable	متغير
Domain	مجال
Constant	ثابت
Continuous variable	متغير متصل
Discrete variable	متغير متقطع
Discrete data	بيانات متقطعة
Continuous data	بيانات متصلة
Measurements	القياسات
Enumerations	المسدد
Counting	الترقيم (العد)
Even integer	رقم زوجي
Cumulative rounding errors	أخطاء التقريب المتراكمة
Exponent	أس
Base	أساس
Significant digits (figures)	أرقام معنوية
Independent variable	متغير مستقل
Dependent variable	متغير تابع
Single - valued function	دالة وحيدة القيمة
Multiple - valued function	دالة متعددة القيم
Quadrants	الأرباع
Origin	نقطة الأصل

المصطلحات

Zero point	نقطة الصفر
Rectangular co-ordinates	الإحداثيات المتعامدة
Abscissa	الإحداثى السيني
Ordinate	الإحداثى الصادي
Graph	شكل بياني
Bar graphs	الأعمدة البيانية
Pie graphs	الرسوم الدائرية
Picto graphs	الرسوم التصويرية
Identity	متطابقة
Simultaneous equations	معادلات آتية
Mantissa	الجزء العشري
Characteristic	العدد البياني
Interpolation	الاستكمال
Linear function	دالة خطية
Parabola	قطع مكافئ
Quadratic function	دالة من الدرجة الثانية
Line graph	خط بياني
Time series	سلسلة زمنية
Component part bar chart	خريطة الأعمدة البيانية المجرأة
Percentage component part graph	الشكل البياني للنسب المئوية المجرأة
Complex numbers	الأعداد التخيلية (المركبة)
Natural base of logarithms	الأساس الطبيعي للوغاريتمات

Chapter 2

الفصل الثاني

Range	المدى
Classes	فئات
Categories	طوائف
Class frequency	تكرار الفئة
Frequency distribution	توزيع تكرارى
Frequency table	جدول تكرارى
Grouped data	البيانات المجمعة
Class interval	فترة الفئة
Class limits	حدود الفئة
Lower class limit	الحد الأدنى للفئة
Upper class limit	الحد الأعلى للفئة
Class boundries	الحدود الحقيقية للفئة
Lower class boundray	الحد الأدنى الحقيقى للفئة
Upper class boundray	الحد الأعلى الحقيقى للفئة

Class size (width)	طول الفئة
Class midpoint (mark)	مركز الفئة
Grouping error	أخطاء التجميع
Tally sheet (score)	كشف الحزم
Frequency histogram	المدرج التكرارى
Frequency polygon	المضلع التكرارى
Relative frequency distribution	التوزيع التكرارى النسبى
Percentage distribution	توزيع النسب المئوية
Relative frequency histogram	المدرج التكرارى النسبى
Relative frequency polygons	المضلع التكرارى النسبى
Cumulative frequency distribution	التوزيع التكرارى المجتمع
"Or more" cumulative distribution	التوزيع التكرارى المجتمع « النازل »
"Less than" cumulative distribution	التوزيع التكرارى المجتمع « الصاعد »
Smoothed frequency polygon	المدرج التكرارى المهد
Modal class interval	الفئة المنوالية
Modal class frequency	تكرار الفئة المنوالية
Random	عشوائى
Probability distributions	التوزيعات الاحتمالية

Chapter 3

الفصل الثالث

Subscript (index)	رمز الدليل (الرقم الجانبى الأسفل)
Average	المتوسط
Measures of central tendency	مقاييس النزعة المركزية
Arithmetic mean	الوسط الحسابى
Median	الوسيط
Mode	المنوال
Geometric mean	الوسط الهندسى
Harmonic mean	الوسط التوافقى
Total frequency	التكرار الكلى
Weighting factors	معاملات الترجيح
Weighted arithmetic mean	الوسط الحسابى المرجح
Guessed (assumed) arithmetic mean	الوسط الحسابى الفرضى
Coding method	طريقة الترميز
Transformed	محصول
Bimodal	ذو منوالين
Unimodal	وحيد المنوال
Quadratic mean	الوسط التربيعى

Quartiles	الربيعات
Deciles	العشرات
Percentiles	المئينات
Quantiles	قيم التقسيمات الجزئية
Compound interest formula	صفة الفائدة المركبة

Chapter 4

الفصل الرابع

Variation	الاختلاف
Dispersion	تشتت
Absolute value	القيمة المطلقة
Mean absolute deviation	الانحراف المتوسط (متوسط القيمة المطلقة للانحرافات)
Root Mean square deviation	جذر متوسط مربع الانحرافات
Sample variance	تباين العينة
Population variance	تباين المجتمع
Pooled variance	التباين المجمع
Sheppard's correction	تصحیح شبرد
Absolute dispersion	التشتت المطلق
Relative dispersion	التشتت النسبي
Coefficient of variation (dispersion)	معامل الاختلاف (التشتت)
Standardized variable	متغير معياري
Standard units (scores)	وحدات معيارية (درجات)
Quartile coefficient of variation	المعامل الربيعي للاختلاف
Quartile coefficient of relative dispersion	المعامل الربيعي للتشتت النسبي

Chapter 5

الفصل الخامس

Moment	العزوم
Moment about the mean	العزوم حول الوسط الحسابي
Moment about any origin A	العزوم حول أى نقطة أصل A
Moment about zero	العزوم حول الصفر
Dimensionless moments	العزوم فى شكل غير مميز
Skewed to the right (positive skewness)	ملتو إلى اليمين (التواء موجب)
Skewed to the left (negative skewness)	ملتو إلى اليسار (التواء سالب)
Pearson's first (second) coefficient of skewness	معامل بيرسون الأول (الثانى) للالتواء
Leptokurtic	مدبب
Platykurtic	مفرطح
Mesokurtic	متوسط التفرطح
Percentile coefficient of kurtosis	معامل التفرطح المئينى

Chapter 6

الفصل السادس

Odds	معامل الترجيح لصالح
Empirical probability	الاحتمال الاعتباري
Relative frequency	التكرار النسبي
Axiomatically	بوضع الفروض
Conditional probability	الاحتمال الشرطي
Independent events	أحداث مستقلة
Dependent events	أحداث معتمدة
Compound events	أحداث مركبة
Mutually exclusive	أحداث متنافية
Discrete probability distribution	توزيع احتمالي متقطع
Probability function	دالة احتمالية
Frequency function	دالة التكرار
Discrete random variable	متغير عشوائي متقطع
Chance variable (stochastic)	متغير صدفة (تصادفي)
Cumulative probability distributions	دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي
Distribution function	دالة التوزيع
Probability density function	دالة كثافة الاحتمال
Density function	دالة كثافة
Continuous probability distributions	توزيع احتمالي متصل
Mathematical expectation (expectation)	التوقع الرياضي (التوقع)
Combinatorial analysis	التحليل التوافقي
Arrangement	تنظيمات
Selection	إختيار
Sample space	مجال العينة
Euler diagram	شكل أيلر
Venn diagram	شكل فن
Union	اتحاد
Intersection	تقاطع
Null set	الفئة الخالية
Permutations	تباديل
Baye's theorem (rule)	نظرية بايز
Hypotheses	فروض

Chapter 7

الفصل السابع

Binomial distribution	توزيع ذي الحدين
Binomial expansion (formula)	مفكوك ذي الحدين
Binomial coefficients	معاملات ذي الحدين

Bernoulli distribution	توزيع برنولي
Normal distribution	التوزيع الطبيعي (أو المعتدل)
Normal curve	المنحنى الطبيعي
Gaussian distribution	توزيع جاوس
Standard form	الصيغة القياسية
Poisson distribution	توزيع بواسون
Multinomial distribution	توزيع كثيرات الحدود
Multinomial expansion	مفكوك كثيرات الحدود
Goodness of fit	جودة التوفيق
Chi - Square test	إختبار χ^2 أو χ^2
Normal curve graph paper	ورق رسم بياني للمنحنى الطبيعي
Probability graph paper	ورق رسم بياني لإحتمال

Chapter 8

الفصل الثامن

Estimation	تقدير
Population parameters	معالم المجتمع
Sample statistics	إحصائيات العينة
Test of significance	إختبارات المعنوية
Test of hypotheses	إختبارات الفروض
Theory of decisions	نظرية القرارات
Design of the experiment	تصميم التجارب
Random sampling	عينة عشوائية
Sampling with replacement	معاينة مع الإرجاع
Sampling without replacement	معاينة بدون إرجاع
Sampling distribution	توزيع المعاينة
Sampling distribution of means	توزيع المعاينة للأوساط
Central limit theorem	نظرية الحد مركزة
Asymptotically normal	يؤول إلى التوزيع الطبيعي
Sampling distribution of proportions	توزيع المعاينة للنسب
Sampling distribution of differences of the statistics	توزيع المعاينة للفروق بين الإحصائيات
Independent	إستقلال
Sampling distribution of the sum of statistics	توزيع المعاينة لمجموع الإحصائيات
Standard error	خطأ معياري
Large sampling methods	أساليب العينات الكبيرة
Theory of small samples	نظرية العينات الصغيرة
Experimental sampling distribution	توزيع المعاينة التجريبي

Chapter 9

Unbiased estimator
 Baised estimator
 Efficient estimator
 Inefficient estimator
 Most efficient (best estimator)
 Point estimate
 Interval estimate
 Reliability
 Confidence intervals
 Confidence limit
 Fiducial limit
 Confidence level
 Confidence coefficients
 Critical values
 Probable error

الفصل التاسع

تقدير غير متحيز
 تقدير متحيز
 تقدير كفؤ
 تقدير غير كفؤ
 الأكثر كفاءة
 تقدير بنقطة
 تقدير بفترة
 المأمونية
 فترات الثقة
 حدود الثقة
 حدود الاطمئنان
 مستوى الثقة
 معاملات الثقة
 القيم الحرجة
 الخطأ المحتمل

Chapter 10

Statistical decisions
 Statistical hypotheses
 Null hypotheses
 Alternative hypothesis
 Significant
 Rules of decisions
 Type I error
 Type II error
 Level of significance
 Critical region
 Region of rejection of the hypothesis
 Region of significance
 Region of acceptance of the hypothesis
 Region of non-significance
 Test statistic
 Two - tailed test
 Two - sided test
 One - tailed test
 One - sided test

الفصل العاشر

القرارات الاحصائية
 الفروض الاحصائية
 فروض العدم
 الفرض البديل
 معنوية
 قواعد اتخاذ القرارات
 خطأ من النوع الأول
 خطأ من النوع الثاني
 مستوى المعنوية
 المنطقة الحرجة
 منطقة رفض الفرض
 منطقة المعنوية
 منطقة قبول الفرض
 منطقة عدم المعنوية
 إحصائية الاختبار
 اختبار من طرفين
 اختبار من جانبيين
 اختبار من طرف واحد
 اختبار من جانب واحد

Operating characteristic curves

منحنيات توصيف العمليات

Power of test

قوة الاختبار

Quality control

الرقابة على الجودة

Control charts

خرائط المراقبة

Probably significant

محتمل المعنوية

Experimental significance level (descriptive)

مستوى المعنوية التجريبي (الوصفي)

Power function

دالة القوة

Chapter 11

الفصل الحادي عشر

Small sampling theory

نظرية العينات الصغيرة

Exact sampling theory

النظرية المضبوطة للعينات

"Students" t distribution

توزيع « ستودينت » ت

Chi - square distribution

توزيع كا - تربيع

Number of degrees of freedom

عدد درجات الحرية

t score (t statistic)

إحصائية « ت » t

Z score (z statistic)

إحصائية z

Chapter 12

الفصل الثاني عشر

Observed frequencies

التكرارات المشاهدة

Expected or theoretical frequencies

التكرارات المتوقعة أو النظرية

Dichotomy or dichotomous classification

تقسيم ثنائي

One - way classification table

جدول تقسيم في اتجاه واحد

Two - way classification table (h_{xk} table)جدول تقسيم في اتجاهين (h_{xk})

Contingency tables

جداول الاقتران

Cell frequencies

تكرارات الخلايا

Marginal frequency

التكرار الهامشي

Yates correction

تصحيح ييتس

Coefficient of contingency

معامل الاقتران

Correlation of attributes

إرتباط الصفات

Tetrachoric correlation

ارتباط رباعي

Additive property

خاصية الانجماع

Chapter 13

الفصل الثالث عشر

Scatter diagram

شكل الانتشار

Approximating curve

المنحنى التقريبي

Linear relationship

علاقة خطية

Non - linear relationship

علاقة غير خطية

Curve fitting

توفيق المنحنى

Polynomials

كثيرات الحدود

Semi - log paper
 Log - log paper
 Freehand method of curve fitting
 Slope
 Y intercept
 Residual
 Best fitting curve
 Least square curve
 Least square parabola
 Normal equations
 Center of gravity
 Regression curve of Y on X
 Regression curve of X on Y
 Trend line
 Trend curve
 Approximating plane
 Regression surfaces
 Linear interpolation
 Linear extrapolation
 Multiple regression
 Base period
 Reference period

ورق نصف لوغاريتمى
 ورق لوغاريتمى - لوغاريتمى
 توفيق المنحنى باليد
 الميل
 الجزء المقطوع من محور الصادات
 الباقي
 المنحنى الأحسن توفيقاً
 منحنى المربعات الصغرى
 قطع المربعات الصغرى
 المعادلات الاعتدالية
 مركز الثقل
 منحنى انحدار Y على X
 منحنى انحدار X على Y
 خط الاتجاه العام
 منحنى الاتجاه العام
 المستويات التقريبية
 سطوح الانحدار
 استكمال خطى
 استكمال خارجى
 الانحدار المتعدد
 فترة الأساس
 فترة الإسناد

Chapter 14

Correlation
 Perfect correlation
 Uncorrelated
 Simple correlation
 Simple regression
 Multiple correlation
 Positive (direct) correlation
 Negative (inverse) correlation
 Measures of correlation
 Perfect linear correlation
 Standard error of estimate of Y on X
 Total variation
 Unexplained variation
 Explained variation

الفصل الرابع عشر

ارتباط
 ارتباط تام
 غير مرتبط
 ارتباط بسيط
 انحدار بسيط
 ارتباط متعدد
 ارتباط موجب (طردى)
 ارتباط سالب (عكسى)
 مقاييس الارتباط
 ارتباط خطى تام
 الخطأ المعياري لتقدير Y على X
 الاختلافات الكلية
 الاختلاف الغير مفسر
 الاختلاف المفسر

Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient of correlation	معامل الارتباط
Modified standard error of estimate	الخطأ المعياري المعدل للتقدير
Degrees of freedom	درجات الحرية
Non - Linear correlation	إرتباط غير خطي
Nonsense (spurious) correlation	ارتباط لافعلي له (زائف)
Product - moment formula	صيغة عزم حاصل الضرب
Covariance	تغاير
Bivariate table	جدول مزدوج - ذو متغيرين
Bivariate frequency distribution	توزيع تكراري ذو متغيرين
Correlation table	جدول الارتباط
Coefficient of rank correlation	معامل ارتباط الرتب
Auto correlation	الارتباط الذاتي
Attributes	الصفات
Bivariate population	مجمع ثنائي
Bivariate normal distribution	توزيع طبيعي ثنائي
Fisher's Z transformation	تحويله Z. لفisher
Marginal totals	المجموع الهامشية

Chapter 15

الفصل الخامس عشر

Regression equation	معادلة الانحدار
Partial regression coefficients	معاملات الانحدار الجزئية
Linear regression equation	معادلة الانحدار الخطي
Regression plane	مستوى الانحدار
Least square regression planes	مستويات أنحدار المربعات الصغرى
Zero order correlation coefficients	معاملات الارتباط من الرتبة صفر
Coefficient of multiple correlation	معامل الارتباط المتعدد
Coefficient of multiple determination	معامل التحديد المتعدد
Coefficient of linear multiple correlation	معامل الارتباط المتعدد الخطي
Hyper plane in four dimensional space	مستوى زائلي في مجال ذو أبعاد أربعة
Least square regression equation	معادلة انحدار المربعات الصغرى
Coefficient of partial correlation	معامل الارتباط الجزئي

Chapter 16

الفصل السادس عشر

Characteristic movements (variations)	التحركات المميزة
Forecasting	التنبؤ
Secular variation (trend)	الاتجاه العام
Cyclical variations	التغيرات الدورية
Seasonal variations	التغيرات الموسمية

Decomposition
Moving average of order N
Moving total of order N
N year moving average
N month moving average
Smoothing of time series
Weighted moving average of order N
Seasonal index
Centred 12 month moving average
Link relatives
Cyclical indexes
Long range forecasting
Short range forecasting
Chain relatives

تفكيك
وسط متحرك من الدرجة N
مجاميع متحركة من الدرجة N
N سنة وسط متحرك
N شهر وسط متحرك
تمهيد السلاسل الزمنية
وسط متحرك مرجح من الدرجة N
الدليل الموسمي
١٢ شهر متوسط متحرك مركزي
الوصلات النسبية
الأدلة الدورية
التنبؤ طويل المدى
التنبؤ قصير المدى
سلسلة المناسيب

Chapter 17

Cost of living index
Consumer price index
Price relative
Quantity relatives
Volume relatives
Factor reversal property (test)
Time reversal test
Weighted average of relatives
Laspeyres volume index
Paasche volume index
Value indexes
Simple aggregate index
Circular test
Real incomes
Purchasing powers
Apparent or physical incomes
Cost of living
Consumer index numbers
Deflating (a time series)
Deseasonalize data
Seasonal index numbers

الفصل السابع عشر

الرقم القياسي لتكاليف المعيشة
الرقم القياسي للمستهلك
منسوب السعر
مناسيب الكمية
مناسيب الحجم
خاصية اختبار الانعكاس في المعامل
اختبار الانعكاس في الزمن
الوسط المرجح للمناسيب
رقم لاسبيرز القياسي للحجوم
رقم باشي القياسي للحجوم
الأرقام القياسية للقيمة
رقم قياسي تجميعي بسيط
اختبار الدائرية
الدخول الحقيقية
القوى الشرائية
الدخل الظاهري أو المادي
تكلفة المعيشة
الأرقام القياسية للمستهلك
أنقاص (سلسلة زمنية)
بيانات مغلصة من أثر الموسم
الأرقام القياسية الموسمية

Changing the base period	تغيير فترة الأساس
Shifting the base	إزاحة الأساس
Cost per employee index number	الرقم القياسي لتكلفة العام
Law of supply and demand	قانون العرض والطلب
Overestimate	المغالاة في التقدير
Under estimate	التقليل في التقدير

فهرس أبجدي

(١)

اختبارات الفروض والمعنوية ٢٦٧ - ٢٨٦ ، ٣٠٥ ،

٣١٠ - ٣١٣

٢٧٢ ، ٢٧١ للفروق بين الأوساط والنسب

- ٢٨٩ ، ١٨١ للأوساط

٢٨٩ ، ٢٧١ للنسب

٢٩٥ ، ٢٩٤ ، ٢٧٢ تتضمن توزيع ذي الحدين

٢٨٢ - ٢٧٢ ، ٢٦٩ ، ٢٦٨ تتضمن التوزيع الطبيعي

٢٩٧ - ٢٩٤ المتعلقة بالارتباط والانحدار

٣٢٤ باستخدام توزيع كا - تربيع

٣١٣ - ٣٠٨ ، ٣٠٥ ، ٣٠٤ باستخدام توزيع ت

٨٣ اختلاف

(انظر ايضاً التشتت)

١٣١ ، ١١٦ معامل

٤٨٣ - ٤٧٨ ، ٤٥٨ ، ٤٥٣ دوري

٤١٧ ، ٤٠٥ ، ٤٠٤ ، ٣٩١ مفسر وغير مفسر

٤١٨

١٣٢ المعامل الربيعي

٤٥٨ ، ٤٥٤ عشوائي

٤٥٣ موسمي

٤٥٣ الاتجاه عام

٤٤٢ ، ٤١٨ ، ٤١٧ ، ٤٠٥ ، ٤٠٤ ، ٣٩١ كلي

٦٠ ، ٤٧ ، ٤٧ اخطاء التجميع

١١ ، ٢ اخطاء التقريب المتراكمة

٤٥١ - ٣٨٨ ارتباط

٤٢٧ ، ٤١٤ ، ٣٩٥ ارتباط الرتب ، معامل

٤٢٧ - ٣٨٨ ارتباط بسيط

٤٥١ - ٤٣٠ ارتباط جزئي

٤٤٢ - ٤٣٢ معامل

ارتباط خطي (انظر الارتباط)

٣٢٨ ارتباط رباعي

٣٩٣ ارتباط زائد

١٦٤

١٩٤ - ١٥٦ ، ٦٨

١٥٧

١٥٦

١٨٠ ، ١٦٢

١٥٧

٦٧

١٥٧

١٧٠ - ١٦٥

٢١٨ ، ٢٠٠

١٦٤

١٥٧

١٥٧

١٥٧

١٥٨

١٥٩

١٦٧ ، ١٥٧

٩

١٩ ، ٥

١

١

١

١

٢٤٩ ، ٢٣٦ ، ١

١

٢٢٦ ، ١

١

٢٤٩ ، ٢٢٦

٢٦٩

٢٦٩

اتحاد الفئات

احتمال

فروض

التعريف التقليدي

التحليل التوافقي والاحتمالي

شرطي

منحنيات

إعتباري (تجريبي)

القواعد الأساسية

ورق رسم بياني

العلاقة بنظرية الفئات

تعريف التكرار النسبي

احتمال تجريبي

احداث

مركبة

قابعة

متنافية

احداث مستقلة

احداثيات

إحداثيات متعامدة

احصاء استقرائي

احصاء استنتاجي

احصاء وصفي

احصائيات

استقرائي أو وصفي

تعريف

استنتاجي

عينة

اختبارات من طرف واحد أو جانب واحد

اختبار من طرفين أو من جانبيين

الاختلاف المفسر ٣٩١ ، ٤٠٤ ، ٤٠٥ ، ٤١٧ ، ٤١٨	٣٨٩	ارتباط سالب (عكسى)
الأخطاء المتركة . ١١ ، ٢	٤١٧ - ٤١٦	ارتباط غير خطى
الأرباع ٥ ، ٤	٣٧٧	معادلات يمكن اختصارها لصورة خطية
الارتباط ، معامل ٣٩١ - ٣٩٢ ، ٤٠٥ - ٤٢٧	٤٣٣	انحدار متعدد
الارتباط ، نظرية المعاينة للارتباط ٣٩٢ ، ٣٩٦ ، ٤١٩ ، ٤١٩	٤٣٣ ، ٣٥٤ ، ٣٣٣	العلاقة بين المتغيرات
الارتباط الذاتى ٣٩٤	٣٨٨	ارتباط موجب (طردى)
الارتباط المتعدد ٤٣٠ - ٤٥١	١٤١ ، ٥٠	التواء
الأرقام العشوائية ٢٢٦ ، ٢٣٥ ، ٢٣٦	٣٩٢	ارتباط وهمى
جدول ٥٣٩	٥٣٠ ، ٤٩٧	أرقام قياسية
استخدامها فى اختبار العينات العشوائية ٢٣٥ ، ٢٣٦	٤٩٧	تطبيقات
الأرقام القياسية للقيمة ٥٥٤ ، ٥٢٠ ، ٥٢٠	٤٥٨	دائرى
مناسب ٤٩٨ ، ٤٩٩ ، ٥٠٨	٤٩٧	تعريف
الأعداد التخيلية (المركبة) ٤٢	٥١٩ - ٥٠٩ ، ٥٠٢ - ٥٠٠ ، ٤٩٧	سعر
الأعداد البينائية ٢٤ ، ٢٢ ، ٥	٥١٩ ، ٥١٩ ، ٥٠٣	كبة أو حجم
المركبة ٢٣	٤٧٩ - ٤٦٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٧	موسمى
الأقتران ، معامل ٣٢٨ ، ٣٤١	٥٠١	اختبارات نظرية
الالتواء ١٤٨ ، ١٤٠ ، ١٣٩ ، ٥٠	٥٢٠ ، ٥٠٣	قيمة
لتوزيع ذى الحدين ١٩٥	٢	أس
لتوزيع الطبيعى ١٩٩	٢	أساس
لتوزيع بواسون ١٩٨	٧	اللوغاريتمات المعتادة
المعامل باستخدام الغزوم ١٤٨ ، ١٤٢	٤٣	اللوغاريتمات الطبيعية
سالب (إلى اليسار) ١٤١ ، ٥٠	٣٥٧	استنباط
معامل بيرسون ١٤٨ ، ١٤٨ ، ١٤٢	٢٠٣	استقلال التقسيمات فى جداول الاقتران
موجب (إلى اليمين) ١٤١ ، ٥٠	٣٥٧ ، ٩٠ ، ٧٥ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ٣١ ، ٨	استكمال
المعامل باستخدام الربيقات ١٤٩ ، ١٤٢	٣١ ، ٣٠	فى اللوغاريتمات والأعداد المقابلة للوغاريتمات
المعامل باستخدام المثينات ١٤٩ ، ١٤٢	٢٦ - ١٨ ، ٥	أشكال بيانية
الانحراف الربيعى (انظر نصف المدى الربيعى)		أعمدة (انظر أعمدة بيانية)
الانحراف المتوسط ١١٢ ، ١١٣ ، ١١٨ ، ١١٩	٣٨ ، ٢٤ ، ١٩	خطى
البيانات المجمة ١١٨ ، ١١٣	٢٥ ، ٥	دائرى
لتوزيع الطبيعى ١٩٦	٣٨ ، ٢٥ ، ٢١	أعمدة بيانية
الجانب الأيسر والأيمن من ٦	٦	أقل من
انتشار أو تشتت ٨٣	٦	أكبر من
انحدار ٣٥٤ - ٣٨٨	٤٦٦ ، ٤٦٤	الاتجاه العام ، تقدير
منتجى ٣٥٤	١٧٣	الاحتمال الشرطى
معادلات ٤٣٠ ، ٤٣٤ ، ٤٣٥ - ٤٤٠	٥	الاحداث السينى
خط ٣٦٤ ، ٣٩٦ ، ٣٩٨ - ٤٠٠	٤١٧ ، ٤٠٥ ، ٤٠٤ ، ٣٩١	الاختلاف الغير مفسر
(انظر أيضاً خط المربعات الصغرى)	٤١٨	
	٤١٨ ، ٤١٧ ، ٤٠٤ ، ٣٩١	الاختلاف الكلى

بيانات تقريب (انظر تقريب البيانات)	٣٨٨ ، ٣٥٦	انحدار متعددة
انتشار أو تشتت ٨٣ (انظر أيضاً تشتت واختلاف)	٤٣١ ، ٤٣٠ ، ٣٥٥	مستوى
بيانات متصلة	٣٩٧ ، ٣٩٧	المعاينة
بيانات متقطعة	٣٨٨	بسيط
التمثيل البياني	٣٥٥	سطح
بيانات مجمعة	٣٥٨ ، ٣٥٨ ، ٣٥٢	انحدار الخط
طريقة الترميز (انظر طريقة الترميز)	٨٧ - ٨٣ ، ٧٣	انحراف ، عن الوسط الحسابي
بيانات مغلصة من أثر الموسم	١٢١ ، ١١٥ - ١١٢	انحراف معيارى
الباقى	١٢٧ - ١٢٣ ، ١١٥	طريقة الترميز
البيانات الختام	٣١٥ ، ٣١٤ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ، ٢٥٢	فترة الثقة
		مصصح (انظر تصحيح شبرد)
(ت)	١٢٧ ، ١٢٢ - ١١٣	من البيانات المجمعة
تباديل	١٣١	خاصية النهاية الصغرى
تباین	١١٠	للتوزيع الاحتمالى
(انظر أيضاً الانحراف المعيارى)	١٤٤ - ١٤٢ (انظر أيضاً الخطأ	لتوزيعات المعاينة
تحقيق شارليز		المعيارى)
المجمع	١٣١ ، ١٢٩ ، ١١٥ ، ١١٥	خصائص
عينة معدلة	١١٣	العلاقة بين المجتمع والعينة
توزيع احتمالى		العلاقة بالانحراف المتوسط ونصف المدى الربيعى
لتوزيع المعاينة للأوساط	١٢٨ ، ١٢٠ ، ١١٦	
العلاقة بين المجتمع والعينة	١٢٧ ، ١٢٤ ، ١١٤	الطريقة المختصرة للحساب
تصحيح شبرد	٤٠٢ ، ٤٠١ ، ٣٩١	الخطأ المعيارى للتقدير
تحركات أو تغيرات دورية ٤٥٣ ، ٤٥٨ ، ٤٧٨ - ٤٨٢	٤٤١ ، ٤٣٢ ، ٤٣٢	
تحليل السلاسل الزمنية	٢٧ ، ٦	آنى
(انظر أيضاً السلاسل الزمنية)		
الخطوات الأساسية فى		
تحقيق شارليز		(ب)
للوّسط والتباين		
للزوم		
تحويلة Z	١٩٥	برنولى ، جيمس
تخليص البيانات من أثر الموسم ٤٥٨ ، ٤٧٦ ، ٤٧٧		بيانات ، متصلة (انظر بيانات متصلة)
ترقيم (عد)	٤٨٣ ، ٤٥٩	قابلية للمقارنة
تشتت	٤٧٧ ، ٤٧٦ ، ٤٥٨	التخلص من أثر الموسم
مطلق		متقطع (انظر بيانات متقطعة)
معامل		تشتت (انظر التشتت)
مقاييس	٤٥	مجمع
نسبى	٤٥	معام

٥٤	تكرار متوالية	١٤٨ ، ١٤٠	تصحیح شبرد ، للزوم
٤٨	نسبى	١٢٧ ، ١٢٦ ، ١١٦	التباين
٤٨	تكرار متجمع	٣٣٢ ، ٣٢٩ ، ٣٢٦	تصحیح ييتس للاستمرار
٦٥ - ٦٢ ، ٤٨	توزيع أو جدول	٣٣٩ ، ٣٣٦ ، ٣٢٦	في جداول الاقتران
٤٨	مضلع	٢٢٦	تصميم التجارب
٤٨	تكرار نسبى	٤٠٧ ، ٣٩٣	تفاير
٤٩	منحنيات	٤٥٣	تغيرات الاتجاه العام
١٥٦	تعريف الاحتمال	٤٥٣	تغيرات طويلة المدى
٦٠ ، ٤٨	توزيع جدول	٤٥٨ ، ٤٥٤	تغيرات عشوائية
		١٤٩ ، ١٤٩ ، ١٤٢	تفرطح
٤٠٩ ، ٣٢٥	تكرارات الخلايا	١٥١ ، ١٤٨ ، ١٤٣	معامل العزوم
٣٢٣	تكرارات نظرية	١٩٥	لتوزيع ذى الحدين
٤٨٣ ، ٢٥٥	تنبؤ	١٩٦	للتوزيع الطبيعى
١٧٩ ، ١٧٧ ، ١٦٣	توافيق	١٩٨	لتوزيع بواسون
١٥٩	توزيع احتمال تراكمى	١٤٩ ، ١٤٢	معامل الميئات
١٥٩	توزيع احتمال متصل	١٦٤	تقاطع الفئات
١٥٩	توزيع احتمال متقطع	٣٥٥ ، ٢٦٥ - ٢٤٩ ، ٢٢٦	تقدير
٥٩ ، ٤٨	توزيع النسب المئوية		(انظر أيضاً تقديرات)
١٩٥	توزيع برنولى		والانحدار (انظر الانحدار)
	(انظر أيضاً توزيع ذى الحدين)	٢٦٥ - ٢٤٩	ونظرية المعاينة
٢١٦ ، ٢١٥ ، ١٩٨	توزيع بواسون	٤٨٣ - ٤٧٨	التغيرات الدورية
٢١٧	توفيق البيانات	٤٨٣ - ٤٧٨	التغيرات غير المنتظمة
١٩٨	خصائص	٤٧٧ ، ٤٦٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٦	التغيرات الموسمية
١٩٩ ، ١٩٨	العلاقة بتوزيع ذى الحدين والطبيعى	٢٥٠	تقدير بنقطة
٣١٢ - ٣٠٨ ، ٣٠٣	توزيع ت	٢٥٠	تقدير في فترة
٣٠٩ ، ٣٠٩ ، ٣٠٤	قترات الثقة	٢٥٣ ، ٢٥٣ ، ٢٥٠ ، ٢٤٩	تقدير كفى
٥٣٤	جدول قيم الميئات	٢٥٣ ، ٢٥٣ ، ٢٤٩	تقديرات متحيزة وغير متحيزة
	اجتبارات الفروض والمعنوية		(انظر أيضاً تقدير)
٣١٢ - ٣٠٨	الاستخدام في نظرية المعاينة للارتباط والانحدار	٢٥٠	فترة الثقة
٤١٩ ، ٤١٩ ، ٣٩٧	توزيع تكرارى :	٢٥٣ ، ٢٥٣ ، ٢٥٠ ، ٢٤٩	كفى وغير كفى
١٧١ ، ١٧٠ ، ١٥٩ ، ٦٨	احتمال	٢٥٠	فترة ونقطة
	معاينة (انظر توزيع المعاينة)	١٠ ، ٧	تقريب البيانات
٤٠٩ ، ٣٩٤	توزيع تكرارى (أو جدول) ذو متغيرين		تقريب توزيع ذى الحدين إلى التوزيع الطبيعى
٣٩٦	توزيع طبيعى	٢١٣ ، ٢١٣	
٣٩٥	متجمع	١٧٩ ، ١٦٣	تقريب سترلينج لـ $n!$
		٣٢٣	تقسيم ثنائى
		٤٨	تكرار الفئة
			متجمع

- توزيع تكرارى متجمع أو نسبي «الصاعد» ٤٨ ، ٦٢-٦٦
توزيع جاوس (انظر التوزيع الطبيعي)
توزيع ذى الحدين ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٩ ، ٢٠٥
توفيق البيانات ٢١٧ ، ٢١٧
خصائص ١٩٦
العلاقة بالتوزيع المعتدل ١٩٨ ، ٢١٣ ، ٢١٤
العلاقة بتوزيع بواسون ١٩٩
اختبارات الفروض باستخدام ٢٧٢ ، ٢٩٤ ، ٢٩٦
توزيع كا - تربيع ٣٠٣ ، ٣٠٦ ، ٣١٣ - ٣١٨
فترات الثقة باستخدام ٣٠٦ ، ٣١٤ ، ٣١٦
جداول المنهات لـ ٥٣٥
اختبارات الفروض والمعنوية باستخدام ٣٢٤
توزيع كثيرات الحدود ١٩٩ ، ٢١٧ ، ٣٢٦
توزيع وحيد النوال ٧٦
توزيعات احتمالية ١٦٠
مستمرة ١٦١
متجمعة ١٦٠
متقطعة ١٦٠
توزيعات المعاينة ٢٢٧ ، ٢٣٠
تجربى ٢٣٣
للفروق والمجموع ٢٢٩ ، ٢٤٠ - ٢٤٣
للنسب ٢٢٨ ، ٢٣٧ - ٢٤٠
للتباين ٢٤٣ ، ٢٤٤
لإحصائيات مختلفة ٢٢٩
توزيعات تكرارية ٤٥ - ٧١
نسبي أو نسبة مئوية ٤٨ ، ٥٨
قواعد تكوين ٤٧
توفيق البيانات ١٩٩ ، ٢١٧ - ٢١٩
(انظر أيضاً توفيق المنحنيات)
استخدام توزيع ذى الحدين ٢١٧ ، ٢١٧
استخدام التوزيع الطبيعي ٢١٨ ، ٢١٨
استخدام توزيع بواسون ٢١٩
استخدام ورق رسم بياني احتمالي ٢١٨
توفيق المنحنى ، طريقة التوفيق باليد ٤٥٦ ، ٤٥٦
طريقة المربعات الصغرى ٣٤٩ - ٣٧٧
المعادلات الخاصة المستخدمة في ٣٥٠
توقع ، رياضى ١٦١ ، ١٧٣
- التحديد المتعدد ، معامل ٤٣٣ ، ٤٤١
التحركات المميزة في السلاسل الزمنية ٤٥٣ ، ٤٥٣ ، ٤٦٠
تقسيم الـ ٤٥٣
التحليل التوافقي ١٦٢ ، ١٨٠ ، ١٨٢
الاحتمال و ١٨١ ، ١٨٢
التشتت المطلق ١١٦ ، ١٣١
(انظر أيضاً التشتت)
التشتت أو التغير النسبي ١١٦ ، ٨٣١
التغيرات الموسمية ٤٥٣
التكرارات المتوقعة أو النظرية ٣٢٣
التكرارات المشاهدة ٣٢٣
التكرارات الهامشية ٣٢٥ ، ٤١٠
النواء سالب ٥٠ ، ١٤١
التوزيع التكرارى المتجمع «أو أكثر» ٤٨ ، ٦٢-٦٣
التوزيع الطبيعي ١١٥ ، ١١٥ ، ١٣٠ ، ١٩٦ ، ١٩٨
٢٠٦ - ٢١٢
(انظر أيضاً المنحنى الطبيعي)
توفيق البيانات باستخدام ٢١٧ ، ٢١٧
خصائص ١٩٩
العلاقة بتوزيع ذى الحدين ١٩٨ ، ٢١٣ ، ٢١٥
الصفة القياسية ١٩٦
اختبارات الفروض أو المعنوية ٢٦٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٢ - ٢٨١
التوزيع المتجمع النسبي ٤٨ ، ٦٢-٦٥
التوزيع النظرى أو النموذج ١٩٩
(ج)
جدول
الاقتران (انظر جدول الاقتران)
ارتباط ٣٩٣ ، ٤١٠
عناصر ٥١
تكرار (انظر جدول تكرارى)
جدول أسى ٥٣٨
جدول الحزم ٤٧ ، ٥٧
جدول تكرارى (انظر توزيعات تكرارية)
متجمع ٤٨ ، ٦٢ - ٦٦
نسبي ٤٨

جداول الاقتران	٣٢٥ - ٣٢٧ ، ٣٣٦ - ٣٣٩	الخرائط (انظر الأشكال البيانية)
معامل الاقتران من	٣٢٧ ، ٣٤٠	الخرائط البيانية (انظر الأعمدة البيانية)
صيغة كا ^٢ في	٣٢٦ ، ٣٢٧	الخطأ المعيارى لتوزيعات المعاينة ٢٤٥،٢٤٣،٢٣٠،٢٢٩
جذر متوسط المربعات أو الوسط التربيعى	٧٨ ، ٩٩	جدول للإحصائيات المختلفة ٢٣٠
جوست	٣٠٤	الخطأ المعيارى للتقدير ٤٠١،٣٩٠ - ٤٠٤،٤٣٢،٤٣٢
جودة التوفيق ٢٠٠ (انظر توفيق البيانات)		٤٤١
الجزء العشرى	٨ ، ٢٤ ، ٣١	معدل ٣٩٢
الجزء العشرى للوغاريتمات ، جدول	٥٣٦ ، ٥٣٧	الحميسات ١٠٠
الجزء المقطوع من محور X ، Y ، ٣٥١ - ٣٥٧		

(د)

دالة	١٦٤،١٥٤٤
توزيع	١٦٠،١٥٩
تكرار	١٦٠
خطى	٣٥١،١٩
متعدد القيمة	١٦٤٤
احتمال	١٥٩
من الدرجة الثانية (انظر دالة من الدرجة الثانية)	
وحيد القيمة	١٦٤٤
دالة التكرار	١٦٠
دالة التوزيع	١٦٠ ، ١٦٠
دالة القوة	٢٨٤
دالة توصيف العمليات	٢٨٤
دالة خطية	٣٥٠،١٩
دالة كثافة الاحتمال	١٦١
دالة من الدرجة الثانية	٣٥٠،٢٠
النهاية الصغرى	١٣١
درجات الحرية	٣٠٧،٣٠٥،٣٠٤
دوال وحيدة القيمة	١٦٤٤
دورات الأعمال	٤٥٣

(ر)

رقم باشى القياسى	٥١٧ - ٥١٤،٥٠٤،٥٠٢
رقم لاسبيرز القياسى	٥١٩،٥١٧ - ٥١٤،٥٠٣،٥٠٢
رقم مارشال - أدجوت القياسى	٥١٨،٥١٧،٥٠٣
رمز الدليل (الرقم الجانبي الأسفل)	٤٣٥،٤٣٠،٧٢
رمز الدليل الأعلى	٥٠١،٥٠٠
رمز التجميع	٨٠٠،٧٩،٧٢
رموز المتباينات	٦

(ح)

حدث مركب	١٥٨
حدود الثقة	٢٥٠
حدود الفتة	٤٦ ، ٤٦
عليا ودنيا	٤٦
الحقيقية	٤٦
حدود المأمونية (انظر حدود الثقة)	
حذف المجاهيل في المعادلات الآتية :	
حل المعادلات	٦
الحدود الحقيقية للفئات ، العليا والدنيا	٤٦

(خ)

خاصية الدورية أو الدائرية في مناسيب الأسعار	٤٩٨
خاصية أو اختبار الانعكاس في الزمن	٥٢٠،٤٩٨
خرائط الرقابة	٢٨٧،٢٧١
مجموعة	٣١٢،٢٩١
خط (انظر خط مستقيم)	
خط مستقيم	٣٦٣-٣٥٦،٣٥٠،١٩
معادلة	٣٥٣،٣٥٠
المربعات الصغرى	٢٨٩،٣٧٨،٣٦٣،٣٥٣،٣٥٣
	٥٤٠،٤٠١-٣٩٧
اتحدار	٤٠١-٣٩٧،٣٦٩،٣٦٥
ميل	٣٥٨،٣٥٧،٣٥١
خطاً من النوع الأول وخطاً من النوع الثانى	٢٦٨،٢٦٨
	٢٨٥،٢٨٥،٢٨١،٢٧٦،٢٧٤
منحنى توصيف العمليات	٢٧١

٦٤	شكل فن (انظر شكل اير)	١١٤٣	رموز علمية
٢٤	شكل قضبي	٢٣٦٠٢٣٥٠٢٢٦	الأرقام العشوائية
	الشكل البياني للنسب المئوية المخزاة	٥٣٩	جدول
	(ص)	٢٣٦٠٢٣٥	استخدامها في اختبار العينات العشوائية
	صدفه ٦٧ (انظر أيضاً الاحتمال)	١١٠-٩٩٠٧٩٠٧٩	الربيعات
	صيغة العزوم للتفرطح ١٥٠٠١٤٨٠١٤٢ (انظر أيضاً التفرطح)	١٠١-٩٩٠٧٩	من البيانات المجمعة
٩٦	صيغة الفائدة المركبة	٢٣١	الخطأ المعياري للربيعات
٤١٤٠٤١٣٠٣٩٥	صيغة سيرمان لارتباط الرتب	٢٢٠٢٢٠٥	الرسوم التصويرية
٠٣٩٣٠٣٩٣	صيغة عزم حاصل الضرب لمعامل الارتباط	٢٥٠٥	الرسوم الدائرية
٤٠٧-٤٠٦		٢٧١	الرقابة على جودة الإنتاج
	(ط)		خرائط (انظر خرائط الرقابة على الجودة)
٤٧٠-٤٦٨٠٤٥٧	طريقة الاتجاه العام للنسب المئوية	٥٢٠٠٥١٧٠٥١٦٠٥٠٢	الرقم القياسي المثالي لفيشر
٤١٠٠٣٩٣	طريقة الترميز ، لمعامل الارتباط	٤٧٧-٤٦٦٠٤٥٧٠٤٥٧	الرقم القياسي الموسمي
٨٨٠٨٧٠٧٥	متوسط	٥٢٣٠٤٩٧	الرقم القياسي لأسعار المستهلك
١٤٦٠١٤٤٠١٤٠	للغزوم	٤٩٧	الرقم القياسي لتكلفة المعيشة
١٢٧-١٢٤٠١١٤	للاختلاف المعياري	٥٢٠٠٥٠٤	الرقم القياسي للقيمة
٥٠٣	طريقة السنة المالية	٥٠٩٠٤٩٩	مناسيب
٥١٩٠٥٠٣٠٥٠٣	طريقة المتوسط المرجح للمناسيب		الرقم القياسي للأسعار (انظر الأرقام القياسية)
٤٦٥٠٤٥٦٠٣٥٣	طريقة المربعات الصغرى	٥١٩٠٥١٩٠٥٠٣	الرقم القياسي للكية أو الحجم
	(انظر أيضاً توفيق المنحنيات)	٥٠٨٠٤٩٩٠٤٩٨	المناسيب
٤٧٠-٤٦٨٠٤٥٧	طريقة النسبة إلى الاتجاه العام	٣٠٠٣٠٠٨	العدد المقابل للوغاريتم
٤٧٢٠٤٧٠٠٤٥٧	طريقة النسبة إلى المتوسط المتحرك		(س)
٤٦٣٠٤٥٥	طريقة أنصاف المتوسطات	٣٥٥	سطح ، انحدار
٥٠٢	طريقة سنة الأساس	٥٠٦٠٤٩٧	سلسلة الأرقام القياسية
٥٠٢	طريقة سنة المقارنة	٥١٠٠٤٩٩	سلسلة المناسيب (انظر أيضاً وصلة المناسيب)
٥١٦	طلب مرن	٤٩٦-٤٥٢٠٢١	السلاسل الزمنية
٤٥	طوائف	٤٩٦-٤٥٢	تحليل
٤٦	طول الفتة ، حجم أو سعة	٤٦٠٠٤٥٣٠٤٥٣	التحركات المميزة
٥١٢-٥١٠٠٥٠١	الطريقة التجميعية البسيطة	٤١٥٠٤١٥٠٣٩٥	الارتباط بين السلاسل الزمنية
٥١٩٠٥١٩٠٥١٦-٥١٤٠٥٠٢٠٥٠٢	المرجحة	٥٢٥٠٥٢٢٠٥٠٥	إنقاص
		٣٧٨-٣٧٠٠٣٥٤	توفيق المنحنيات
		٤٥٢٠٢٠	الرسم البياني
		٤٥٥٠٤٥٥	تمهيد

(ع)

٤٠٣	عد
٢٣٥	عدد المعاينة

(ش)

٤٠١-٣٩٨٠٣٤٩	شكل الانتشار
٤٣١	دو أبعاد ثلاثة

٥٤	فترة المتوالية	٩٣٠٧٦	علاقة اعتبارية بين الوسط ، الوسيط ، المتوال
٤٦	مفتوحة	١٢٨٠١١٦	بين مقاييس التشتت
٤٦	طول أو سعة	٤١٨٠٣٥٥٠٣٥٤٠٣٤٩	علاقة خطية بين المتغيرات
٢٦٧	فروض ، بديلة	٥١	عناصر الجدول
٢٦٧	العلم	٦	عناصر المعادلات
١٩٤	احتمال ، باستخدام قاعدة بايز	٦	المتباينات
٢٦٧٠٢٢٦	اختبارات	٢٢٦٠٦٧٠١	حصة
(انظر أيضاً اختبارات القروض والمعنوية)		٢٢٦٠٦٧	عشوائية
١٩٥٠١٥٦	فشل	٢٥٠٠٢٢٦	إحصائية
الفرض البديل ٢٦٧ (انظر أيضاً القروض)		١٣٩	العزوم
(ق)		١٤٧٠١٤٧٠١٤١	طريقة شارليز لمراجعة الحسابات
		١٤٦٠١٤٤٠١٤١	طريقة الترميز في الحساب
٤٨٣٠٤٥٩	قابلية البيانات للمقارنة	١٣٩	تعريف
٢٧٩٠٢٧٥	قدرة حارقة على الإدراك	١٤١	غير مميز
٣٥٠	قطع زائد	١٤٥٠١٤٥٠١٤٥٠	البيانات المجمعة
٣٥١٠٢٠	قطع مكافئ.	١٤٢٠١٤٥	العلاقة بين
٢٦٧	قرار ، قواعد	١٤٨٠١٤١	تصحيح شبرد
(انظر أيضاً القرارات الإحصائية)		١٤١	العزوم في شكل غير مميز
٣٠٢-٢٦٧٠٢٢٦	قرارات ، نظرية	١٠٢-٩٩٠٧٩٠٧٩	العشيرات
٢٧١	قوة الاختبار	١٠٢-٩٩٠٧٩	من بيانات مجمعة
٧٩	قيم التقسيمات الجزئية	٢٣٠	الاعطاء المعيارية
٢٠٦٠١٣٣٠١٣٢٠١١٧	قيم معيارية	١٢٦	العمر العقل
٢٠٦٠١١٧	وحدات		
٢٦٧	للقرارات الإحصائية		
	فروض (انظر القروض)	٩٧	فائدة مركبة
٢٤٩٠٢٢٦٠١	استدلال		فئات ٤٦ (انظر أيضاً فترة الثقة)
٤٦٤٠٣٧٣	القيم الاتجاهية	١٦٤	فترة خالية
١١٢	القيم المطلقة	٤٩٧	فترة الأساس للأرقام القياسية
(ك)		٥٢٢٠٥٢١٠٥٠٦٠٥٠٤٠٥٠٤	تغير
		٢٥٧٠٢٥٣٠٢٥١٠٢٥٠	فترة الثقة ، متوسط
٣٢٨	كا - تربيع ، خاصية الانجماع في	٢٥٩٠٢٥٧٠٢٥١	لنسب
٣٢٤٠٣٢٣	تعريف	٣١٥٠٣١٤٠٢٦٢٠٢٦٢٠٢٥٣	للانحراف المعياري
(انظر توزيع كا - تربيع)		٢٦٠٠٢٦٠٠٢٥٣-٢٥٢	للمجموع والفرق
٣٢٨٠٣٢٥	صيغة ، في جداول الاقتران	٤٢١٠٣٩٨-٣٩٤	للارتباط والانحدار
٣٤٨٠٣٢٤	اختبار	٣١٥٠٣١٤٠٣٠٦٠٣٠٦	باستخدام توزيع كا ^٢
٣٤٠٠٣٣٧٠٣٢٦	تصحيح بيتس لـ	٢٦٤-٢٥٣٠٢٥٣-٢٥٠	باستخدام التوزيع الطبيعي
٣٥٠	كثيرات الحدود	٤٦٠٤٦	فترة الفته
كشف التسجيل (انظر كشف الخزم)		٩٠٠٧٦	الوسيطية

١٥١	متوالية عديدة، عزوم الـ	(ل)	
١٣٧	قباين الـ	٣٤-٣٠٤٨٤٧	لوغاريتمات
١٤٢	متوسط التفرطح	٤٢٤٧	أساس
	متوسط طريقة المناسيب	٣٢٤٣٠٤٨٤٧	ميز
٥١٣٤٥١٢٤٥٠١	البسيطة	٣٤-٣٠٤٩٤٧	معتاد
٥١٩٤٥٠٣٤٥٠٢	المرجحة	٣٢٤٣٢٤٩	الحساب باستخدام
٤٦٣٤٤٥٦	متوسط، طريقة شبيهات الـ	٣١٤٣١	الاستكمال في
٤٦٣٤٤٦٢٤٤٥٧	متوسط، متحرك مركزي	٣١٤٣١٤٨	الجزء العشري
٢٠٢	مثلث بسكال	٤٤	طبيعي
١٨٤٤١٨٣٤١٦٤	مجال العينة	٥٣٧٤٥٣٦	الفروق ، جدول
٩٤٢	مجال المتغير	٥٣٧٤٥٣٦	جدول اللوغاريتمات المعتادة
٤٣٣	مجال ذو أربعة أبعاد		
٢٢٦٤١	مجتمع	(م)	
٢٢٧٤١	محدود أو لا نهائي		متباينة
	معالم (أنظر معالم)	٢٩٤٦	متطابقة
٢٢-٢٠	الولايات المتحدة	٥	متغير
٥١٤	مجموعة سلمية	١٦٤٩٤٥٤١	متصل
٥	محاور X و Y في نظام الإحداثيات المتعامدة	٩٤١	تابع
٥	مستوى Y X	١٦	متقطع
٢٣٨	مخاطره	٩٤١	مجال
١٤٢	مدبب	٩٤١	مستقل
١١٨٤١١٦٤١١٢٤٥١٤٤٥	مدى	١٦٤٤	يتوزع توزيعاً معتدلاً
١١٤	المدى بين الربيقات	١٩٧	عشوائي (أنظر متغير عشوائي)
١٢٠٤١١٣٤١١٣	نصف المدى الربيعي		معياري
١٢٠٤١١٣٤١١٣	المدى المنهني (٩٠-١٠)	١٣٣٤١٣٢٤١١٦	تصادفي (أنظر متغير عشوائي)
١٢٠٤١١٣٤١١٢	مدى المنهينات (٩٠-١٠)		متغير تصادفي (أنظر متغير عشوائي)
٥٨٤٥٣٤٤٧	مدرج		متغير متصل
٩٢٤٨٩	حساب الوسيط من	٩٤٢	متغير مستقل
٥٨٤٤٨	تكرار نسبي أو متوى	١٦٤٤	متغير متقطع
١٧١	احتمال	٩٤٢	متغير تابع
٣٥٣	مركز الثقل	١٦٤٤	تغير ، في معادلة الانحدار
٥٣٥٤٣٠٦	مساحات توزيع كا - تربيع	٤٣٢	متغير عشوائي
٥٣٤٤٣٠٣	توزيع ت	١٧١٤١٧١٤١٦٤٤١١٠٤١٦٠	متصل
٥٣٣٤٢٠٨٤٢٠٦٤١٩٧	تحت المنحنى المعتدل	١٧١٤١٦٠	متقطع
٤٣١٤٤٣٠٤٣٥٥٤٥	مستوى	١٧١٤١٦٠	متغير معياري
٤٣١٤٤٣١٤٣٥٥	المربعات الصغرى	١٣٣٤١٣٢٤١١٧	متغيرات ، العلاقة بين
٥	X Y	٤٣٠٤٣٤٩	(أنظر أيضاً توفيق المنهينات ، الارتباط ، الانحدار)
٤٣٤	مستوى زائدي		

مستويات الثقة ، جدول	٢٥٠	مقدرات (انظر التقديرات)	٢٥٣٠٢٥٣٠٢٥٠٠١٤٩
مضروب	١٦٢	مقدرات غير كفؤه	٤٩٧
مضلع تكرارى	٦٠-٥٣٠٤٧	مكتب إحصاءات العمل	٥٠٧٠٥٠٥٠٤٩٨٠٤٩٧
مثنوى أو نسبى	٥٨٠٤٨	مناسيب الأسعار	٤٩٧
مهد	٦٧٠٦٦٠٥٠	رموز	٤٩٨
معادلات	٢٧٠٢٦٠٦	خصائص	٣٥٠
مكافئة	٢٧٠٦	منحنى أسى	منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى (انظر المنحنى المعيارى)
الجاناب الأيسر والأيمن من	٦	منحنى القوة	٢٨٥٠٢٨٥
معتدل (انظر المعادلات الاعتدالية)	٢٥٠٠٣٤٩	(انظر أيضاً منحنى توصيف العمليات)	٣٧٣٠٣٥٥
للمنحنيات التقريبية	٤٢	منحنى أو خط الاتجاه العام	٥٠
من الدرجة الثانية	٤٤١٠٤٣٥٠٤٣٤٠٤٣٠	منحنى تكرارى ذو الشكل الناقوس	٥٠
انحدار	٢٧٠٦	منحنى تكرارى ذو قمتين	٥٠
آنى	٦	منحنى تكرارى رائى	٥٠
حل	٢٧	معكوس	٦٥-٦٢٠٤٩
تحويل	٢٧٠٦	منحنى تكرارى متجمع نسبى	١٠١٠٩٩
معادلات آنية	٤٢	العشيرلر ، المئينات والربيعات المحسوبة	٦٢٠٤٨
معادلات من الدرجة الثانية	٤٢	أقل من	٩٢٠٩١
صيغة الحسل	٢٤٩	الوسيط محسوب من	٦٣٠٦٣٠٤٩
معالم ، تقدير	٢٤٩٠٢٢٦	أو أكثر	٦٤٠٤٨
(انظر أيضاً التقدير)	٤٣٤٠٤٣٢	نسبة مثنوية	٦٧٠٦٦٠٥٠
المجتمع	١٥٧	مهد	منحنى توصيف العمليات (منحنى OC)
معامل الارتباط من الرتبة صفر	٤٠٥٠٣٩١	منحنى جومبرتز	٣٥١
معامل الترجيح لصالح	٤٤٢٠٤٣٣	منحنى لوجستى	٥٠
معامل التحديد	١٤٩٠١٤٣	منحنى متآئل أو شكل ناقوس	٣٥٠
معامل متعدد	١٤٨٠١٤٨٠١٤٢	منحنى من الدرجة الثانية	٣٥٠
معامل التفرطح المثنوى	٤٣١	دالة	منحنى من الدرجة الرابعة
معامل بيرسون للالتواء	٧٣	معاملات الترجيح الجزئية	دالة
معاملات الانحدار الجزئية	٣٠٤٠٢٥٠	معاملات الترجيح	منحنى من الدرجة N
معاملات الثقة	٢٠٢٠١٩٥	معاملات دى الحدين	منحنيات تكرارية
معاملات دى الحدين	٢٠٢	مثلث بسكال لـ	نسبى
مثلث بسكال لـ	١٤٢	مفرطح	انمط
مفكوك دى الحدين (أو صيفه)	٢٠٢٠١٩٥	مفكوك دى الحدين	منحنيات تكرارية غير متآئلة
مفكوك كثيرات الحدود	١٩٩	مفكوك كثيرات الحدود	منحنيات تكرارية ملتوية
مقاييس النزعة المركزية	١٣٥-٧٢	مقاييس النزعة المركزية	المأمونية

٥٣٢،٢٠٨،٢٠٦،١٩٦	(المنحنى) المساحة تحت المنحنى	١٠١-٩٩،٧٩،٧٩	المتينات
٢٠٠	ورق رسم بياني	١٠٢-٩٨،٧٩	من البيانات المجمعة
٥٣٢،٢٠٩	إحداثيات	٥٣٥،٣٠٦	لتوزيع كا - تربيع
٢٥٠	المنحنى الهندسى	٥٣٤،٣٠٣	لتوزيع ت
٢٦٩	المنطقة الحرجة	٨١،٧٣	المتوسط
٣٠٦،٣٠٤،٢٥٠	القيمة		انحراف (انظر الانحراف المتوسط)
٩٣،٩٢،٧٦،٧٦،٧٢	النوال	٤٥٥،٤٥٥	متحرك
٩٣	إثبات صيغته		(انظر متوسطات متحركة)
٩٣،٧٦	للبيانات المجمعة	٤٦٨،٤٦٦،٤٥٧	طريقة النسب المتوية
٩٤،٨٨	العلاقة بالوسط الحسابى والوسيط	٥١٣،٥١٢،٥٠٢	المتوسط البسيط لطريقة المناسيب
		٤٦٣،٤٥٩،٤٥٥،٤٥٥	المتوسطات المتحركة
		٤٦٢،٤٦٢،٤٥٨	مركزية
		٤٥٧	طريقة النسب
		٤٦٣،٤٥٦	المرجحة
١٩٥،١٥٦	نجاح	٤٥٥	المجاميع المتحركة ٤٥٥
٢٩٣،٢٨٩،٢٧٠،٢٥٩،٢٥٧،٢٥١،٢٣٠،٢٢٨	نسب		المجموعة الكلية (المجتمع)
٢٦٠،٢٥٧،٢٥١	فترة الثقة		(انظر أيضاً المجتمع)
٢٢٨،٢٢٨	توزيع المعاينة		المدى الربيعى
٢٩٣،٢٨٩،٢٧٠	اختبارات الفروض	١١٣	المربعات الصغرى منحنى
١٢٠،١١٣،١١٣	نصف المدى الربيعى	٣٥٢	خط
	نظام الإحداثيات المتعامدة :	٤٤٠،٣٩٨،٣٨٩،٣٧٨،٣٦٢،٣٥٣،٣٥١	
	(انظر الإحداثيات المتعامدة)	٥٤٠	
٣٥٥	ذو أبعاد ثلاثة	٣٨٣،٣٨٠،٣٥٤	قطر مكافئ
٢٢٨٠	نظرية النهاية مركزية	٤٣١،٤٣٠،٣٥٥	مستوى
٣٢٢-٣٠٣،٢٤٨-٢٢٦	نظرية العينات	٥٤٠	المعادلات الاعدالية ، إثبات
٢٣٠	الكبيرة	٥٤٠،٣٥٣	لخط المربعات الصغرى
٤١٩،٤١٨،٣٩٦،٣٩٤	للاترباط	٣٥٤	لقطع المربعات الصغرى
٣٩٧،٣٩٧	للاتخاذ	٤٣٥،٤٣١،٤٣١	لمستوى المربعات الصغرى
٣٢٢-٣٠٣،٢٣٠	الصغيرة	١٣١	المعامل الربيعى للانحراف أو التشتت
٢٦٦-٢٥٠	الاستخدامات فى التقدير	١٤٨،١٤٢	للاتواء
-٢٦٧	الاستخدام فى اختبارات الفروض والمعنوية	١٣١	للتشتت
٢٨٥		٢٣٢،٢٣١،٢٢٨-٢٢٦	المعاينة مع الإرجاع
١٩٤	نظرية بايز (أو قاعدة)	٢٣٢،٢٣١،٢٢٨-٢٢٦	بدون إرجاع
٥	نقطة الأصل فى نظام الإحداثيات المتعامدة	٣٥٠	المنحنيات التقريبية
٣٧١	فى السلاسل الزمنية	٣٥٠،٣٥٠	معادلات الـ
٥	نقطة الصفر	٥١	المنحنى التكرارى متعدد القيم
٢٦	نقل ، فى المعادلات	٥١	المنحنى المعتدل
٢٩	فى المتباينات		(انظر أيضا التوزيع الطبيعى)

٨٩٠٨٣	تأثير القيم المتطرفة على	(و)	
٨٩٠٧٥	الطرق المطولة والمختصرة لحساب		
٨٢٠٧٤	للأوساط الحسابية	٣٧٩٠٣٥١	ورق رسم بيانى ، لوغاريتم - لوغاريتم
١٧٣	لتوزيع الاحتمال	٢١٧٠١٩٩	احتمال
٨٥٠٨٣٠٧٤٠٧٤	خصائص الـ	٣٥١	نصف لوغاريتمى
١٦١	العلاقة بين المجتمع والعينة	٩٨٠٩٧٠٧٨٠٧٣	وسط توافى
٧٨	العلاقة بالوسط الهندسى والتوافى	٩٦٠٧٨	العلاقة بالوسط الحسابى والوسط الهندسى
٩٤٠٧٧	العلاقة بالوسط والمنوال	٩٨	مرجح
٩٥٠٧٣	المرجح	٥١٠٠٤٩٩	وصلة المناسيب
٨٥٠٨٢٠٧٣	الوسط الحسابى المرحج	٤٧٦٠٤٧٣٠٤٥٧	طريقه
٩٤	الوسط الهندسى	٩٩٠٧٨	الوسط التربيعى أو جذر متوسط المربعات
٩٨	الوسط التوافى	٩٩	العلاقة بالوسط الهندسى
٤٦٢٠٤٥٥	الوسط المتحرك	٨٩-٨١٠٧٥-٧٣	للوسط الحسابى
		٨٧٠٨٦٠٧٤	المفترض أو التخمينى
		١٢٦٠١١٦	تحقيق شارليز لـ
		٨٨٠٨٨٠٧٥	طريقة الترميز لحساب
		٢٥٧-٢٥٣٠٢٥١٠٢٥٠	فترة الثقة لـ
٢٢٨	يقول إلى التوزيع الطبيعى		
	(ى)		

دار
الرحمن للطباعة

رقم الإيداع ٨١/٤٨١٦